УДК 539.3

Д. М. Лила[1], А. А. Мартынюк[2]

ЭКСЦЕНТРИЧНАЯ ФОРМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО СТУПЕНЧАТОГО КРУГОВОГО ДИСКА

Предложен способ исследования методом малого параметра возможной потери устойчивости вращающегося радиально неоднородного ступенчатого кругового диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно найдены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Введение. Метод линеаризации по малому параметру в теории упругопластического тела [12] относит возмущенное состояние к первоначальным координатам. Постановка Лейбензона – Ишлинского [14, 17] в теории устойчивости трехмерных твердых тел [4–6] также предполагает, что компоненты возмущенного состояния $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}$ относятся к первоначальным координатам. Поэтому решения упругопластических задач [1, 10, 13, 15, 26, 31] могут быть использованы в теории устойчивости (и наоборот).

Введением малого параметра, характеризующего различие между плоским и осесимметричным состояниями, в работах [9, 11] впервые решены задачи об исчерпании несущей способности быстровращающихся сплошных плоских круговых дисков [3, 8, 16, 23–25, 29, 30] в частном случае возмущения контурной окружности и возможной потере устойчивости дисков из несжимаемого материала. Предложенный способ определения критических параметров был уточнен и развит в работах [21, 22, 28 и др.], где малому гармоническому по полярному углу возмущению подлежала контурная окружность диска с произвольным коэффициентом Пуассона. Развитию неустойчивости кольцевого кругового диска, нагруженного внутренним радиальным давлением, посвящена статья [22]. Ступенчатые кольцевые диски, нагруженные по внутреннему и внешнему контурах в срединной плоскости, рассмотрены в работах [20, 28 и др.]. На основе этих исследований сделана попытка применения метода разложения [3, 8] для расчета неустойчивости кольцевых дисков произвольного профиля [28]. Также указан способ учета геометрических особенностей, физических свойств и характера нагружения при получении характеристических уравнений [12] для упругопластических составных плоских дисков [18, 19, 21, 27]. В ряде работ [20 и др.] изучена самоуравновешенная форма потери устойчивости нагруженных радиально неоднородных кольцевых ступенчатых дисков. Интерес представляет приложение метода возмущений [7, 12] к решению задачи о возможной потери устойчивости по эксцентричной форме вращающегося радиально неоднородного кругового ступенчатого диска.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является быстровращающийся радиально неоднородный по материалу ступенчатый сплошной круговой диск $\mathcal{D}$. Диск $\mathcal{D}$ выполнен в виде единого целого диска путем жесткого соединения однородного и изотропного сплошного кругового диска $\mathcal{D}_1$ радиуса r_1 и однородных изотропных кольцевых дисков $\mathcal{D}_2,\ldots,\mathcal{D}_{n_0}$ с внешними радиусами $r_2,\ldots,r_{n_0} = b$ соответственно. Предел текучести материала кольцевых секций $\mathcal{D}_j$, $j=1,\ldots,n_0$, обозначим через σ_{sj}, модуль упругости – через E_j, плотность – через γ_j, коэффициент Пуассона – через ν_j, постоянную угловую скорость вращения – через ω, текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска – r_0.

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2015. – 58, № 4. – С. 47-57.

Предмет исследования составляет механизм и характерные критические величины эксцентричной формы потери устойчивости диска $\mathcal{D}$, когда уравнение его границы в срединной плоскости, являющейся плоскостью симметрии диска, с точностью до бесконечно малых первого порядка представлено в виде

$$r = b + d\cos\theta, \qquad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta\cos\theta, \tag{1}$$

где $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус, θ – полярный угол, δ – малый параметр. Внутренняя круговая область $0 \le r < r_{0*}$ диска $\mathcal{D}$ пластическая, тогда как внешняя его область в момент потери устойчивости пребывает в упругом состоянии. Предполагается, что максимальная из толщин $2h_1, \ldots, 2h_{n_0}$ секций $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{n_0}$ мала по сравнению с остальными размерами диска $\mathcal{D}$. Наличие распределенной по контуру диска радиальной нагрузки $p_e = p_{e0} + \tilde{p}_e$ будем считать результатом определенных усилий, действующих на диск в его срединной плоскости. Здесь слагаемое p_{e0} имеет постоянную величину, а слагаемое $\tilde{p}_e$, равное нулю при $\omega = 0$, отображает изменение контурных нагрузок в динамике. Такая постановка соответствует, к примеру, диску, по ободу которого смонтированы с обжатием лопатки, и учету при их вращении растягивающего действия.

Требуется для формы границы диска, описываемой зависимостью (1), получить в первом приближении характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega_*$. Напомним [12], что для этого нужно установить условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений

$$\sigma'_{rr} + \frac{d\sigma^0_{rr}}{dr}u' = 0, \qquad \sigma'_{r\theta} - \frac{\sigma^0_{\theta\theta} - \sigma^0_{rr}}{b}\frac{du'}{d\theta} = 0, \qquad r = b,$$

$$\sigma'_{rr} = 0, \qquad \sigma'_{r\theta} = 0, \qquad r = r_0,$$

относительно произвольных постоянных, входящих в выражения для компонент напряжений и перемещений σ'_{rr}, $\sigma'_{r\theta}$ и u', определяющих возмущенное плоское напряженно-деформированное состояние вращающегося диска $\mathcal{D}$. Указанные линеаризованные возмущения первого порядка малости удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями [7] в частных производных, тогда как невозмущенное напряженное состояние (с верхним индексом «0») определено обыкновенными дифференциальными уравнениями квазистатического равновесия [2] и уравнениями связи в упругой зоне или условием текучести Сен-Венана – в пластической зоне.

2. Вспомогательные результаты. Невозмущенное плоское напряженное состояние радиально неоднородного ступенчатого кругового диска $\mathcal{D}$ с упругопластической границей в дисковой секции $\mathcal{D}_j$, $j \in \{1, \ldots, n_0\}$, можно получить в виде (см., например, [20, 28])

$$\sigma^{0p}_{rr} = \begin{cases} \Sigma_1 - 8\Gamma_1 y\rho^2, & \rho \in [0, \rho_1), \\ \Sigma_2 - 8\Gamma_2 y\rho^2 + C_2\rho^{-1}, & \rho \in (\rho_1, \rho_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ \Sigma_j - 8\Gamma_j y\rho^2 + C_j\rho^{-1}, & \rho \in (\rho_{j-1}, \beta_0), \end{cases} \tag{2}$$

$$\sigma_{rr}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j}\rho^{-2} - \alpha'_j\rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2} - \alpha'_{j+1}\rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2} - \alpha'_{n_0}\rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}], \end{cases} \tag{3}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j}\rho^{-2} - \beta'_j\rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2} - \beta'_{j+1}\rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\ \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2} - \beta'_{n_0}\rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}]. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь все напряжения отнесены к σ_{sn_0}; верхний индекс p указывает на пластическую зону, e − на упругую зону; $\beta_0 = r_0/b$, $\rho_1 = r_1/b$, …, $\rho_{n_0} = r_{n_0}/b$, $y = \gamma_{n_0} b^2\omega^2/(24\sigma_{sn_0})$, $\Sigma_k = \sigma_{sk}/\sigma_{sn_0}$, $\Gamma_k = \gamma_k/\gamma_{n_0}$, $\alpha'_k = 3(\nu_k + 3)\Gamma_k y$, $\beta'_k = 3(3\nu_k + 1)\Gamma_k y$, $k = 1, \ldots, n_0$, а константы $C_2, \ldots, C_j$ и $\tilde{C}_{1,j}, \tilde{C}_{2,j}, \ldots, \tilde{C}_{1,n_0}, \tilde{C}_{2,n_0}$ определяем как решения систем уравнений

$$h_1(\Sigma_1 - 8\Gamma_1\rho_1^2 y) = h_2(\Sigma_2 - 8\Gamma_2\rho_1^2 y + C_2\rho_1^{-1}),$$

$$h_2(\Sigma_2 - 8\Gamma_2\rho_2^2 y + C_2\rho_2^{-1}) = h_3(\Sigma_3 - 8\Gamma_3\rho_2^2 y + C_3\rho_2^{-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$h_{j-1}(\Sigma_{j-1} - 8\Gamma_{j-1}\rho_{j-1}^2 y + C_{j-1}\rho_{j-1}^{-1}) = h_j(\Sigma_j - 8\Gamma_j\rho_{j-1}^2 y + C_j\rho_{j-1}^{-1})$$

и

$$\tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j}x_j = s_j^-, \qquad \tilde{C}_{1,j} - \tilde{C}_{2,j}x_j = t_j^-,$$

$$\tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1} = s_{j+1}^-, \qquad \tilde{C}_{1,j+1} - \tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1} = t_{j+1}^-,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0} = s_{n_0}, \qquad \tilde{C}_{1,n_0} - \tilde{C}_{2,n_0} = t_{n_0}.$$

Здесь $x_j = 1/\rho_j^2$, …, $x_{n_0-1} = 1/\rho_{n_0-1}^2$,

$$y = \frac{\omega^2}{24q^2} = \frac{\dfrac{p_e}{\sigma_{sn_0}} - (SA_{n_0} - S^*B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3)}, \qquad q = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\sigma_{sn_0}}{\gamma_{n_0}}},$$

$$Q = d_0\delta_2\frac{1}{\beta_0} + (1 - 2f_0)(3\nu_j + 1)\Gamma_j\frac{1}{x_0}, \qquad S = d_0\delta_3\frac{1}{\beta_0} + \Sigma_j,$$

$$Q^* = -f_0\delta_2\frac{1}{\beta_0} + (1 + 2d_0)(3\nu_j + 1)\Gamma_j\frac{1}{x_0}, \qquad S^* = -f_0\delta_3\frac{1}{\beta_0} + \Sigma_j,$$

$$d_0 = \frac{x_0 + x_j}{2x_0}, \qquad f_0 = \frac{x_j - x_0}{2x_0}, \qquad x_0 = \frac{1}{\beta_0^2},$$

$$\delta_2 = -\frac{8}{h_j}\sum_{k=1}^{j}(h_{k-1}\Gamma_{k-1} - h_k\Gamma_k)\rho_{k-1}^3, \qquad \delta_3 = \frac{1}{h_j}\sum_{k=1}^{j}(h_{k-1}\Sigma_{k-1} - h_k\Sigma_k)\rho_{k-1},$$

$$h_0 = 0, \qquad \rho_0 = 0, \qquad \Gamma_0 = 0, \qquad \Sigma_0 = 0.$$

Величины $s_j^-, t_j^-, \ldots, s_{n_0-1}^-, t_{n_0-1}^-, s_{n_0}, t_{n_0}$ и A_{n_0}, B_{n_0}, D_{n_0} находим из рекуррентных соотношений

$$s_j^- = Qy + S, \qquad t_j^- = Q^* y + S^*,$$

$$s_{j+1}^- = A_{j+1}s_j^- - B_{j+1}t_j^- + C_{j+1}, \qquad t_{j+1}^- = A_{j+1}^* s_j^- - B_{j+1}^* t_j^- + C_{j+1}^*,$$

$$s_{j+2}^- = A_{j+2}s_j^- - B_{j+2}t_j^- + C_{j+2}, \qquad t_{j+2}^- = A_{j+2}^* s_j^- - B_{j+2}^* t_j^- + C_{j+2}^*,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{n_0} = A_{n_0}s_j^- - B_{n_0}t_j^- + C_{n_0}, \qquad t_{n_0} = A_{n_0}^* s_j^- - B_{n_0}^* t_j^- + C_{n_0}^*.$$

Здесь

$$A_{j+1} = d_j a_j - f_j c_j, \qquad B_{j+1} = f_j e_j, \qquad C_{j+1} = d_j b_j - f_j \ell_j,$$

$$A_{j+1}^* = -f_j a_j + d_j c_j, \qquad B_{j+1}^* = -d_j e_j, \qquad C_{j+1}^* = -f_j b_j + d_j \ell_j,$$

$$A_{j+2} = d_{j+1}a_{j+1}A_{j+1} - f_{j+1}(c_{j+1}A_{j+1} + e_{j+1}A_{j+1}^*),$$

$$B_{j+2} = d_{j+1}a_{j+1}B_{j+1} - f_{j+1}(c_{j+1}B_{j+1} + e_{j+1}B_{j+1}^*),$$

$$C_{j+2} = d_{j+1}(a_{j+1}C_{j+1} + b_{j+1}) - f_{j+1}(c_{j+1}C_{j+1} + e_{j+1}C_{j+1}^* + \ell_{j+1}),$$

$$A_{j+2}^* = -f_{j+1}a_{j+1}A_{j+1} + d_{j+1}(c_{j+1}A_{j+1} + e_{j+1}A_{j+1}^*),$$

$$B_{j+2}^* = -f_{j+1}a_{j+1}B_{j+1} + d_{j+1}(c_{j+1}B_{j+1} + e_{j+1}B_{j+1}^*),$$

$$C_{j+2}^* = -f_{j+1}(a_{j+1}C_{j+1} + b_{j+1}) + d_{j+1}(c_{j+1}C_{j+1} + e_{j+1}C_{j+1}^* + \ell_{j+1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$A_{n_0} = d_{n_0-1}a_{n_0-1}A_{n_0-1} - f_{n_0-1}(c_{n_0-1}A_{n_0-1} + e_{n_0-1}A_{n_0-1}^*),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$C_{n_0}^* = -f_{n_0-1}(a_{n_0-1}C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) + d_{n_0-1}(c_{n_0-1}C_{n_0-1} + e_{n_0-1}C_{n_0-1}^* + \ell_{n_0-1}),$$

$$C_k = D_k y, \qquad k = j+1, \ldots, n_0,$$

$$D_{j+1} = d_j g_j - f_j m_j, \qquad D_{j+1}^* = -f_j g_j + d_j m_j,$$

$$D_{j^*} = d_{j^*-1}\left(a_{j^*-1}D_{j^*-1} + g_{j^*-1}\right) - f_{j^*-1}\left(c_{j^*-1}D_{j^*-1} + e_{j^*-1}D_{j^*-1}^* + m_{j^*-1}\right),$$

$$D_{j^*}^* = -f_{j^*-1}\left(a_{j^*-1}D_{j^*-1} + g_{j^*-1}\right) + d_{j^*-1}\left(c_{j^*-1}D_{j^*-1} + e_{j^*-1}D_{j^*-1}^* + m_{j^*-1}\right),$$

$$j^* = j+2, \ldots, n_0,$$

$$a_k = \frac{h_k}{h_{k+1}}, \qquad b_k = \frac{(\alpha'_{k+1} - a_k \alpha'_k)}{x_k}, \qquad e_k = \frac{E_{k+1}}{E_k},$$

$$c_k = a_k \nu_{k+1} - e_k \nu_k, \qquad d_k = \frac{(x_k + x_{k+1})}{(2x_k)}, \qquad f_k = \frac{(x_{k+1} - x_k)}{(2x_k)},$$

$$\ell_k = \frac{(\beta'_{k+1} - e_k \beta'_k - c_k \alpha'_k)}{x_k}, \qquad g_k = \frac{3\left[(\nu_{k+1} + 3)\Gamma_{k+1} - a_k(\nu_k + 3)\Gamma_k\right]}{x_k},$$

$$m_k = \frac{3\left[(3\nu_{k+1} + 1)\Gamma_{k+1} - e_k(3\nu_k + 1)\Gamma_k - c_k(\nu_k + 3)\Gamma_k\right]}{x_k},$$

$$k = j, \ldots, n_0 - 1.$$

Поэтому (см. (2)–(4))

$$A_1 = \frac{d\sigma_{rr}^{0e}(1)}{d\rho} = [A_{n_0}^* Q - B_{n_0}^* Q^* - 9(\nu_{n_0} + 3)]y - \frac{p_e}{\sigma_{sn_0}} +$$

$$+ [A_{n_0}^* S - B_{n_0}^* S^* + C_{n_0}^*], \tag{5}$$

$$A_2 = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{rr}^{0e}(1) = A_1 + 24y, \tag{6}$$

где

$$\frac{p_e}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_e + \text{æ}_e \gamma_{n_0} b^2 \omega^2 \frac{1}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_e + 24\text{æ}_e \tilde{y},$$

$$\tilde{y} = \frac{\varepsilon_e - (SA_{n_0} - S^* B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^* B_{n_0} + D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3) - 24\text{æ}_e},$$

ε_e и æ_e − заданные коэффициенты.

3. Основной результат. Кроме невозмущенного состояния диска $\mathcal{D}$, приведенного в **п. 2**, необходимо также знать возмущенное состояние внешней упругой области. Отнесенные к σ_{sn_0} возмущения первого порядка малости $\sigma_{rr}'^e$, $\sigma_{\theta\theta}'^e$, $\sigma_{r\theta}'^e$ соответствующих компонент напряжений и отнесенные к b возмущения радиального u'^e и тангенциального v'^e смещений в первом приближении определяются в крайней кольцевой секции $\mathcal{D}_{n_0}$ зависимостями [2]

$$\sigma_{rr}'^e = [a_I(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0} + a_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0-1} + a_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0} +$$
$$+ \Psi_{n_0-1}]\cos\theta,$$

$$\sigma_{\theta\theta}'^e = [b_I(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0} + b_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0-1} + b_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0} +$$
$$+ \Psi_{n_0-1}]\cos\theta,$$

$$\sigma_{r\theta}'^e = [c_I(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0} + c_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Phi_{n_0-1} + c_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho)\Psi_{n_0} +$$
$$+ \Psi_{n_0-1}]\sin\theta,$$

$$u'^e = \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}}[d_I(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0-1} +$$
$$+ d_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Psi_{n_0} + \Psi_{n_0-1}]\cos\theta,$$

$$v'^e = \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}}[e_I(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0} + e_{II}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Phi_{n_0-1} +$$
$$+ e_{III}(\rho_{n_0-1}, \rho, \nu_{n_0})\Psi_{n_0} + \Psi_{n_0-1}]\sin\theta, \tag{7}$$

где $a_I(\cdot), \ldots, e_{III}(\cdot)$ − известные рациональные функции [2], а Φ_{n_0}, Φ_{n_0-1}, Ψ_{n_0} и Ψ_{n_0-1} − неопределенные коэффициенты. Соотношения (7) для следующей кольцевой секции $\mathcal{D}_{n_0-1}$ имеют вид

$$\sigma_{rr}'^e = \left[a_I\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Phi_{n_0-1} + a_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}\right)\Phi_{n_0-2} +\right.$$
$$\left. + a_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Psi_{n_0-1} + \Psi_{n_0-2}\right]\cos\theta,$$

..................................,

$$v'^e = \rho_{n_0-1}\frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0-1}}\left[e_I\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}},\nu_{n_0-1}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Phi_{n_0-1}+\right.$$

$$+e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}},\nu_{n_0-1}\right)\Phi_{n_0-2}+$$

$$\left.+e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}},\nu_{n_0-1}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Psi_{n_0-1}+\Psi_{n_0-2}\right]\sin\theta, \quad (8)$$

где

$$\Phi_{n_0-2} = q_{1,n_0-2}\Phi_{n_0}+q_{2,n_0-2}\Phi_{n_0-1}+q_{3,n_0-2}\Psi_{n_0}+q_{4,n_0-2}\Psi_{n_0-1},$$

$$\Psi_{n_0-2} = q_{5,n_0-2}\Phi_{n_0}+q_{6,n_0-2}\Phi_{n_0-1}+q_{7,n_0-2}\Psi_{n_0}+q_{8,n_0-2}\Psi_{n_0-1},$$

$$q_{1,n_0-2} = \frac{\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}}\left[d_I(\rho_{n_0-1},\rho_{n_0-1},\nu_{n_0})-e_I(\rho_{n_0-1},\rho_{n_0-1},\nu_{n_0})\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$q_{8,n_0-2} = \frac{\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}}\left[\left\{1-\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a^{-1}_{n_0-1}e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\right\}\times\right.$$

$$\times d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)-$$

$$\left.-\left\{1-\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a^{-1}_{n_0-1}d_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\right\}e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\right],$$

$$\Delta_{n_0-2} = e^2_{n_0-1}\rho^2_{n_0-1}\left[d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)-e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\right].$$

Аналоги формул (7) и (8) для всех остальных упругих кольцевых секций $\mathcal{D}_{n_0-(k-1)}$, $k\in\{3,\ldots,n_0-(j-1)\}$ (при $k=n_0-(j-1)$ полагаем $\rho_{n_0-k}:=\beta_0$), записываются следующим образом:

$$\sigma'^e_{rr} = \left[a_I\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\Phi_{n_0-(k-1)}+\right.$$

$$+a_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}\right)\Phi_{n_0-k}+$$

$$\left.+a_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\Psi_{n_0-(k-1)}+\Psi_{n_0-k}\right]\cos\theta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$v'^e = \rho_{n_0-(k-1)}\frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0-(k-1)}}\left[e_I\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}},\nu_{n_0-(k-1)}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\times\right.$$

$$\times\Phi_{n_0-(k-1)}+e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}},\nu_{n_0-(k-1)}\right)\Phi_{n_0-k}+$$

$$+ e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}, \nu_{n_0-(k-1)}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\Psi_{n_0-(k-1)} +$$

$$+ \Psi_{n_0-k}\Bigg]\sin\theta\,, \tag{9}$$

где

$$\Phi_{n_0-k} = q_{1,n_0-k}\Phi_{n_0} + q_{2,n_0-k}\Phi_{n_0-1} + q_{3,n_0-k}\Psi_{n_0} + q_{4,n_0-k}\Psi_{n_0-1}\,,$$

$$\Psi_{n_0-k} = q_{5,n_0-k}\Phi_{n_0} + q_{6,n_0-k}\Phi_{n_0-1} + q_{7,n_0-k}\Psi_{n_0} + q_{8,n_0-k}\Psi_{n_0-1}\,,$$

$$q_{1,n_0-k} = \gamma_{2,n_0-k}q_{1,n_0-(k-1)} + \gamma_{4,n_0-k}q_{5,n_0-(k-1)}\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,$$

$$q_{8,n_0-k} = \gamma_{7,n_0-k} + \gamma_{6,n_0-k}q_{4,n_0-(k-1)} + \gamma_{8,n_0-k}q_{8,n_0-(k-1)}\,,$$

$$\gamma_{1,n_0-k} = \frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}a_{n_0-(k-2)}\Delta_{n_0-k}}\left[d_I\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \nu_{n_0-(k-2)}\right) -\right.$$

$$\left. - e_I\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}, \nu_{n_0-(k-2)}\right)\right],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\,,$$

$$\gamma_{8,n_0-k} = \frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}\Delta_{n_0-k}}\left[\left\{1 - \frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}a_{n_0-(k-1)}}\times\right.\right.$$

$$\left.\times e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)}\right)\right\} d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)}\right) -$$

$$- \left\{1 - \frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}a_{n_0-(k-1)}} d_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)}\right)\right\}\times$$

$$\left.\times e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)}\right)\right],$$

$$\Delta_{n_0-k} = e^2_{n_0-(k-1)}\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}\right)^2\left[d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)}\right) -\right.$$

$$\left. - e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}}, 1, \nu_{n_0-(k-1)}\right)\right].$$

Удовлетворение функциями (7)–(9) граничным условиям [9]

$$\sigma'^{e}_{rr} + A_1 u'^{e} = 0, \qquad \rho = 1\,, \tag{10}$$

$$\sigma'^{e}_{r\theta} - A_2\frac{du'^{e}}{d\theta} = 0, \qquad \rho = 1\,, \tag{11}$$

условию сопряжения [10]

$$\sigma'^{e}_{r\theta} = 0, \qquad \rho = \beta_0\,, \tag{12}$$

и условию уравновешенности контурных нагрузок [11]

$$\Phi_{n_0} - \Psi_{n_0} - \beta_0(\Phi_{j-1} - \Psi_{j-1}) = 0 \tag{13}$$

приводит к системе линейных однородных уравнений относительно коэффициентов Φ_{n_0}, Φ_{n_0-1} и Ψ_{n_0}:

$$\Phi_{n_0} + A_1 \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}} \{ d_I(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0}) \Phi_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0}) \Phi_{n_0-1} +$$

$$+ d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0}) \Psi_{n_0} + [w_1 \Phi_{n_0} +$$

$$+ w_2 \Phi_{n_0-1} + w_3 \Psi_{n_0}]\} = 0,$$

$$\Psi_{n_0} + A_2 \frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}} \{ d_I(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0}) \Phi_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0}) \Phi_{n_0-1} +$$

$$+ d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0}) \Psi_{n_0} + [w_1 \Phi_{n_0} +$$

$$+ w_2 \Phi_{n_0-1} + w_3 \Psi_{n_0}]\} = 0,$$

$$q_{5,j-1} \Phi_{n_0} + q_{6,j-1} \Phi_{n_0-1} + q_{7,j-1} \Psi_{n_0} +$$

$$+ q_{8,j-1}[w_1 \Phi_{n_0} + w_2 \Phi_{n_0-1} + w_3 \Psi_{n_0}] = 0. \tag{14}$$

Здесь

$$w_1 = \frac{1 - \beta_0(q_{1,j-1} - q_{5,j-1})}{\beta_0(q_{4,j-1} - q_{8,j-1})}, \qquad w_2 = -\frac{q_{2,j-1} - q_{6,j-1}}{q_{4,j-1} - q_{8,j-1}},$$

$$w_3 = -\frac{1 + \beta_0(q_{3,j-1} - q_{7,j-1})}{\beta_0(q_{4,j-1} - q_{8,j-1})}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det A(\beta_0) = 0, \tag{15}$$

($A(\beta_0)$ – матрица системы (14) и превращается в тождество $\det A(0) \equiv 0$ (см. [9, 27 и др.]). Соответствующее критическому значению радиуса пластической области $\beta_{0*} = 0$ критическое значение угловой скорости ω_* получаем по формуле

$$\omega_*^2 = \frac{24q^2[\varepsilon_e + 24æ_e \tilde{y} - \Sigma_1(A_{n_0} - B_{n_0})]}{D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3)}, \tag{16}$$

где

$$\tilde{y} = \frac{\varepsilon_e - \Sigma_1(A_{n_0} - B_{n_0})}{D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3) - 24æ_e}$$

и учтено, что $d_0 \to 1/2$, $f_0 \to -1/2$, $Q \to 0$, $Q^* \to 0$, $S \to \Sigma_1$, $S^* \to \Sigma_1$ при $\beta_0 \to 0$.

4. Числовые примеры и обсуждение результатов. Предоставляемая приведенным выше способом исследования неустойчивости возможность учета определяющих физических свойств материала радиально неоднородного ступенчатого диска иллюстрируется характерными критическими значениями из табл. 1. Здесь указана относительная критическая угловая скорость, при которой трехступенчатый диск $\mathcal{D}$ заданного профиля h_k, $k =$

$= 1, 2, 3$, теряет устойчивость по эксцентричной форме при возникновении пластического состояния в центре. Предполагается, что все дисковые секции имеют одинаковую ширину $1/3$. При этом $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\nu_3 = 0.2$, $\Sigma_1 = \Sigma_2 = 1.1$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.9$, $e_1 = 1$, $e_2 = 1.1$, т. е. по физическим свойствам лишь третья секция несколько отличается от двух предыдущих; $\varepsilon_e = 0$, тогда как $æ_e = 0$ либо $æ_e = 1/3$.

Таблица 1

h_k	ω_*/q при $æ_e = 0$	ω_*/q при $æ_e = 1/3$	ω_{0*}/q
$h_1 = \frac{1}{30}$, $h_2 = \frac{5}{60}$, $h_3 = \frac{11}{90}$	1.2633	0.9062	1.1734
$h_1 = \frac{1}{30}$, $h_2 = \frac{2}{30}$, $h_3 = \frac{3}{30}$	1.2647	0.8962	1.1750
$h_1 = \frac{1}{30}$, $h_2 = h_3 = \frac{2}{30}$	1.3834	1.0066	1.2854
$h_1 = h_2 = \frac{1}{30}$, $h_3 = \frac{2}{30}$	1.4283	1.0035	1.3279
$h_1 = h_3 = \frac{1}{30}$, $h_2 = \frac{2}{30}$	1.5996	1.2348	1.4809
$h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{30}$	1.6742	1.2287	1.5569
$h_1 = h_3 = \frac{2}{30}$, $h_2 = \frac{1}{30}$	1.7902	1.2731	1.6653
$h_1 = h_2 = \frac{2}{30}$, $h_3 = \frac{1}{30}$	1.9393	1.5125	1.7953
$h_1 = \frac{2}{30}$, $h_2 = h_3 = \frac{1}{30}$	2.0983	1.5643	1.9501
$h_1 = \frac{1}{10}$, $h_2 = \frac{2}{15}$, $h_3 = \frac{1}{30}$	2.2021	1.7336	2.0372
$h_1 = \frac{1}{10}$, $h_2 = \frac{1}{20}$, $h_3 = \frac{1}{30}$	2.2872	1.7667	2.1199

Для сравнения результатов в последнем столбце табл. 1 приведена критическая скорость ω_{0*}/q свободного от контурных усилий однородного ступенчатого диска с такими же, как и в $\mathcal{D}$, радиусами и толщинами составляющих секций. В пользу метода свидетельсвует появившаяся возможность анализа влияния различий в плотности и параметрах упругости дисковых секций на устойчивость диска.

1. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упруго-пластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 240 с.
2. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика: В 2 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 1. – 900 с.
3. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика: В 2 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1952. – Т. 2. – 640 с.
4. *Гузь А. Н.* Трехмерная теория упругой устойчивости при конечных докритических деформациях // Прикл. механика. – 1972. – **8**, № 12. – С. 25–44.
   То же: *Guz' A. N.* Three-dimensional theory of elastic stability under finite subcritical deformations // Soviet Appl. Mech. – 1972. – **8**, No. 12. – P. 1308–1323.
5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии. – Киев: Наук. думка, 1979. – 143 с.
6. *Гузь А. Н., Бабич И. Ю.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.

7. *Гузь А. Н., Немиш Ю. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Вища шк., 1989. – 352 с.
8. *Демьянушко И. В., Биргер И. А.* Расчет на прочность вращающихся дисков. – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
9. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д.* О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
10. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред: В 2 т. – Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – Москва: Физматлит, 2002. – 448 с.
11. *Ивлев Д. Д.* О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. Отдел. техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
12. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
13. *Ильюшин А. А.* Пластичность: В 2 ч. – Ч. 1: Упруго-пластические деформации. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1948. – 378 с.
14. *Ишлинский А. Ю.* Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. мат. журн. – 1954. – **6**, № 2. – С. 140–146.
15. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. – Москва: Физматлит, 2001. – 704 с.
16. *Кинасошвили Р. С.* Расчет на прочность дисков турбомашин. – Москва: Оборонгиз, 1954. – 144 с.
17. *Лейбензон Л. С.* О применении гармонических функций к вопросу об устойчивости сферической и цилиндрической оболочек // Собр. тр. – Москва: Изд-во АН СССР, 1951. – Т 1. – С. 50–58.
18. *Лила Д. М.* Механизм потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 3. – С. 111–120.
   То же: *Lila D. M.* Mechanism of the loss of stability of a rotating composite plane circular disk // J. Math. Sci. – 2013. – **194**, No. 3. – P. 257–269.
19. *Лила Д. М.* О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кольцевого диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 81–94.
   То же: *Lila D. M.* On the instability of a rotating elastoplastic composite flat annular disk // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, No. 4. – P. 583–601.
20. *Лила Д. М.* Потеря устойчивости вращающегося упругопластического радиально неоднородного ступенчатого кольцевого диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 2. – С. 73–87.
   Те саме: *Lila D. M.* Loss of stability of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous multidiameter annular disk // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, No. 1. – P. 89–109.
21. *Лила Д. М., Мартынюк А. А.* О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 1. – С. 145–158.
   То же: *Lila D. M., Martynyuk A. A.* On instability of a rotating elastoplastic composite plane circular disk // J. Math. Sci. – 2013. – **190,** No. 6. – P. 804–822.
22. *Лила Д. М., Мартынюк А. А.* Развитие неустойчивости вращающегося упругопластического кольцевого диска // Прикл. механика. – 2012. – **48,** № 2. – С. 127–136.
   То же: *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, No. 2. – P. 224–233.
23. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
24. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.
25. *Рабинович В. П.* Прочность турбинных дисков. – Москва: Машиностроение, 1966. – 151 с.
26. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.
27. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: Analytical approach // Appl. Math. – 2012. – **3**, No. 5. – P. 451–456.
28. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // Appl. Math. – 2011. – **2**, No. 5. – P. 579–585.

29. *Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F.* Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks – Part I: Analytical and numerical stability analyses // Eur. J. Mech. **A**/Solid. – 2009. – **28**, No. 1. – P. 36–44.
30. *Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F.* Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II – Burst of a superalloy turbine disk // Eur. J. Mech. **A**/Solid. – 2009. – **28**, No. 3. – P. 428–432.
31. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1934. – 415 p.
То же: *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.

ЕКСЦЕНТРИЧНА ФОРМА ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО РАДІАЛЬНО НЕОДНОРІДНОГО СТУПІНЧАСТОГО КРУГОВОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Запропоновано спосіб дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості радіально неоднорідного ступінчастого кругового диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах диска.

ECCENTRIC FORM OF STABILITY LOSS OF A ROTATING ELASTOPLASTIC RADIALLY INHOMOGENEOUS STEPPED CIRCULAR DISC

A procedure for investigation of possible stability loss by a rotating elastoplastic radially inhomogeneous stepped circular disc by the method of small parameter is proposed. A characteristic equation for the critical radius of the plastic zone is obtained as a first approximation. The values of critical angular rotational velocity for various parameters of the disc are found numerically.

[1] Черкасский нац. ун-т
им. Б. Хмельницкого, Черкассы,
[2] Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
08.10.14