УДК 511.138 + 517.53 + 517.633

В. Л. Макаров[1], І. І. Демків[2]

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ІНТЕГРАЛЬНИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ ТИПУ ТІЛЕ

Відомі результати з інтерполювання функції однієї змінної за допомогою дробу Тіле – Ерміта з довільною кратністю кожного з інтерполяційних вузлів узагальнюються для функціонала, що діє з простору кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю розривів першого роду. На множині інтерполяційних вузлів, один з яких є континуальним, одержано інтерполяційний інтегральний дріб типу Тіле. Вказано конструктивний підхід до побудови інтерполяційного інтегрального дробу типу Тіле, коли всі інтерполяційні вузли є континуальними. Цей випадок є важливим для урівноваження інформації, що використовується для побудови інтерполянта, і його інтерполяційними властивостями.

Узагальненням дробів Тіле займались ряд авторів (див., наприклад, [7, 8, 10] та інші). У роботах авторів [3, 4] було показано, як граничним переходом в інтерполяційному інтегральному поліномі типу Ньютона одержати інтерполяційний інтегральний поліном типу Ерміта. Тому природним чином виникло питання: чи не можна подібним граничним переходом в інтерполяційному інтегральному ланцюговому дробі (ІІЛД) [2] перейти до інтерполяційного інтегрального ланцюгового дробу типу Ерміта з довільною кратністю кожного з інтерполяційних вузлів. Стосовно дробового випадку з точки зору складності ситуація виявилась протилежною. Справджується така

Лема 1. *Нехай $Q_n^{IS}(x)$ – скалярний інтерполяційний ланцюговий дріб, одержаний з інтегрального ланцюгового дробу $Q_n^I(x(\cdot))$ у припущенні, що всі інтерполяційні вузли з каркаса $x_i(z)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, і аргумент $x(z)$ є тотожними сталими. Для того щоб існував ІІЛД типу Ерміта $Q_n^E(x(\cdot))$ з довільною кратністю інтерполяційних вузлів, одержаний граничним переходом з $Q_n^I(x(\cdot))$, необхідно та достатньо, щоб існував ланцюговий дріб типу Ерміта $Q_n^E(x)$ з такою ж кратністю інтерполяційних вузлів, одержаний граничним переходом з $Q_n^{IS}(x)$.*

Д о в е д е н н я не становить жодних труднощів.

Проілюструємо наведене твердження на такому прикладі. Для сталих $x(z)$, $x_i(z)$, $i = 0, 1, 2$, будемо мати

$$Q_2^{IS}(x) = F(x_0) + \frac{(x - x_0)\ell_1}{1 + (x - x_0)(x - x_1)\ell_2}, \tag{1}$$

де ℓ_1, ℓ_2 – інтеграли від відповідних ядер. Поклавши $x_1 = x_0 + \alpha$ та підставивши цей вираз в (1), одержимо, що

$$\ell_1 = \frac{f(x_0 + \alpha) - f(x_0)}{\alpha}, \qquad \ell_2 = \frac{f(x_0 + 2\alpha) - 2f(x_0 + \alpha) + f(x_0)}{2\alpha^2 (f(x_0) - f(x_0 + 2\alpha))}.$$

Перейдемо до границі при $\alpha \to 0$. Отримаємо

$$\lim_{\alpha \to 0} Q_2^{IS}(x) = f(x_0). \tag{2}$$

Із (2) випливає, що не існує інтерполяційного дробу типу Ерміта $Q_2^E(x)$, у якого x_0 є трикратним інтерполяційним вузлом, а отже, не існує ІІЛД $Q_2^E(x(\cdot))$ типу Ерміта з трикратним інтерполяційним вузлом.

Таким чином, одержати ІІЛД типу Ерміта шляхом граничного переходу з ІІЛД типу Ньютона можна тільки тоді, коли кожний з інтерполяційних вузлів має кратність не вище двох.

Виникають наступні задачі:

1°. Знайти такий звичайний ІЛД, щоб шляхом граничного переходу одержати звичайний ІЛД типу Ерміта з довільною кратністю кожного з вузлів.

2°. Узагальнити одержаний результат на ІІЛД типу Ерміта.

Розв'язком задачі ***1°*** є інтерполяційний дріб Тіле. Так, з двоповерхового ІЛД Тіле

$$T_2(x) = f(x_0) + \cfrac{(x-x_0)f(x_0,x_1)}{1+(x-x_1)\cfrac{f(x_0,x_1,x_2)}{f(x_0,x_2)}} \tag{3}$$

(після очевидних перетворень) застосуванням граничного переходу одержуємо ІЛД типу Ерміта з трикратним інтерполяційним вузлом:

$$T_2^E(x) = f(x_0) + \cfrac{(x-x_0)f'(x_0)}{1-\cfrac{(x-x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]}}.$$

Для загального випадку твердження леми випливає із результатів, викладених у монографії [6].

Розв'язання задачі ***2°*** почнемо з часткового випадку. Узагальнення формули Тіле на двоповерховий ІІЛД є таким:

$$T_2(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{\ell_1(x(\cdot)-x_0(\cdot))}{1+\ell_2(x(\cdot)-x_1(\cdot))}, \tag{4}$$

де

$$\ell_1(x(\cdot)-x_0(\cdot)) = \int_0^1 [x(s_1)-x_0(s_1)]K_1(s_1)\,ds_1 =$$

$$= -\int_0^1 \frac{x(s_1)-x_0(s_1)}{x_1(s_1)-x_0(s_1)}\frac{d}{ds_1}[F(x_{0,1}(\cdot,s_1))-F(x_0(\cdot))]\,ds_1,$$

$$\ell_2(x(\cdot)-x_1(\cdot)) = \int_0^1 [x(s_2)-x_1(s_2)]K_2(s_2)\,ds_2 =$$

$$= -\int_0^1 \frac{x(s_2)-x_1(s_2)}{x_2(s_2)-x_1(s_2)}\frac{d}{ds_2}\times$$

$$\times\left[\frac{\int_0^1 K_1(s_1)[x_{1,2}(s_1,s_2)-x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot,s_2))-F(x_0(\cdot))}\right]ds_2,$$

$$x_{i-1,i}(s_{i-1},s_i) = x_{i-1}(s_{i-1}) + H(s_{i-1}-s_i)(x_i(s_{i-1})-x_{i-1}(s_{i-1})).$$

Перевіримо виконання інтерполяційних умов. Підставивши у (4)

$$x_{1,2}(z,\xi) = x_1(z) + H(z-\xi)(x_2(z)-x_1(z)),$$

одержимо

$$\ell_2(x_{1,2}(\cdot,\xi)-x_1(\cdot)) =$$

$$= -\int_0^1 \frac{x_{1,2}(s_2,\xi)-x_1(s_2)}{x_2(s_2)-x_1(s_2)}\frac{d}{ds_2}\left[\frac{\int_0^1 K_1(s_1)[x_{1,2}(s_1,s_2)-x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot,s_2))-F(x_0(\cdot))}\right]ds_2 =$$

$$
= -\int_{\xi}^{1} \frac{d}{ds_2}\left[\frac{\int_0^{s_2} K_1(s_1)[x_1(s_1)-x_0(s_1)]\,ds_1 + \int_{s_2}^{1} K_1(s_1)[x_2(s_1)-x_0(s_1)]\,ds_1 +}{F(x_{1,2}(\cdot,s_2))-F(x_0(\cdot))}\right] ds_2 =
$$

$$
= -\frac{\int_0^1 K_1(s_1)[x_1(s_1)-x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_1(\cdot))-F(x_0(\cdot))} +
$$

$$
+ \frac{\int_0^{\xi} K_1(s_1)[x_1(s_1)-x_0(s_1)]\,ds_1 + \int_{\xi}^{1} K_1(s_1)[x_2(s_1)-x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))} =
$$

$$
= -1 + \frac{-F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) + F(x_1(\cdot)) + \int_{\xi}^{1} K_1(s_1)[x_2(s_1)-x_0(s_1)]\,ds_1}{F(x_{1,2}(\cdot,\xi))-F(x_0(\cdot))},
$$

$$
\ell_1(x_{1,2}(\cdot,\xi)-x_0(\cdot)) = -F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) + F(x_1(\cdot)) +
$$

$$
+ \int_{\xi}^{1} K_1(s_1)[x_2(s_1)-x_0(s_1)]\,ds_1 .
$$

Отже,

$$
T_2(x_{1,2}(\cdot,\xi)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{\ell_1(x_{1,2}(\cdot,\xi)-x_1(\cdot))}{1+\ell_2(x_{1,2}(\cdot,\xi)-x_1(\cdot))} = F(x_{1,2}(\cdot,\xi)),
$$

тобто виконується інтерполяційна умова на континуальному вузлі

$$
x_{1,2}(z,\xi) = x_1(z) + H(z-\xi)(x_2(z)-x_1(z)).
$$

Подібно перевіряємо виконання інтерполяційної умови у вузлі $x_0(z)$.

Перейдемо до одержання загальної інтегральної формули типу Тіле. Шукаємо цю формулу, використовуючи форму запису У. Джонса, В. Трона [1], у вигляді

$$
T_n(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \frac{\ell_1(x(\cdot)-x_0(\cdot))\,|}{|\,1} + \frac{\ell_2(x(\cdot)-x_1(\cdot))\,|}{|\,1} + \ldots
$$

$$
\ldots + \frac{\ell_{n-1}(x(\cdot)-x_{n-2}(\cdot))\,|}{|\,1} + \frac{\ell_n(x(\cdot)-x_{n-1}(\cdot))\,|}{|\,1}. \tag{5}
$$

Позначимо у такий спосіб i-й підхідний дріб до дробу (5) (див. [1, 6]):

$$
T_i(x(\cdot)) = \frac{A_i(x(\cdot))}{B_i(x(\cdot))}, \tag{6}
$$

де

$$
B_i(x(\cdot)) = B_{i-1}(x(\cdot)) + \ell_i(x(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))B_{i-2}(x(\cdot)), \quad i = 1, 2, \ldots,
$$

$$
B_{-1}(x(\cdot)) = 0, \quad B_0(x(\cdot)) = 1,
$$

$$
A_i(x(\cdot)) = A_{i-1}(x(\cdot)) + \ell_i(x(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))A_{i-2}(x(\cdot)), \quad i = 1, 2, \ldots,
$$

$$
A_{-1}(x(\cdot)) = 1, \quad A_0(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)).
$$

Із (6) знаходимо

$$
\ell_i(x(\cdot)-x_{i-1}(\cdot)) = -\frac{A_{i-1}(x(\cdot)) - T_i(x(\cdot)B_{i-1}(x(\cdot))}{A_{i-2}(x(\cdot)) - T_i(x(\cdot))B_{i-2}(x(\cdot))}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{7}
$$

Аналіз скалярної формули Тіле вказує на структуру, яку повинен мати функціонал $\ell_i(x(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))$:

$$\ell_i(x(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))=\int_0^1 K_i(s_i)[x(s_i)-x_{i-1}(s_i)]\,ds_i\,. \tag{8}$$

Зі співвідношень (7), (8) можемо визначити ядро $K_i(s)$. Замінимо $x(s)$ на

$$x_{i-1,i}(s,\xi)=x_{i-1}(s)+H(s-\xi)[x_i(s)-x_{i-1}(s)].$$

Тоді після диференціювання за змінною ξ одержуємо

$$K_i(\xi)=\frac{1}{x_i(\xi)-x_{i-1}(\xi)}\times$$

$$\times\frac{d}{d\xi}\frac{A_{i-1}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))-F(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))B_{i-1}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))}{A_{i-2}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))-F(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))B_{i-2}(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))}\,. \tag{9}$$

Теорема. *Нехай для функціонала* $F(x(\cdot))$, *що діє з простору* $Q^{(0)}[0,1]$ *кусково-неперервних функцій зі скінченною кількістю розривів першого роду в* $\mathbb{R}^1$, *виконуються умови*

$$F(x_i(\cdot))=g_i,\qquad i=1,2,\dots,n,$$

$$F(x_{n-1,n}(\cdot,\xi))=g_{n-1,n}(\xi),\qquad \xi\in[0,1],$$

і нехай $F(x(\cdot))$ *належить до класу функціоналів, для яких визначений та існує інтегральний дріб* (5). *Тоді цей дріб є ІЛД на множині інтерполяційних вузлів,* $x_i(s)$, $i=0,1,\dots,n$, $x_{n-1,n}(s,\xi)$, $\xi\in[0,1]$, *тобто задовольняє умови*

$$T_n(x_i(\cdot))=g_i,\qquad i=0,1,\dots,n,$$

$$T_n(x_{n-1,n}(\cdot,\xi))=g_{n-1,n}(\xi),\qquad \xi\in[0,1],$$

остання з яких є континуальною.

Неважко переконатись, що, коли $x(s)$, $x_i(s)$, $i=0,1,\dots,n$, є сталими, формула (5) з урахуванням (7)–(9) має вигляд скалярного дробу Тіле. Дійсно, в цьому випадку із (9) отримуємо інтерполяційний дріб

$$F(x_0)+\frac{(x-x_0)\ell_1(1)|}{|1}+\frac{(x-x_1)\ell_2(1)|}{|1}+\ldots+\frac{(x-x_{n-2})\ell_{n-1}(1)|}{|1}+\frac{(x-x_{n-1})\ell_n(1)|}{|1},$$

який буде дробом Тіле за умови виконання співвідношень

$$v_i(x_i)=\frac{1}{\ell_i(1)},\qquad i=1,2,\dots,n, \tag{10}$$

де $v_i(x_i)$, $i=1,2,\dots,n$, – обернені поділені різниці (див. [1]).

Доведення (10) здійснюємо за методом математичної індукції. Для дробу Тіле і для розглядуваного дробу маємо такі рекурентні співвідношення:

$$T_i(x_i)=F(x_i)=\frac{A_i(x_i)}{B_i(x_i)}=-\frac{A_{i-1}(x_i)-\ell_i(x-x_{i-1})A_{i-2}(x_i)}{B_{i-1}(x_i)-\ell_i(x-x_{i-1})B_{i-2}(x_i)},\quad i=1,2,\dots,$$

$$B_i(x)=B_{i-1}(x)+\ell_i(x-x_{i-1})B_{i-2}(x),\qquad i=1,2,\dots,$$

$$B_{-1}(x)=0,\qquad B_0(x)=1,$$

$$A_i(x)=A_{i-1}(x)+\ell_i(x-x_{i-1})A_{i-2}(x),\qquad i=1,2,\dots,$$

$$A_{-1}(x)=1,\qquad A_0(x)=F(x_0),$$

$$T_i(x_i) = F(x_i) = \frac{\overline{A}_i(x_i)}{\overline{B}_i(x_i)} = -\frac{\overline{A}_{i-1}(x_i) - \dfrac{v_i(x_i)}{x_i - x_{i-1}}\overline{A}_{i-2}(x_i)}{\overline{B}_{i-1}(x_i) - \dfrac{v_i(x_i)}{x_i - x_{i-1}}\overline{B}_{i-2}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$\overline{A}_{-1}(x) = 1, \quad \overline{A}_0(x) = F(x_0), \quad \overline{B}_{-1}(x) = 0, \quad \overline{B}_0(x) = 1.$$

Звідси можемо записати

$$\frac{v_i(x_i)}{x_i - x_{i-1}} = -\frac{\overline{A}_{i-1}(x_i) - F_i(x_i)\overline{B}_{i-1}(x_i)}{\overline{A}_{i-2}(x_i) - F_i(x_i)\overline{B}_{i-2}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

Таким чином, маємо

$$\frac{v_i(x_i)}{x_i - x_{i-1}} = \ell_i(x_i - x_{i-1}).$$

При цьому використано математичну індукцію і початкові дані

$$\overline{A}_i(x) = A_i(x), \quad \overline{B}_i(x) = B_i(x), \quad i = -1, 0.$$

Отже, для ІЛД (5) справджується лема 1.

Для того щоб одержати ІЛД типу Тіле, який задовольняє континуальні інтерполяційні умови

$$T_n(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)) = F_n(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)), \quad \xi \in [0,1], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

треба визначати ядра у формулах (8) в інший спосіб. Для ілюстрації зупинимось на двоповерховому дробі та для спрощення за каркас візьмемо

$$x_1(s) = x_0(s) + \alpha, \quad x_2(s) = x_0(s) + \alpha + \gamma.$$

Тоді для визначення ядер $K_i(s_i)$, $i = 1, 2$, маємо систему інтегральних рівнянь

$$T_2(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)) = F(x_{i-1,i}(\cdot, \xi)), \quad i = 1, 2,$$

розв'язком якої є

$$K_2(\xi) = \frac{d}{d\xi}\left\{\frac{1}{\alpha}\left[F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\gamma}\left[\frac{F(x_{1,2}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))}{F(x_2(\cdot)) - F(x_0(\cdot))}(\alpha + \gamma) - \alpha\right]\int_0^1 K_1(s_1)\,ds_1\right\} \times$$

$$\times \left\{F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) + F(x_{1,2}(\cdot, \xi)) - 2F(x_0(\cdot))\right\}^{-1},$$

$$\int_0^1 K_1(s_1)\,ds_1 = \frac{1}{\alpha}\left[F(x_1(\cdot)) - F(x_0(\cdot))\right],$$

$$K_1(\xi) = -\frac{1}{\alpha}\frac{d}{d\xi}\left[F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) - F(x_0(\cdot))\right]\left[1 - \alpha\int_0^\xi K_2(s_2)\,ds_2\right].$$

Якщо $x(s)$, $x_0(s)$ є тотожними сталими, то з попередніх формул одержимо дріб Тіле у формі (3).

У загальному випадку приходимо до інтегрального рівняння

$$K_2(\xi)\left[F(x_{0,1}(\cdot, \xi)) - F(x_{1,2}(\cdot, \xi))\right] -$$

$$-\int_0^\xi [x_0(s_2) - x_1(s_2)]K_2(s_2)ds_2\, a_{0,1}(\xi) +$$

$$+\int_\xi^1 [x_2(s_2) - x_1(s_2)]K_2(s_2)ds_2\, a_{1,2}(\xi) = a_{0,1}(\xi) - a_{1,2}(\xi), \quad (11)$$

де

$$a_{i-1,i}(\xi) = \frac{\dfrac{d}{d\xi} F(x_{i-1,i}(\cdot,\xi))}{x_i(\xi) - x_{i-1}(\xi)}, \qquad i = 1,2.$$

розв'язок якого в явному вигляді знайти не вдається. Введемо позначення

$$K(\xi, s_2) = [F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_{1,2}(\cdot,\xi))]^{-1} \begin{cases} [x_0(s_2) - x_1(s_2)]a_{0,1}(\xi), & s_2 \le \xi, \\ [x_2(s_2) - x_1(s_2)]a_{1,2}(\xi), & s_2 > \xi, \end{cases}$$

$$f(\xi) = [F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_{1,2}(\cdot,\xi))]^{-1}[a_{0,1}(\xi) - a_{1,2}(\xi)],$$

$$\bar{K}(\xi, s_2) = [F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_{1,2}(\cdot,\xi))]K(\xi, s_2),$$

$$\bar{f}(\xi) = [F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_{1,2}(\cdot,\xi))]f(\xi).$$

Користуючись відомими результатами [5, с. 167], можемо стверджувати наступне. Для того щоб інтегральне рівняння (11) мало єдиний розв'язок, достатньо, щоб виконувались умови

$$\int_0^1\int_0^1 [K(\xi, s_2)]^2\, ds_2\, d\xi < 1, \qquad f(\xi) \in L^2(0,1).$$

Якщо функція $F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_{1,2}(\cdot,\xi))$ має прості нулі у скінченній кількості точок з інтервалу (0,1), тоді рівняння (11) відноситься до класу інтегральних рівнянь третього роду і умови його розв'язності (теореми типу Фредгольма) наведено в [9].

Після знаходження розв'язку рівняння (11) вираз для ядра $K_1(\xi)$ визначається за формулою

$$K_1(\xi) = -\frac{1}{x_1(\xi) - x_0(\xi)} \frac{d}{d\xi}\left\{\left[1 + \int_0^{\xi} [x_0(s_2) - x_1(s_2)]K_2(s_2)\, ds_2\right] \times \right.$$
$$\left. \times [F(x_{0,1}(\cdot,\xi)) - F(x_{1,2}(\cdot,\xi))]\right\}.$$

Цим завершуємо побудову дробу (5) при $n = 2$ з двома континуальними інтерполяційними вузлами

$$x_{i-1,i}(s,\xi) = x_{i-1}(s) + H(s-\xi)[x_i(s) - x_{i-1}(s)], \qquad i = 1,2.$$

Наведемо деякі міркування стосовно граничного переходу у формулі (5) з метою одержання ІЛД типу Тіле − Ерміта і зробимо це на прикладі часткового випадку дробу (4). Нехай

$$x_1(s) = x_0(s) + \alpha, \qquad x_2(s) = x_0(s) + 2\alpha.$$

Тоді для всіх $x(s)$, для яких $x(s) - x_0(s) \equiv \text{const}$, існує границя дробу (4), коли $\alpha \to 0$, і вона є такою:

$$T_2^E(x(\cdot)) = F(x_0(\cdot)) + \cfrac{(x(0) - x_0(0))F'(x_0(\cdot))}{1 - \cfrac{(x(0) - x_0(0))F''(x_0(\cdot))}{2[F'(x_0(\cdot))]}}. \tag{12}$$

Неважко перевірити, що дріб (12) дійсно має трикратний інтерполяційний вузол $x_0(s)$.

У загальному випадку граничного переходу із (6), коли $\alpha \to 0$ і за інтерполяційні вузли вибрано $x_i(s) = x_0(s) + i\alpha$, $i = 1,2,\ldots,n$, можна одержати формулу типу Тіле − Тейлора аналогічно до відповідної формули Тіле − Тейлора (3.42) з [6, с. 48]. Технічно набагато складніше за допомогою граничного переходу з (5) одержати формулу типу Тіле − Ерміта з довільними кратностями інтерполяційних вузлів. При цьому теоретичних труднощів не виникає.

Зауваження 1. Якщо покласти у (5) $x_i(s) \equiv \text{const}$, $x(s) \equiv \text{const}$, то одержимо звичайний інтерполяційний ЛД, який не містить обернених різниць, що може бути корисним у застосуваннях. Разом з тим, після деяких перетворень інтерполяційний ЛД набуває вигляду дробу Тіле.

1. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
2. *Макаров В. Л., Демків І. І.* Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів // Доп. НАН України. – 2008. – № 11. – С. 17–23.
3. *Макаров В. Л., Демків І. І., Михальчук Б. Р.* Інтегральний ланцюговий дріб – аналог формули Тейлора // Доп. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 25–31.
4. *Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І.* Функціональні поліноми Ерміта в просторі $Q[0,1]$ // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 21–25.
5. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир, 1979. – 588 с.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящехся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
7. *Gensane Th.* Interpolation on the hypersphere with Thiele type rational interpolants // Numer. Algorithms. – 2012. – **60**, No. 3. – P. 523–529.
8. *Levrie P., Bultheel A.* A note on Thiele n-fractions // Numer. Algorithms. – 1993. – **4**, No. 2. – P. 225–239.
9. *Sukavanam N. A.* Fredholm-type theory for third-kind linear integral equations // J. Math. Anal. Appl. – 1984. – **100**, No. 2. – P. 478–485.
10. *Tan J., Fang Y.* Newton – Thiele's rational interpolants // Numer. Algorithms. – 2000. –**24**, No. 1. – P. 141–157.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ЦЕПНАЯ ДРОБЬ ТИПА ТИЛЕ

Известные результаты по интерполяции функции одной переменной с помощью дроби Тиле – Эрмита с произвольной кратностью каждого из интерполяционных узлов обобщаются для функционала, который действует из пространства кусочно-непрерывных функций с конечным числом разрывов первого рода. На множестве интерполяционных узлов, один из которых континуальный, получена интерполяционная интегральная дробь типа Тиле. Указан конструктивный подход к построению интерполяционной интегральной дроби типа Тиле, когда все интерполяционные узлы являются континуальными. Этот случай является важным для уравновешивания информации, используемой при построении интерполянта, и его интерполяционными свойствами.

INTERPOLATING INTEGRAL CONTINUED FRACTION OF THILE TYPE

The known results on interpolation of one variable functions by means of Thiele – Hermit fraction with arbitrary multiplicity of each interpolation nodes are generalized to the case of functional which operating in the space of piecewise continuous functions with finite number of discontinuities of the first kind. On the set of interpolation nodes, one of which is continual, interpolation integral fraction of Thiele type is obtained. The constructive approach to interpolation integral fraction of Thiele type construction, when all interpolation nodes are continual, is specified. This case is important for the balance of the information used to construct the interpolant and its interpolation properties.

[1] Ін-т математики НАН України, Київ,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
27.05.14