

ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ОБОЛОЧКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕЙ ЗАДЕЛКЕ ЕЕ ТОРЦОВ

Рассматривается кососимметричная задача теории упругости об изгибных колебаниях толстостенной оболочки конечной длины при скользящей заделке ее торцов. Краевая задача сведена к бесконечной системе сингулярных интегральных уравнений второго рода. Получены выражения для амплитудного значения относительного окружного напряжения в зависимости от изменения безразмерного волнового числа. На базе построенного аналитического алгоритма проведен численный эксперимент, результатом которого является многочисленный графический материал, представляющий количественные и качественные знания об изгибных колебаниях толстостенной оболочки в зависимости от ее геометрических параметров и коэффициента Пуассона материала оболочки.

Эффективным методом решения пространственных задач для слоя (цилиндра) является метод однородных решений А. И. Лурье [7], с использованием которого в [2] рассмотрены задачи о напряженном состоянии слоя, ослабленного разными концентраторами напряжений. Другим эффективным методом при рассмотрении пространственных задач для слоя является метод собственных векторных функций, с помощью которого в [4] рассмотрена задача Кирша. В [8] с использованием собственных функций решена задача для цилиндра, нагруженного на боковой поверхности. Другой подход к решению задачи о напряженном состоянии толстостенных ортотропных полых цилиндров на основе уравнений трехмерной теории упругости предложен в [3]. Альтернативным подходом к решению трехмерных задач теории упругости являются методы граничных элементов и метод конечных элементов. В статье [16] конечноэлементная дискретизация применяется для исследования концентрации напряжения в конечной плите с круговыми и эллиптическими отверстиями. Усовершенствованию метода граничных элементов в применении к пространственным задачам теории упругости посвящены работы [10, 14].

Методом однородных решений А. И. Лурье можно построить частные решения для слоя (цилиндра) при любых условиях на его основаниях, но в случае граничных условий смешанного типа (скользящая заделка торцов или основания слоя покрыты диафрагмой, жесткой в своей плоскости и гибкой в перпендикулярном направлении) краевая задача несколько упрощается. Такие задачи еще называют периодическими по одной из координат [5, 6, 9, 12, 13, 15]. Процедура решения периодических задач теории упругости и электроупругости для кусочно-однородного цилиндра в \mathbb{R}^3 , отличающаяся от методики А. И. Лурье, предложена в работе [9], где решен ряд симметричных (относительно срединной плоскости) задач теории упругости и электроупругости.

Ниже получено решение смешанной кососимметричной задачи теории упругости для толстостенной оболочки при скользящей заделке ее торцов. Особенность этого исследования заключается в том, что однородные решения для оболочки построены с использованием процедуры, предложенной в [9], без привлечения достаточно громоздкого символического метода А. И. Лурье. Кроме этого, при решении трехмерной краевой задачи для цилиндрической области используются одномерные сингулярные интегральные уравнения [1], точнее бесконечная система таких уравнений. Следовательно, предложенная процедура фактически уменьшает размерность задачи на две единицы.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим толстостенную изотропную оболочку конечной длины h , $-h \leq x_3 \leq h$, направляющие L_1 и L_2 цилиндрических поверхностей которой представляют собой достаточно гладкие контуры (рис. 1).

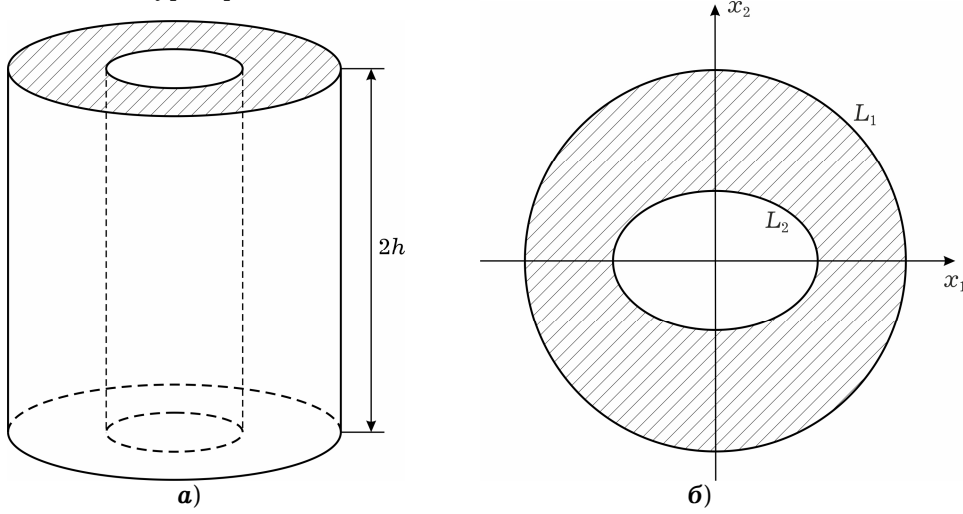


Рис. 1. Толстостенная оболочка конечной длины.

Для определенности под контуром L_1 будем понимать направляющий контур внешней цилиндрической поверхности, а под контуром L_2 – направляющий контур внутренней цилиндрической поверхности.

На цилиндрических поверхностях действует изгибное пульсирующее давление $N = \text{Re}(N_0 e^{-i\omega t})$, $N_0 = Cx_3$, $C = \text{const}$.

Пусть механические величины имеют вид

$$u_i = \text{Re}(U_i e^{-i\omega t}), \quad \sigma_{ij} = \text{Re}(\sigma_{ij}^0 e^{-i\omega t}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Принимаем, что амплитуды компонентов заданной нагрузки раскладываются в ряды Фурье по координате x_3 на $[-h, h]$, а на торцах оболочки выполняются условия

$$u_3(x_1, x_2, \pm h, t) = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, \pm h, t) = \sigma_{23}(x_1, x_2, \pm h, t) = 0. \quad (2)$$

Запишем амплитудные компоненты вектора перемещения в виде

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin \gamma_k x_3, \quad i = 1, 2, \quad U_3 = \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos \gamma_k x_3, \quad (3)$$

где $\gamma_k = (2k + 1)\pi/2h$.

Представления амплитудных компонентов вектора перемещения (3) автоматически удовлетворяют условиям (2) на торцах оболочки. Для описания стационарного волнового процесса в изотропной оболочке будем исходить из уравнений движения [7]

$$\sigma \text{grad } \theta + \Delta \mathbf{u} = \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \quad \sigma = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu},$$

λ , μ – коэффициенты Ламе.

Подставляя (1) и выражения (3) для амплитуд перемещений в уравнения движения (4), приходим к системе

$$\alpha_k^{(2)} U_{ik} + \sigma \partial_i \theta_k = 0, \quad i = 1, 2, \quad \alpha_k^{(2)} U_{3k} + \sigma \gamma_k \theta_k = 0, \quad (5)$$

где

$$\alpha_k^{(2)} = \nabla^2 - \beta_k^2, \quad \beta_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_2^2, \quad \alpha_2 = \omega/C_2, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

$$\theta_k = \partial_1 u_{1k} + \partial_2 u_{2k} - \gamma_k u_{3k}, \quad \partial_i = \partial/\partial x_i.$$

Непосредственно из системы (5) находим, что

$$\alpha_k^{(1)} \theta_k = 0, \quad (6)$$

где

$$\alpha_k^{(1)} = \nabla^2 - (\gamma_k^2 - \alpha_1^2), \quad \alpha_1 = \frac{\omega}{C_1}.$$

Введём функцию ψ_k соотношением $\theta_k = \alpha_k^{(2)} \psi_k$. Из (6) вытекает, что $\alpha_k^{(2)} \alpha_k^{(1)} \psi_k = 0$. С учётом связи между θ_k и ψ_k интегрирование системы (5) даёт

$$u_{ik} = -\sigma \partial_1 \psi_k + \omega_{ik}, \quad u_{3k} = -\sigma \partial_k \psi_k + \omega_{3k}, \quad \alpha_k^{(2)} \omega_{ik} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Потребовав, чтобы соотношения $\theta_k = \alpha_k^{(2)} \psi_k$ выполнялись фактически, приходим к равенствам

$$\omega_{ik} = \sigma \partial_2 \Omega_k, \quad \omega_{2k} = -\sigma \partial_1 \Omega_k, \quad \omega_{3k} = -\frac{1}{\gamma_k} (1 + \sigma) \alpha_k^{(1)} \psi_k, \quad (8)$$

где Ω_k – произвольное решение уравнения $\alpha_k^{(2)} \Omega_k = 0$.

Учитывая (7), (8), окончательно получаем

$$U_{1k} - iU_{2k} = 2\sigma \frac{\partial}{\partial z} (i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}),$$

$$U_{3k} = -\sigma \gamma_k \Omega_k^{(1)} - \sigma \left[\gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma \gamma_k} (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \right] \Omega_k^{(1)}, \quad \theta_k = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \Omega_k^{(1)}. \quad (9)$$

Здесь $\Omega_k^{(i)}$ – произвольное решение уравнения $\alpha_k^{(i)} \Omega_k = 0$; функции Ω_k определяют поворот элемента вокруг оси Ox_3 ; u_{ik} – амплитуды соответствующих величин.

Интегральные представления функций, которые входят в (9), выберем в виде

$$\Omega_k^{(1)} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} K_0(\lambda_k r_j) ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\lambda_k r_j) d\zeta_j + \right.$$

$$\left. + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\lambda_k r_j) d\bar{\zeta}_j \right\},$$

$$\Omega_k^{(2)} = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} q_{1k}^{(j)} K_0(\beta_k r_j) ds_j + \int_{L_j} q_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\beta_k r_j) d\zeta_j + \right.$$

$$\left. + \int_{L_j} q_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\beta_k r_j) d\bar{\zeta}_j \right\},$$

$$\Omega_k = \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} f_{1k}^{(j)} K_0(\beta_k r_j) ds_j + \int_{L_j} f_{2k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} K_0(\beta_k r_j) d\zeta_j + \right.$$

$$\left. + \int_{L_j} f_{3k}^{(j)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} K_0(\beta_k r_j) d\bar{\zeta}_j \right\}, \quad (10)$$

где $\lambda_k^2 = \gamma_k^2 - \alpha_1^2$, $r_j = |\zeta_j - z|$, $\zeta_j = \xi_1^{(j)} + i\xi_2^{(j)} \in L = \bigcup L_j$, $z = x_1 + ix_2$, $K_0(\gamma r)$ – функция Макдональда нулевого порядка; ds_j – элемент дуги контура

L_j ; плотности $p_{ik}^{(j)}$, $q_{ik}^{(j)}$, $f_{ik}^{(j)}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$, пока что неизвестны.

Граничные условия на L запишем в форме

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{2i\psi}(\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12}) &= 2(N - iT), \\ (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - e^{-2i\psi}(\sigma_{22} - \sigma_{11} - 2i\sigma_{12}) &= 2(N + iT), \\ (\sigma_{13} - \sigma_{23})e^{i\psi} + (\sigma_{13} + i\sigma_{23})e^{-i\psi} &= 2Z, \end{aligned} \quad (11)$$

где ψ – угол между внешней нормалью к контуру L и осью Ox_1 .

Используя закон Гука и формулы (9), запишем условия (11) в форме

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(N_k - iT_k) &= -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2]\Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2\Omega_k^{(2)} + \\ &\quad + 4\sigma e^{2i\psi}\partial_{zz}^2(i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ \frac{1}{\mu}(N_k + iT_k) &= -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma\lambda_k^2]\Omega_k^{(1)} - \sigma\beta_k^2\Omega_k^{(2)} + \\ &\quad + 4\sigma e^{-2i\psi}\partial_{zz}^2(-i\Omega_k - \Omega_k^{(1)} - \Omega_k^{(2)}), \\ \frac{1}{\mu}Z_k &= e^{i\psi}\partial_z(\tilde{a}_k\Omega_k^{(1)} + \tilde{b}_k\Omega_k^{(2)} + i\tilde{c}_k\Omega_k) + e^{-i\psi}\partial_z(\tilde{a}_k\Omega_k^{(1)} + \\ &\quad + \tilde{b}_k\Omega_k^{(2)} - i\tilde{c}_k\Omega_k), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda &= \alpha_2^2 - \alpha_1^2, \quad \tilde{a}_k = a_k - \sigma\gamma_k, \quad \tilde{b}_k = b_k - \sigma\gamma_k, \quad \tilde{c}_k = \sigma\gamma_k, \\ a_k &= -\sigma\gamma_k, \quad b_k = -\sigma\left[\gamma_k + \frac{1 + \sigma}{\sigma\gamma_k}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\right]. \end{aligned}$$

Система сингулярных интегральных уравнений. Краевая задача (12) с учетом соотношений (10) сводится с помощью обычной процедуры к системе, состоящей из шести сингулярных интегральных уравнений (для каждого фиксированного x).

Введём в системе (12) дополнительный индекс « n », $n = 1, 2$, соответствующий двум направляющим – замкнутым контурам L_1 и L_2 . Система сингулярных интегральных уравнений запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu}(N_k^{(1)} - iT_k^{(1)}) &= p_{2k}^{(1)}r_{2k1}^* + p_{3k}^{(1)}r_{2k1}^* + \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)}G_{1kj1}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)}G_{2kj1}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)}G_{3kj1}^* ds_j \right\}, \\ \frac{1}{\mu}(N_k^{(1)} + iT_k^{(1)}) &= p_{2k}^{(1)}\tilde{r}_{1k1} + p_{3k}^{(1)}\tilde{r}_{2k1} + \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)}\tilde{G}_{1kj1} ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)}\tilde{G}_{2kj1} ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)}\tilde{G}_{3kj1} ds_j \right\}, \\ \frac{1}{\mu}Z_k^{(1)} &= p_{2k}^{(1)}\tilde{r}_{1k1}^* + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)}\tilde{G}_{1kj1}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)}\tilde{G}_{2kj1}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)}\tilde{G}_{3kj1}^* ds_j \right\}, \\ \frac{1}{\mu}(N_k^{(2)} - iT_k^{(2)}) &= -p_{2k}^{(2)}r_{2k2}^* - p_{3k}^{(2)}r_{2k2}^* + \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)}G_{1kj2}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)}G_{2kj2}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)}G_{3kj2}^* ds_j \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu} (N_k^{(2)} + iT_k^{(2)}) &= -p_{2k}^{(2)} \tilde{r}_{1k2} - p_{3k}^{(2)} \tilde{r}_{2k2} + \\
&+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} \tilde{G}_{1kj2} ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \tilde{G}_{2kj2} ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \tilde{G}_{3kj2} ds_j \right\}, \\
\frac{1}{\mu} Z_k^{(2)} &= -p_{2k}^{(2)} \tilde{r}_{1k2}^* + \\
&+ \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} \tilde{G}_{1kj2}^* ds_j + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} \tilde{G}_{2kj2}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} \tilde{G}_{3kj2}^* ds_j \right\}, \quad (13)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
if_{1k}^{(j)} - p_{1k}^{(j)} - q_{1k}^{(j)} &= 0, & if_{1k}^{(j)} + p_{1k}^{(j)} + q_{1k}^{(j)} &= 0, \\
\tilde{a}_{k-2k} p_{1k}^{(j)} - \tilde{b}_j q_{2k}^{(j)} + i\tilde{c}_k f_{2k}^{(j)} &= 0, & -p_{2k}^{(j)} - q_{2k}^{(j)} + if_{2k}^{(j)} &= 0, \\
\tilde{a}_k p_{3k}^{(j)} + \tilde{b}_k q_{3k}^{(j)} - i\tilde{c}_k f_{3k}^{(j)} &= 0, & p_{3k}^{(j)} + q_{3k}^{(j)} + if_{3k}^{(j)} &= 0, \\
f_{1k}^{(j)} &= 0, & q_{1k}^{(j)} &= -p_{1k}^{(j)}, & f_{2k}^{(j)} &= d_{1k}^* p_{2k}^{(j)}, & q_{2k}^{(j)} &= d_{1k}^* p_{2k}^{(j)}, \\
f_{3k}^{(j)} &= \bar{d}_{1k}^* p_{3k}^{(j)}, & q_{3k}^{(j)} &= \tilde{d}_{1k}^* p_{3k}^{(j)}; \\
d_{1k}^* &= -i(1 + \tilde{d}_{1k}), & \tilde{d}_{1k} &= -\frac{d_{1k}}{d_{2k}}, & d_{1k} &= \tilde{a}_k + \tilde{c}_k, \\
d_{2k} &= \tilde{b}_k + \tilde{c}_k, & \sigma_{n0} &= e^{2i\psi_{n0}}, \\
r_{1kn}^* &= r_{1k} - \sigma_{n0} r_{1kn}, & r_{2kn}^* &= r_{2k} - \sigma_{n0} r_{2kn}, \\
\tilde{r}_{1kn} &= r_{1k} - \bar{\sigma}_{n0} r_{3kn}, & \tilde{r}_{2kn} &= r_{2k} - \bar{\sigma}_{n0} r_{4kn}, \\
\tilde{r}_{1kn}^* &= e^{i\psi_{n0}} r_{5kn} + e^{-i\psi_{n0}} r_{6kn}, \\
r_{1k} &= -(\ell_{1k} - \ell_{2k} \tilde{d}_{1k}) \ell^*, & r_{2k} &= -r_{1k}, \\
r_{1kn} &= 4\sigma \{ \ell_{1kn}(\beta_k) - \ell_{1kn}(\lambda_k) \}, \\
r_{2kn} &= 4\sigma \{ (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \ell_{1kn}(\beta_k) + \ell_{1kn}(\lambda_k) \}, \\
r_{3kn} &= 4\sigma \{ (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \bar{\ell}_{1kn}(\beta_k) - \bar{\ell}_{1kn}(\lambda_k) \}, \\
r_{4kn} &= 4\sigma \{ \bar{\ell}_{1kn}(\beta_k) - \bar{\ell}_{1kn}(\lambda_k) \}, & r_{5kn} &= (\tilde{a}_k + \tilde{b}_k) \ell_n^*, & r_{6kn} &= \bar{r}_{5kn}; \\
\ell_{1k} &= -[\Lambda(1 - \sigma) + \sigma \lambda_k^2], & \ell_{2k} &= -\sigma \beta_k^2, & \ell^* &= \frac{i\pi}{2}, & \ell_n^* &= \frac{\pi}{2} e^{-i\psi_{n0}}, \\
\ell_{1kn}(\lambda_k) &= \frac{i\pi \lambda_k^2}{8} e^{-2i\psi_{n0}}, & \ell_{1kn}(\beta_k) &= \frac{i\pi \beta_k^2}{8} e^{-2i\psi_{n0}}; \\
G_{1kjn}^* &= G_{1kjn} - \sigma_{n0} G_{4kjn}, & G_{2kjn}^* &= G_{2kjn} - \sigma_{n0} G_{5kjn}, \\
G_{3kjn}^* &= G_{3kjn} - \sigma_{n0} G_{6kjn}, & \tilde{G}_{1kjn} &= G_{1kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{7kjn}, \\
\tilde{G}_{2kjn} &= G_{2kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{8kjn}, & \tilde{G}_{3kjn} &= G_{3kjn} - \bar{\sigma}_{n0} G_{9kjn}, \\
\tilde{G}_{3kjn}^* &= e^{i\psi_{n0}} G_{12kjn} + e^{-i\psi_{n0}} G_{13kjn}, \\
\tilde{G}_{2kjn}^* &= e^{i\psi_{n0}} G_{11kjn} + e^{-i\psi_{n0}} G_{14kjn}, \\
\tilde{G}_{3kjn}^* &= e^{i\psi_{n0}} G_{12kjn} + e^{-i\psi_{n0}} G_{15kjn}, \\
G_{1kjn} &= \ell_{1k} k_0(\lambda_k r_{jn0}) - \ell_{2k} k_0(\beta_k r_{jn0}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{2kjn} &= -\frac{i}{2} \{ \ell_{1k} \lambda_k k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + \ell_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k k_0 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\
G_{3kjn} &= \frac{i}{2} \{ \ell_{1k} \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + \ell_{2k} \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\
G_{4kjn} &= \sigma \{ \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-2i\alpha_{jn0}}, \\
G_{5kjn} &= 4i\sigma \{ k_3^{**} (\lambda_k r_{jn0}) - k_3^{**} (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i(\psi_j - 3\alpha_{jn0})}, \\
G_{6kjn} &= \frac{i\sigma}{2} \{ \lambda_k^3 k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i(\psi_j + \alpha_{jn0})}, \\
G_{7kjn} &= \sigma \{ \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \} e^{2i\alpha_{jn0}}, \\
G_{8kjn} &= -\frac{i\sigma}{2} \{ \lambda_k^3 k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + (1 + 2\tilde{d}_{1k}) \beta_k^3 k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i(\psi_j + \alpha_{jn0})}, \\
G_{9kjn} &= -4i\sigma \{ k_3^{**} (\lambda_k r_{jn0}) - k_3^{**} (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i(\psi_j - 3\alpha_{jn0})}, \\
G_{10kjn} &= \frac{1}{2} \{ \tilde{a}_k \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) - \tilde{b}_k \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i\alpha_{jn0}}, \\
G_{11kjn} &= \frac{1}{4} \{ -\tilde{a}_k \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) - (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i(\psi_j - 2\alpha_{jn0})}, \\
G_{12kjn} &= \frac{i}{4} \{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} + i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i\psi_j}, \\
G_{13kjn} &= \frac{1}{2} \{ \tilde{a}_k \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) - \tilde{b}_k \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i\alpha_{jn0}}, \\
G_{14kjn} &= -\frac{i}{4} \{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_0 (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_0 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i\psi_j}, \\
G_{15kjn} &= \frac{i}{4} \{ \tilde{a}_k \lambda_k^2 k_2^* (\lambda_k r_{jn0}) + (\tilde{b}_k \tilde{d}_{1k} - i\tilde{c}_k \bar{d}_{1k}^*) \beta_k^2 k_2^* (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i(\psi_j - 2\alpha_{jn0})}, \\
d_{1k}^* &= -i(1 + \tilde{d}_{1k}), \quad K_3^{**}(\gamma r) = -\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 K_3(\gamma r) + \frac{1}{r^3}, \\
K_2^*(\gamma r) &= K_2(\gamma r) - \frac{2}{\gamma^2 r^2}, \quad \zeta_j - \zeta_{jn0} = r_{jn0} e^{i\alpha_{jn0}}.
\end{aligned}$$

Результаты численных расчётов. В качестве примера рассмотрим изотропную оболочку, направляющие L_1 и L_2 цилиндрических поверхностей которой представляют собой эллипсы:

$$\begin{aligned}
L_1 : \quad \xi_{11} &= R_{11} \cos \varphi_1, \quad \xi_{12} = R_{12} \sin \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \\
L_2 : \quad \xi_{21} &= R_{21} \cos \varphi_2 + d, \quad \xi_{22} = R_{22} \sin \varphi_2, \quad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

Для характеристики напряженного состояния оболочки на внутренней цилиндрической ее поверхности рассчитываем амплитудные значения величины

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - 2\sigma_{12} \cos \theta \sin \theta, \\
\theta &= \psi - \pi, \quad \sigma_{ZZ} = \sigma_{33},
\end{aligned} \tag{14}$$

в точке $\varphi_2 = 0$, $x_3 = 0.8h$ контура L_2 .

При численной реализации алгоритма систему интегральных уравнений методом механических квадратур [1, 11] сводим к линейной системе

алгебраических уравнений. Последовательность вычислений такая: сначала численно решаем систему интегральных уравнений краевой задачи (13), далее определяем коэффициенты Фурье $\sigma_{ij}^{(k)}$ тензора напряжений, затем по формулам (14) рассчитываем напряжения в выше означенной точке.

С учетом формул (9), (10) операции предельного перехода и уравнений относительно плотностей коэффициенты Фурье искомых величин (14) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \sigma_{\theta\theta}^{(kn)} &= -p_{2k}^{(n)} m_{1k} - p_{3k}^{(n)} m_{2k} + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} H_{1kjn} ds_j + \right. \\ &\quad \left. + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} H_{2kjn} ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} H_{3kjn} ds_j \right\} - \frac{1}{\mu} N_k^{(n)}, \\ -\frac{1}{\mu} \sigma_{zz}^{(kn)} &= -p_{2k}^{(n)} m_{1k}^* - p_{3k}^{(n)} m_{2k}^* + \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_{L_j} p_{1k}^{(j)} H_{1kjn}^* ds_j + \right. \\ &\quad \left. + \int_{L_j} p_{2k}^{(j)} H_{2kjn}^* ds_j + \int_{L_j} p_{3k}^{(j)} H_{3kjn}^* ds_j \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} m_{1k} &= 2r_{1k}, & m_{2k} &= 2r_{2k}, \\ H_{1kjn} &= 2G_{1kjn}, & H_{2kjn} &= 2G_{2kjn}, & H_{3kjn} &= 2G_{3kjn}, \\ m_{1k}^* &= -(a_k^* + b_k^* \tilde{d}_{1k}) \ell^*, & m_{2k}^* &= -m_{1k}^*, \\ H_{1kjn}^* &= a_k^* k_0 (\lambda_k r_{jn0}) - b_k^* k_0 (\beta_k r_{jn0}), \\ H_{2kjn}^* &= -\frac{i}{2} \{ a_k^* \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + b_k^* \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\ H_{3kjn}^* &= \frac{i}{2} \{ a_k^* \lambda_k k_1 (\lambda_k r_{jn0}) + b_k^* \tilde{d}_{1k} \beta_k k_1 (\beta_k r_{jn0}) \} e^{-i(\psi_j - \alpha_{jn0})}, \\ a_k^* &= (\sigma - 1) \Lambda - 2\gamma_k a_k, & b_k^* &= -2\gamma_k b_k. \end{aligned}$$

Пусть на внешней цилиндрической поверхности оболочки действует изгибающее пульсирующее давление, амплитудное значение которого определяется выражением

$$N_0 = C \sin \gamma_0 x_3, \quad C = \text{const} \quad (16)$$

или

$$N_0 = C x_3. \quad (17)$$

На рис. 2 – рис. 5 приведены распределения относительного амплитудного значения окружного напряжения $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$ в зависимости от изменения безразмерного волнового числа $\alpha_1 a$ (a – характерный линейный размер) при различных геометрических и механических параметрах оболочки и $a = 1$. Все графики построены при значениях радиусов направляющей внешней цилиндрической поверхности $R_{11} = R_{12} = 2$. Значения радиусов направляющей внутренней цилиндрической поверхности оболочки (ее толщина) и ее полувысота, а также значение коэффициента Пуассона варьируются.

Все кривые на рис. 2 – рис. 4 получены в случае нагружения (16), а кривая на рис. 5 – в случае нагружения (17). Точками приведены результаты точного решения, полученного методом рядов. Наблюдается хорошее совпадение результатов приближенного и точного решений.

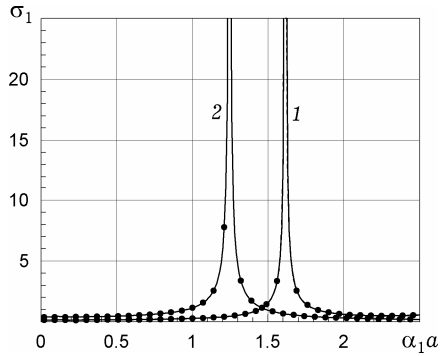


Рис. 2. Зависимость $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$ от $\alpha_1 a$ при $\nu = 0.15$ и $h = 0.5$: кривая 1 – для $R_{21} = R_{22} = 1$; кривая 2 – для $R_{21} = R_{22} = 1.5$.

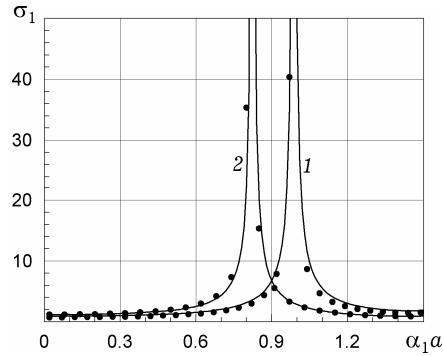


Рис. 3. Зависимость $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$ от $\alpha_1 a$ при $\nu = 0.15$ и $h = 1.0$: кривая 1 – для $R_{21} = R_{22} = 0.5$; кривая 2 – для $R_{21} = R_{22} = 1.0$.

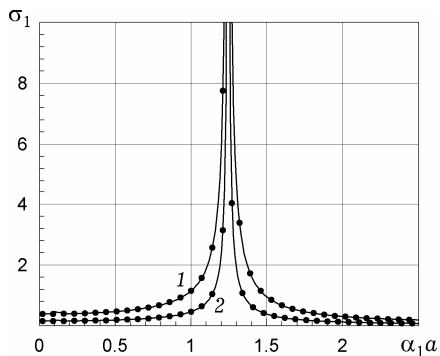


Рис. 4. Зависимость $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$ от $\alpha_1 a$ при $R_{21} = R_{22} = 1.5$ и $h = 0.5$: кривая 1 – для $\nu = 0.15$; кривая 2 – для $\nu = 0.3$.

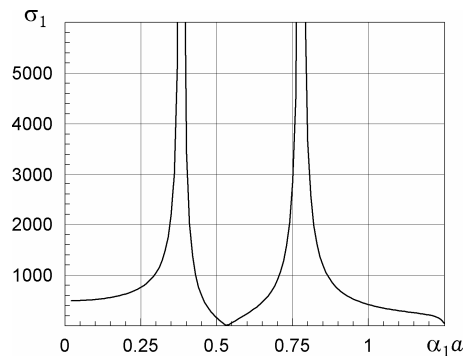


Рис. 5. Зависимость $\sigma_1 = |\sigma_{\theta\theta}/C|$ от $\alpha_1 a$ при $\nu = 0.15$ и $h = 100.0$ для $R_{21} = 1.0$, $R_{22} = 0.5$.

Выводы. По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- при уменьшении толщины оболочки наблюдается смещение основания первого резонанса в сторону начала координат;
- при увеличении высоты оболочки значения первых резонансов при различных значениях радиусов внутренней цилиндрической поверхности смещаются к началу координат;
- при увеличении коэффициента Пуассона наблюдается сужение основания первого резонанса;
- при большой длине оболочки ($h = 100$) наблюдается появление второго резонанса на участке $\alpha_1 a \in (0.0, 1.25)$.

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – Москва: Наука, 1985. – 256 с.
2. Григолюк Э. И., Ковалев Ю. Д., Фильштинский Л. А. Изгиб полуслоя, ослабленного сквозным отверстием // Докл. РАН. – 1995. – **345**, № 1. – С. 54–56.
3. Григоренко Я. М., Крюков Н. Н., Крижановская Т. В. Исследование напряженного состояния ортотропных полых цилиндров при несимметричном нагружении // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 3–6.
4. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Точное решение задачи Кирша // Прикл. механика. – 1970. – **6**, № 5. – С. 10–17.
5. Ковалев Ю. Д. Смешанные задачи теории упругости для слоя с туннельными неоднородностями // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 81–87.

6. Ковальов Ю. Д. Симетрична задача пружності для покритого діафрагмою шару з тунельними порожнинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 6. – С. 39–42.
The same: Koval'ov Yu. D. Symmetric elasticity problem for a layer with tunnel cavities covered with a diaphragm // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 6. – P. 809–813.
7. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – **6**, № 2-3. – С. 151–168.
8. Ревенко В. П. Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
9. Фильштинский Л. А. Периодические решения теории упругости и электроупругости для цилиндра в \mathbb{R}^3 // Теорет. и прикл. механика. – 1990. – Вып. 21. – С. 13–20.
10. Ebrahimnejad L., Attarnejad R., Ebrahimnejad H. Applying wavelets to improve the boundary element method for elasticity problems // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2010. – **34**, No. 9. – P. 810–818.
11. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. Numerical solution of singular integral equations // In: Mechanics of fracture. Vol. 1: Methods of analysis and solutions of crack problems / Ed. G. C. Sig. – Leyden: Noordhoff Int. Publ, 1973. – Chap. 7. – P. 368–425.
12. Fil'shtinskii L. A., Kovalev Yu. D., Ventsel E. S. Bending of layers weakened by cuts // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, No. 2. – P. 346–356.
13. Fil'shtinskii L. A., Kovalev Yu. D., Ventsel E. S. Equilibrium of layers weakened by loaded cuts // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**, No. 11–12. – P. 1490–1495.
14. Kitipornchai S., Liew K. M., Cheng Y. A boundary element-free method (BEFM) for three-dimensional elasticity problems // Comput. Mech. – 2005. – **36**, No. 1. – P. 13–20.
15. Ventsel E. S., Fil'shtinskii L. A., Kovalev Yu. D., Stativka E. N. On one skew-symmetric problem of electroelasticity for inhomogeneous cylinder of finite length // Int. J. Solids Struct. – 2007. – **44**, No. 18–19. – P. 6124–6134.
16. Yang Zh. The stress and strain concentrations of an elliptical hole in an elastic plate of finite thickness subjected to tensile stress // Int. J. Fract. – 2009. – **155**, No. 1. – P. 43–54.

ЗГИННІ КОЛИВАННЯ ТОВСТОСТІННОЇ ОБОЛОНКИ СКІНЧЕННОЇ ДОВЖИНИ ПРИ КОВЗНОМУ ЗАКРІПЛЕННІ ЇЇ ТОРЦІВ

Розглядається кососиметрична задача теорії пружності про згинні коливання товстостінної оболонки скінченної довжини при ковзному закріпленні її торців. Крайову задачу зведено до нескінченної системи сингулярних інтегральних рівнянь другого роду. Отримано вирази для амплітудного значення відносного колового напруження залежно від зміни безрозмірного хвильового числа. На основі побудованого аналітичного алгоритму проведено числовий експеримент, результатом якого є численний графічний матеріал, що дає кількісні та якісні знання про згинні коливання товстостінної оболонки залежно від її геометричних параметрів і коефіцієнта Пуассона матеріалу оболонки.

BENDING VIBRATIONS OF A THICK-WALLED SHELL OF FINITE LENGTH WITH SLIDING FIXED END FACES

The skew-symmetric problem of the theory of elasticity on bending vibrations of a thick-walled shell of finite length with sliding fixed end faces is investigated. The boundary value problem is reduced to an infinite system of singular integral equations of the second kind. The expressions for amplitude value of relative hoop stress depending on changes of the dimensionless wave number are found. On the basis of the developed analytic algorithm the numerical experiment was carried out. The results of these investigations are illustrated graphically representing quantitative and qualitative knowledge about the bending vibrations of the thick-walled shell depending on its geometric parameters and Poisson's ratio of the shell material.

Сумський гос. ун-т, Суми

Получено
03.06.13