УДК 621.396.01: 519.614

П. О. Савенко✉

ПЕРВИННІ ТА ВІДГАЛУЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ У ЗАДАЧІ ПРО АПРОКСИМАЦІЮ ФІНІТНОЇ ФУНКЦІЇ МОДУЛЕМ ПОДВІЙНОГО ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Досліджується проблема неєдиності розв'язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна, що виникають у задачах апроксимації фінітної функції від двох змінних модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є. Встановлено існування і властивості дійсних (первинних) розв'язків чотирьох типів. Проведено числове дослідження галуження первинних розв'язків другого типу та визначено ефективність дійсних і відгалужених комплексних розв'язків.

Ключові слова: *апроксимація фінітної функції, нелінійні інтегральні рівняння типу Гаммерштейна, нелінійна двопараметрична спектральна задача, неєдиність і галуження розв'язків.*

Вступ. Середньоквадратична апроксимація фінітної невід'ємної функції від двох змінних модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є, залежного від фізичних параметрів, широко використовується при розв'язуванні обернених задач радіофізики, акустики та ін. [9, 11–13, 20]. Подвійне дискретне перетворення Фур'є відіграє центральну роль в розробці ряду алгоритмів обробки сигналів [1, 5, 6, 8, 14]. Зокрема, зображення двовимірної послідовності дискретним перетворенням Фур'є застосовують при дискретній обробці двовимірних сигналів [1, 16–18] (фотографії, зображення тощо). Методи цифрової обробки широко застосовуються при керуванні процесами, автоматизації виявлення об'єктів, розпізнаванні образів і в багатьох інших випадках. Цифрова передача зображень із космічних апаратів, цифрові канали передачі сигналів зображень вимагають забезпечення передачі все більших потоків інформації, що є предметом сучасних досліджень і розробок [[14, 17].

У цій роботі досліджується варіаційна задача про середньоквадратичне наближення дійсної фінітної функції модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є, залежного від двох дійсних фізичних параметрів. Суттєвою особливістю задачі нелінійної апроксимації є неєдиність і галуження розв'язків [2, 7, 11, 12]. З'ясовано існування і властивості дійсних розв'язків чотирьох типів, названих первинними. З ростом фізичних параметрів від дійсних розв'язків відгалужуються комплексні розв'язки, які є більш ефективними порівняно з дійсними. Для знаходження розв'язків чисельними методами задача зведена до знаходження розв'язків нелінійного двовимірного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна [9, 13, 19, 20]. Побудовано й обґрунтовано алгоритми для чисельного знаходження оптимальних розв'язків, наведено числові приклади.

1. Формулювання задачі, основні рівняння та співвідношення.

1.1. Середньоквадратична апроксимація фінітної функції від двох змінних. Не обмежуючи загальності, розглянемо частковий випадок подвійного дискретного ізометричного перетворення Фур'є[1] [15]

$$f(s_1, s_2) = A\boldsymbol{I} \equiv \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2(n)}^{M_2(n)} I_{nm} \exp[i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2)] \qquad (1)$$

як лінійний оператор, що діє з комплексного скінченновимірного простору

✉ posavenko@gmail.com

[1] Вектор $\boldsymbol{I}$ будемо називати вектором спектра або спектральним вектором.

$H_I = \mathbb{C}^{N_2 \times M_2}$, $n = -M_1 \div M_1$, $m = -M_2(n) \div M_2(n)$, де $N_2 = 2N+1$, $M_2 = 2M+1$, у простір комплекснозначних неперервних функцій від двох дійсних змінних, визначених в області

$$\Omega = \{(s_1, s_2) : |s_1| \le \pi/c_1, |s_2| \le \pi/c_2\},$$

c_1, c_2 − деякі дійсні числові параметри, що належать до області

$$\Lambda_c = \{(c_1, c_2) : 0 < c_1 \le a, 0 < c_2 \le b\}.$$

Функція $f(s_1, s_2)$ є $2\pi/c_1$-періодичною за аргументом s_1 і $2\pi/c_2$-періодичною за s_2.

У просторах, що розглядаються, введемо скалярні добутки й породжувані ними норми:

$$(I_1, I_2)_{H_I} = \frac{4\pi^2}{c_1 c_2} \sum_{n=-M_1}^{M_1} \sum_{m=-M_2(n)}^{M_2(n)} I_{nm} \overline{I_{nm}}, \qquad \|I\|_{H_I} = (I_1, I_2)_{H_I}^{1/2}, \tag{2}$$

$$(f_1, f_2)_{C^{(2)}_{(\Omega)}} = \iint_\Omega f_1(s_1, s_2) \overline{f_2(s_1, s_2)}\, ds_1\, ds_2, \qquad \|f\| = (f, f)^{1/2}_{C^{(2)}_{(\Omega)}}. \tag{3}$$

Надалі поповнений простір неперервних функцій $C^{(2)}_{(\Omega)}$ з введеними у ньому скалярним добутком і нормою (3) позначатимемо через $\boldsymbol{C}^{(2)}_{(\Omega)}$ і зазначимо, що його поповнення співпадає з гільбертовим простором $L_2(\Omega)$ [15].

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що справджується рівність

$$\|AI\|^2 = \iint_\Omega |f(s_1, s_2)|^2\, ds_1\, ds_2 = \sum_{n,m} |I_{nm}|^2 = \|I\|^2, \tag{4}$$

звідки випливає, що A − ізометричний оператор.

Використовуючи введені скалярні добутки (2), (3), на підставі співвідношення $(AI, f) = (I, A^* f)$ знаходимо необхідний надалі спряжений оператор

$$A^* f = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_\Omega f(s_1, s_2) \exp[-i(c_1 n s_1 + c_2 m s_2)]\, ds_1\, ds_2,$$

$$n = -M_1 \div M_1, \quad m = -M_2(n) \div M_2(n). \tag{5}$$

Нехай задано фінітну функцію

$$\tilde{F}(s_1, s_2) = \begin{cases} F(s_1, s_2), & (s_1, s_2) \in G \subseteq \Omega, \\ 0, & (s_1, s_2) \in \Omega \setminus G, \end{cases} \tag{6}$$

де $F(s_1, s_2)$ − дійсна невід'ємна у замкненій обмеженій області G функція.

Розглянемо задачу про найкраще середньоквадратичне наближення функції $\tilde{F}(s_1, s_2)$ в області Ω модулем подвійного дискретного перетворення Фур'є (1) за рахунок вибору коефіцієнтів вектора I. Сформулюємо її як задачу мінімізації функціонала

$$\sigma_F(I) = \left\| \tilde{F} - |AI| \right\|^2_{C^{(2)}_{(\Omega)}} \equiv \left\| \tilde{F} - |f| \right\|^2_{C^{(2)}_{(\Omega)}} \tag{7}$$

у просторі $H_I = \mathbb{C}^{N_2 \times M_2}$. Враховуючи рівності (4), (6), функціонал $\sigma_F(I)$ запишемо в спрощеному вигляді:

$$\sigma_F(I) = \|F\|^2_{C^{(2)}_{(\Omega)}} - 2(F, |AI|)^2_{C^{(2)}_{(\Omega)}} + \|I\|^2_{H_I}. \tag{8}$$

З використанням необхідної умови мінімуму функціонала одержуємо нелінійну систему рівнянь відносно компонент вектора I у просторі H_I, яку запишемо у векторній і розгорнутій формах, відповідно:

$$\boldsymbol{I} = A^*\big(F\exp(i\arg A\boldsymbol{I})\big). \tag{9}$$

де оператор A^* є спряженим до оператора A.

Розгорнута форма системи рівнянь (9) має вигляд

$$I_{nm} = \frac{c_1c_2}{4\pi^2}\iint\limits_{\Omega} F(s_1,s_2)\exp\left\{i\arg\left(\sum_{\ell=-M_1}^{M_1}\sum_{j=-M_2(\ell)}^{M_2(\ell)} I_{\ell j}e^{i(c_1\ell s_1+c_2 j s_2)}\right) - \right.$$

$$\left. - i(c_1ns_1 + c_2ms_2)\right\} ds_1\, ds_2\,,$$

$$n = -M_1 \div M_1\,, \quad m = -M_2(n) \div M_2(n)\,. \tag{10}$$

Система рівнянь (10) описує стаціонарні точки функціонала $\sigma_F(\boldsymbol{I})$.

Подіявши на обидві сторони рівняння (10) оператором A, одержуємо еквівалентне до (10) нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна відносно функції f:

$$f(Q) = \boldsymbol{B}f \equiv \iint\limits_{G} F(Q')K(Q,Q',\mathbf{c})e^{i\arg f(Q')}\,dQ'\,, \tag{11}$$

де

$$Q = (s_1,s_2),\quad dQ = ds_1ds_2,\quad Q' = (s_1',s_2'),\quad dQ' = ds_1'ds_2',\quad \mathbf{c} = (c_1,c_2)\,,$$

$$K\big(Q,Q',\mathbf{c}\big) = \frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\,\frac{\sin\left(\left(\dfrac{2M_2(0)+1}{2}\right)c_2(s_2-s_2')\right)}{\sin\left(\dfrac{c_2}{2}(s_2-s_2')\right)} +$$

$$+\,2\,\frac{c_1c_2}{(2\pi)^2}\sum_{n=0}^{M_1}\cos\big(nc_1(s_1-s_1')\big)\frac{\sin\left(\left(\dfrac{2M_2(n)+1}{2}\right)c_2(s_2-s_2')\right)}{\sin\left(\dfrac{c_2}{2}(s_2-s_2')\right)}. \tag{12}$$

У випадку, коли $M_2(n) = \mathrm{const}$, то $N = N_1$, $N_2 = 2M_2+1$, а ядро (12) набуває вигляду

$$K(Q,Q',c_1,c_2) = \frac{c_1c_2}{4\pi^2}\,\frac{\sin\left(N_1\dfrac{c_1}{2}(s_1-s_1')\right)}{\sin\left(\dfrac{c_1}{2}(s_1-s_1')\right)}\cdot\frac{\sin\left(N_2\dfrac{c_2}{2}(s_2-s_2')\right)}{\sin\left(\dfrac{c_2}{2}(s_2-s_2')\right)}. \tag{13}$$

Ядра (12), (13) у рівнянні (11) є дійсними й виродженими.

Між розв'язками рівнянь (9) і (11) існує взаємно однозначна відповідність [9]: якщо $\boldsymbol{I}_*$ − розв'язок рівняння (9), то $f_* = A\boldsymbol{I}_*$ − розв'язок (11) і, навпаки, якщо f_* − розв'язок рівняння (11), то

$$\boldsymbol{I}_* = A^*\big(F\exp(i\arg(f_*)\big) \tag{14}$$

є розв'язком рівняння (9).

З огляду на еквівалентність рівнянь (9) і (11), будемо досліджувати простіше рівняння (11). Рівняння (9) є складнішим у тому сенсі, що воно містить у правій частині оператор A в показнику експоненти.

Комплексний простір $\boldsymbol{C}(G)$ будемо розглядати як пряму суму [15] двох дійсних просторів неперервних в області G функцій $\boldsymbol{C}(G) = C(G)\oplus C(G)$, елементи якого подаються у вигляді $f = (u, v)^{\top} \in \boldsymbol{C}(G)$, де $u = \operatorname{Re} f \in C(G)$, $v = \operatorname{Im} f \in C(G)$. Введемо норми в цих просторах:

$$\|u\|_{C(G)} = \max_{Q \in G} |u(Q)|,$$

$$\|v\|_{C(G)} = \max_{Q \in G} |v(Q)|,$$

$$\|f\|_{\boldsymbol{C}(G)} = \max\left\{\|u\|_{C(G)}, \|v\|_{C(G)}\right\}.$$

Рівняння (11) в декомлексифікованому просторі $\boldsymbol{C}(G)$ зводиться до еквівалентної йому системи нелінійних рівнянь:

$$u(Q) = B_1(u, v) \equiv \iint_G K(Q, Q', \mathbf{c}) F(Q') \frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} \, dQ',$$

$$v(Q) = B_2(u, v) \equiv \iint_G K(Q, Q', \mathbf{c}) F(Q') \frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}} \, dQ'. \tag{15}$$

Для спрощення викладок розглянемо рівняння (9), (11) для часткового випадку, коли у формулі (1) $M_2(n) = \text{const}$, тобто $N_1 = 2M_1 + 1$, $N_2 = 2M_2 + 1$, а $N = (2M_1 + 1) \times (2M_2 + 1)$.

1.2. Існування та властивості дійсних (первинних) розв'язків. Легко переконатися, що одним із розв'язків рівняння (11) у класі дійсних функцій є інтеграл

$$f_0(Q, \mathbf{c}) = \iint_G F(Q') K(Q, Q', \mathbf{c}) \, dQ', \tag{16}$$

який надалі будемо називати *первинним* розв'язком першого типу.

Розглянемо оператор

$$Tf \equiv \iint_G K(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q') \, dQ'$$

і відповідну йому квадратичну форму

$$(Tf, f) = \iint_G \iint_G K(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q') \, dQ' \overline{f(Q)} \, dQ.$$

Оскільки

$$(Tf, f) = \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \iint_S \left| \iint_G f(Q) \exp(i\mathbf{c}(P, Q)) \, dQ \right|^2 dx \, dy > 0,$$

то з цієї нерівності випливає, що ядро $K(Q, Q', \mathbf{c})$ є додатним [3]. Отже, оператор T також є додатним на конусі $\mathcal{K}$ невід'ємних функцій простору $C(G)$ [4]. Згідно з цим оператор T залишає інваріантним конус $\mathcal{K}$, тобто $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$, а розв'язок $f_0(Q, \mathbf{c})$ невід'ємний.

Розглянемо частковий випадок, коли область G має дві осі симетрії. Безпосередньою перевіркою переконуємось, що, крім первинного розв'язку першого типу, існують два *первинні розв'язки другого типу*

$$f_1(s_1, s_2, \mathbf{c}) = \iint_G F(t_1, t_2) K(s_1, s_2, t_1, t_2, \mathbf{c}) \operatorname{sgn}\left(t_1 - t_1^{(0)}\right) dt_1 \, dt_2, \tag{17}$$

$$f_2(s_1, s_2, \mathbf{c}) = \iint_G F(t_1, t_2) K(s_1, s_2, t_1, t_2, \mathbf{c}) \operatorname{sgn}\left(t_2 - t_2^{(0)}\right) dt_1 \, dt_2, \tag{18}$$

причому $t_1^{(0)}, t_2^{(0)} \in G$.

Суттєвою відмінністю розв'язків $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$, $f_2(s_1, s_2, \mathbf{c})$ від розв'язку $f_0(Q, \mathbf{c})$ є наявність відповідних множин нульових значень у цих розв'язках в області їх визначення. Зокрема, якщо область G має дві осі симетрії, то ці множини є прямими лініями. Це породжує особливість в одержаних нижче лінійних однорідних інтегральних рівняннях на знаходження ліній галуження.

Поряд з розв'язками першого і другого типу існує ще розв'язок

$$f_3(s_1, s_2, \mathbf{c}) = \iint_G F(t_1, t_2) K(s_1, s_2, t_1, t_2, \mathbf{c}) \operatorname{sgn}(t_1) \operatorname{sgn}(t_2)\, dt_1\, dt_2\,, \tag{19}$$

який назвемо *первинним розв'язком третього типу*.

Застосовуючи правило Лопіталя, нескладно показати, що розв'язок $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$ у точках $(0, s_2, \mathbf{c})$ і розв'язок $f_2(s_1, s_2, \mathbf{c})$ у точках $(s_1, 0, \mathbf{c})$ (при фіксованих інших відповідних параметрах) мають нулі першого порядку. Первинний розв'язок третього типу $f_3(s_1, s_2, \mathbf{c})$ у точці $(0, 0, \mathbf{c})$ має нуль другого порядку.

2. Чисельно-аналітичне дослідження галуження первинного розв'язку другого типу.

2.1. Рівняння на множину точок можливого галуження. Для знаходження ліній галуження і комплексних розв'язків системи рівнянь (15), що відгалужуються від дійсного розв'язку $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$, розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$ і всіх відмінних від $f_1(s_1, s_2, \mathbf{c})$ розв'язків системи (15), які при $\left|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}\right| \to 0$ задовольняють умови

$$\max_{(s_1, s_2) \in G} \left| u(s_1, s_2, \mathbf{c}) - f_1\left(s_1, s_2, \mathbf{c}^{(0)}\right) \right| \to 0, \qquad \max_{(s_1, s_2) \in G} \left| v(s_1, s_2, \mathbf{c}) \right| \to 0\,. \tag{20}$$

Ці умови означають, що необхідно знайти такі малі за модулем неперервні на G розв'язки системи (15)

$$w(s_1, s_2, c_1, c_2) = u(s_1, s_2, \mathbf{c}) - f_1\left(s_1, s_2, \mathbf{c}^{(0)}\right),$$

$$\omega(s_1, s_2, \mathbf{c}) = v(s_1, s_2, \mathbf{c})\,, \tag{21}$$

які рівномірно збігаються на G до нуля при $\mathbf{c} \to \mathbf{c}^{(0)}$. При цьому необхідно враховувати також напрямок прямування вектора $\mathbf{c}$ до вектора $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right)$. Покладемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \qquad c_2 = c_2^{(0)} + \nu\,, \tag{22}$$

а шукані розв'язки, враховуючи наявність множини нульових значень у первинному розв'язку $f_1\left(s_1, s_2, \mathbf{c}^{(0)}\right)$, знаходимо у вигляді

$$u(s_1, s_2, \mathbf{c}) = f_1\left(s_1, s_2, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) + s_1 x(s_1, s_2, \mu, \nu)\,,$$

$$v(s_1, s_2, \mathbf{c}) = s_1 y(s_1, s_2, \mu, \nu)\,. \tag{23}$$

З рівностей (23) і умови (20) випливає, що[2]

$$w(s) = s_1\, x(s_1, s_2)\big|_{s_1 = 0} = 0, \qquad \omega(s_1, s_2) = s_1\, y(s_1, s_2)\big|_{s_1 = 0} = 0\,. \tag{24}$$

Після підстановки (23) у систему рівнянь (15) підінтегральні функції Φ_1, Φ_2 набувають вигляду

---

[2] Тут і надалі для скорочення запису у функціях $x(s_1, s_2, \mu, \nu)$, $y(s_1, s_2, \mu, \nu)$ опущено їх залежність від параметра μ при збереженні тих самих позначень.

$$\Phi_1\left[s_1, s_2, s_1', s_2', c_1^{(\ell)} + \mu,\ c_2^{(\ell)} + \nu,\ f_1(s_1', s_2', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)}) + w(s_1', s_2'),\ \omega(s_1', s_2')\right] =$$

$$= F(Q')K(Q, Q', c_1^{(\ell)} + \mu, c_2^{(\ell)} + \nu) \times$$

$$\times \frac{f_1(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)}) + s_1'\, x(Q')}{\left|f_1(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})\right| \sqrt{1 + \dfrac{2s_1'\, x(Q')}{f_1(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})} + \dfrac{(s_1')^2 (x^2(Q') + y^2(Q'))}{f_1^2(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})}}}, \quad (25)$$

$$\Phi_2\left[s_1, s_2, s_1', s_2', c_1^{(\ell)} + \mu,\ c_2^{(\ell)} + \nu,\ f_1(s_1', s_2', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)}) + w(s_1', s_2'),\ \omega(s_1', s_2')\right] =$$

$$= F(Q')K(Q, Q', c_1^{(\ell)} + \mu, c_2^{(\ell)} + \nu) \times$$

$$\times \frac{s_1'\, x(Q')}{\left|f_1(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})\right| \sqrt{1 + \dfrac{2s_1' x(Q')}{f_1(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})} + \dfrac{(s_1')^2 (x^2(Q') + y^2(Q'))}{f_1^2(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})}}}. \quad (26)$$

Достатньою умовою для розвинення функцій Φ_1, Φ_2 у рівномірно збіжні на G степеневі ряди за $x(Q)$, $y(Q)$, μ, ν є виконання нерівності [9, 13]

$$\max_{(s_1, s_2)\in G} \left| \frac{2s_1\, x(Q)}{f_1(Q, c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})} + \frac{s_1^2 (x^2(Q) + y^2(Q))}{f_1^2(Q, c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)})} \right| = \delta < 1. \quad (27)$$

Оскільки при $s_1 = 0$ величина $s_1/f_1(s_1, s_2, \mathbf{c}) = \text{const} \neq 0$, то на підставі умови (27) існують такі сумісні радіуси збіжності ρ_x, ρ_y, ρ_μ, ρ_ν, що при $\|x\|_{C(G)} \leq \rho_x$, $\|y\|_{C(G)} \leq \rho_y$ і $|\nu| \leq \rho_\nu$, $|\mu| \leq \rho_\mu$ розвинення функцій Φ_1, Φ_2 у ряди в околі точок $(c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)}, f_1(Q, c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)}), 0, 0)$ записуються так:

$$\Phi_1\left[Q, Q', c_1^{(\ell)} + \mu, c_2^{(\ell)} + \nu, f_1(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)}) + w(Q'), \omega(Q')\right] =$$

$$= \sum_{m+n+p+q\geq 0}^{\infty} A_{mnpq}(Q, Q', \mathbf{c}^{\ell}) x^m(Q') y^n(Q') \mu^p \nu^q,$$

$$\Phi_2\left[Q, Q', c_1^{(\ell)} + \mu, c_2^{(\ell)} + \nu, f_1(Q', c_1^{(\ell)}, c_2^{(\ell)}) + w(Q'), \omega(Q')\right] =$$

$$= \sum_{m+n+p+q\geq 0}^{\infty} B_{mnpq}(Q, Q', \mathbf{c}^{\ell}) x^m(Q') y^n(Q') \mu^p \nu^q. \quad (28)$$

Підставимо вирази (28) в систему (15). Припускаючи, що функція $F(t_1, t_2)$ має в області G лише одну нульову лінію при $t_1 = 0$, аналогічно, як у [2], одержуємо систему нелінійних інтегральних рівнянь типу Ляпунова – Шмідта:

$$w(Q) = a_{10}(Q, \mathbf{c}^{(0)})\mu + a_{01}(Q, \mathbf{c}^{(0)})\nu +$$

$$+ \sum_{m+n+p+q\geq 2} \mu^p \nu^q \iint_G A_{mnpq}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q') dQ', \quad (29)$$

$$\omega(Q) - \iint_G \tilde{F}(Q') K(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) \frac{\omega(Q')}{f_1(Q', \mathbf{c}^{(0)})} dQ' =$$

$$= \sum_{m+n+p+q\geq 2} \mu^p \nu^q \iint_G B_{mnpq}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)}) w^m(Q') \omega^n(Q')\, dQ', \quad (30)$$

де

$$\tilde{F}(t_1, t_2) = F(t_1, t_2)\operatorname{sgn}(t_1),$$

$$a_{10}(Q, \mathbf{c}^{(0)}) = \iint\limits_G A_{0010}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)})\, dQ',$$

$$a_{01}(Q, \mathbf{c}^{(0)}) = \iint\limits_G A_{0001}(Q, Q', \mathbf{c}^{(0)})\, dQ'.$$

На підставі нелінійного рівняння (30), згідно з [2, 13], одержуємо лінійне однорідне інтегральне рівняння на множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}_c$ можливого галуження розв'язків системи рівнянь (15):

$$\varphi(s_1, s_2) = T(c_1, c_2)\varphi \equiv$$

$$\equiv \iint\limits_G \frac{F(t_1, t_2)\operatorname{sgn}(t_1)}{f_1(t_1, t_2, c_1, c_2)} K(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2)\varphi(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2, \quad (31)$$

де

$$K(s_1, s_2, t_1, t_2, c_1, c_2) = \frac{\sin\left(N_1 \frac{c_1}{2}(s_1 - t_1)\right)}{\sin\left(\frac{c_1}{2}(s_1 - t_1)\right)} \cdot \frac{\sin\left(N_2 \frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)}{\sin\left(\frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)}.$$

Зауважимо, що рівняння (31) є *нелінійною двопараметричною спектральною задачею* [10, 13]

$$\mathcal{A}_M(c_1, c_2)\mathbf{x} \equiv (I - T(c_1, c_2))\mathbf{x} = 0 \quad (32)$$

на знаходження множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}_c$, при яких можливе відгалуження від дійсного розв'язку $f_1(t_1, t_2, c_1, c_2)$ комплексних розв'язків. Задача полягає у тому, щоб знайти власні значення і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E$ ($x^{(0)} \neq 0$) такі, що $\mathcal{A}(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})x^{(0)} = 0$.

Зауважимо, що застосування аналітичної теорії галуження [2] до системи рівнянь (15) дозволяє, зокрема, знаходити відгалужені розв'язки у першому наближенні, що дає можливість визначити їх якісні властивості й використовувати їх при чисельному знаходженні розв'язків. Суттєву роль при цьому відіграє рівняння (31), яке дає можливість визначити власні значення і власні функції, які використовуються при побудові відгалужених розв'язків.

2.2. Власні функції рівняння (31) у перших точках галуження. Покладемо, що параметри c_1, c_2 належать до області

$$\mathbf{\Lambda}_c = \{(c_1, c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c : 0 < c_1 \le a_1,\ 0 < c_2 \le a_2\}. \quad (33)$$

Легко переконатись, що однією із власних функцій рівняння (31) при будь-яких значеннях параметрів $(c_1, c_2) \in \mathbf{\Lambda}_c$ є функція (17), яка набуває вигляду

$$\varphi_1(s_1, s_2, c_1, c_2) = f_1(s_1, s_2, c_1, c_2) \equiv \frac{c_1 c_2}{4\pi^2} \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} F(t_1, t_2)\operatorname{sgn}(t_1) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(N_1 \frac{c_1}{2}(s_1 - t_1)\right)}{\sin\left(\frac{c_1}{2}(s_1 - t_1)\right)} \cdot \frac{\sin\left(N_2 \frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)}{\sin\left(\frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)} dt_1\, dt_2. \quad (34)$$

Для знаходження власних функцій рівняння (31), відмінних від (34), виконаємо наступні перетворення. Спочатку виконаємо в (31) заміну $\chi(t_1, t_2) = \varphi(t_1, t_2)/f_1(t_1, t_2, c_1, c_2)$. Тоді $\varphi(t_1, t_2) = \chi(t_1, t_2) f_1(t_1, t_2, c_1, c_2)$, і на підставі (31) з урахуванням (34) одержуємо рівняння відносно функції $\chi(t_1, t_2)$:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\,\mathrm{sgn}\,(t_1) K(s_1,s_2,t_1,t_2,c_1,c_2)\,\chi(s_1,s_2)\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\mathrm{sgn}\,(t_1) K(s_1,s_2,t_1,t_2,c_1,c_2)\chi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2\,. \quad (35)$$

Якщо $\chi(t_1, t_2)$ є розв'язком цього рівняння, отримуємо тотожність

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\,\mathrm{sgn}\,(t_1) \frac{\sin\left(N_1 \frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)}{\sin\left(\frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)} \cdot \frac{\sin\left(N_2 \frac{c_2}{2}(s_2-t_2)\right)}{\sin\left(\frac{c_2}{2}(s_2-t_2)\right)} \times$$

$$\times\left[\chi(s_1,s_2)-\chi(t_1,t_2)\right] dt_1\,dt_2 \equiv 0\,. \quad (36)$$

Проінтегрувавши (36) за змінними s_1, s_2, одержуємо рівність

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2)\mathrm{sgn}\,(t_1) \frac{\sin\left(N_1 \frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)}{\sin\left(\frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)} \cdot \frac{\sin\left(N_2 \frac{c_2}{2}(s_2-t_2)\right)}{\sin\left(\frac{c_2}{2}(s_2-t_2)\right)} \times$$

$$\times\left[\chi(s_1,s_2)-\chi(t_1,t_2)\right] dt_1\,dt_2\,ds_1\,ds_2 = 0\,. \quad (37)$$

Зазначимо, що (37) є необхідною, а тотожність (36) − достатньою умовами для того, щоб функція

$$\varphi(t_1,t_2) = \chi(t_1,t_2) f_1(t_1,t_2,c_1,c_2) \quad (38)$$

була власною функцією рівняння (31).

Покажемо, що у випадку парної за обома аргументами функції $F(t_1, t_2)$ рівняння (31) має спектральні лінії, що належать до області $\mathbf{\Lambda}_c$, яким (крім власної функції (34)) відповідає власна функція

$$\varphi_2(s_1,s_2) = \mathrm{tg}\left(\frac{c_1 s_1}{2}\right)\cdot f_1(s_1,s_2,c_1,c_2)\,, \quad (39)$$

тобто $\chi(s_1,s_2)=\mathrm{tg}\left(\frac{c_1 s_1}{2}\right)$. Підставляючи цей вираз у рівність (37), одержуємо

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(\frac{Nc_1 s_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{Nc_1 s_1}{2}\right)} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2) \frac{\cos\left(\frac{Nc_1 t_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c_1 t_1}{2}\right)} \times$$

$$\times\,\mathrm{sgn}\,(t_1) \frac{\sin\left(N_1 \frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)}{\sin\left(\frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)} dt_2\,dt_1\,ds_2\,ds_1 -$$

$$-\int_{-1}^{1} \frac{\cos\left(N \frac{c_1 s_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c_1 s_1}{2}\right)} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1,t_2) \frac{\sin\left(N \frac{c_1 t_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c_1 t_1}{2}\right)} \times$$

$$\times\,\mathrm{sgn}\,(t_1) \frac{\sin\left(N_1 \frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)}{\sin\left(\frac{c_1}{2}(s_1-t_1)\right)} dt_2\,dt_1\,ds_2\,ds_1 = 0\,.$$

Оскільки $\sin(Nc_1 s_1/2)$ і $\cos(Nc_1 s_1/2)$ – непарна й парна функції, відповідно, то для перетворення останнього виразу у тотожність необхідно, щоб при $|s_2| \le 1$ для параметрів c_1, c_2 справджувалась така рівність:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(\frac{Nc_1 t_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{c_1 t_1}{2}\right)} \operatorname{sgn}(t_1) \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \frac{\sin\left(N_2 \frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)}{\sin\left(\frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)} dt_2\, ds_2\, dt_1 = 0\,. \quad (40)$$

Розглянемо рівність (40). Легко переконатись, що функція

$$f_{0,2}(t_1, s_2) = \int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \frac{\sin\left(N_2 \frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)}{\sin\left(\frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)} dt_2 \quad (41)$$

є парною за обома аргументами. Отже, як рівняння на знаходження множини власних значень (c_1, c_2), що не співпадає зі всією областю $\mathbf{\Lambda}_c$, будемо розглядати рівність (40), яка повинна справджуватись при $|s_2| \le 1$.

Таким чином, для знаходження множини власних значень $\left(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\right) \in$ $\in \mathbf{\Lambda}_c$, що відповідають власним функціям вигляду (39), рівняння (31) розглядаємо як рівняння, задане функцією

$$\Phi(c_1, c_2) \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(\frac{Nc_1 t_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{Nc_1 t_1}{2}\right)} \operatorname{sgn}(t_1) \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(N_2 \frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)}{\sin\left(\frac{c_2}{2}(s_2 - t_2)\right)} dt_2\, ds_2\, dt_1 = 0\,, \quad (42)$$

на знаходження неявно заданих функцій $c_2 = c_2(c_1)$ або $c_1 = c_1(c_2)$ (спектральних ліній), точки яких є двократними власними значеннями рівняння (31), яким відповідають власні функції (34), (39). У першому випадку маємо таку задачі Коші [9, 10, 13]:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial\Phi_1(c_1, c_1)/\partial c_1}{\partial\Phi_2(c_1, c_1)/\partial c_2}, \qquad c_2\left(c_1^{(0)}\right) = c_2^{(0)}\,. \quad (43)$$

Для знаходження початкових умов розв'язуємо допоміжну нелінійну однопараметричну задачу на промені $(c_2 = \beta c_1) \in \mathbf{\Lambda}_c$, тобто знаходимо корені рівняння

$$\tilde{\Phi}(c_1, c_2) \equiv \int_{-1}^{1} \frac{\sin\left(\frac{Nc_1 t_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{Nc_1 t_1}{2}\right)} \operatorname{sgn}(t_1) \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(t_1, t_2) \times$$

$$\times \frac{\sin\left(N_2 \frac{\beta c_1}{2}(s_2 - t_2)\right)}{\sin\left(\frac{\beta c_1}{2}(s_2 - t_2)\right)} dt_1\, dt_2\, ds_2 = 0\,, \quad (44)$$

використовуючи відомі чисельні методи.

Розв'язки задачі Коші (43) для функції $F(t_1,t_2)=|\sin(\pi t_1)|\cos\left(\pi t_2/2\right)$, які належать до області Λ_c, наведено на рис. 1 у вигляді прямих ліній.

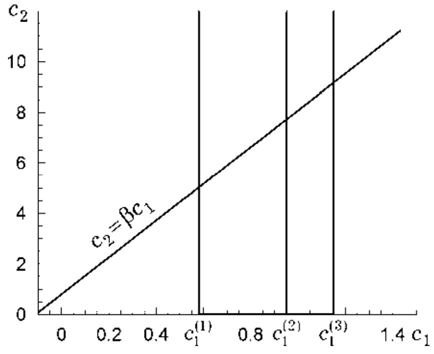


Рис. 1

Отже, власне значення $\left(c_1^{(1)},c_2^{(1)}\right)=\left(c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)$ є двократним, йому відповідають дві власні функції (34), (39). Це означає, що маємо двовимірний випадок галуження розв'язків системи нелінійних рівнянь (21). Застосовуючи методи теорії галуження, аналогічно, як у випадку апроксимації фінітної функції неперервним перетворенням Фур'є [11, 12], знаходимо, що в точці $\mathbf{c}_1^{(1)}=\left(c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)$ від первинного розв'язку $f_1\left(Q,\mathbf{c}_1^{(1)}\right)$ відгалужуються два комплексно-спряжені розв'язки системи (15), які у першому наближенні мають вигляд

$$
\begin{aligned}
f_{1,2}^{(1)}(s_1,s_2,c_1,\beta c_1) &= f_1\left(s_1,s_2,c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)+\\
&+\left[a\left(s_1,s_2,c_1^{(0)},\beta c_1^{(0)}\right)+\alpha_{020}^{(1)}\left(s_1,s_2,c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)h_1^2\right]\mu\pm\\
&\pm i\frac{\varphi_2\left(s_1,s_2,c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)}{\left\|\varphi_2\left(s_1,s_2,c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)\right\|}h_1\mu^{1/2}+O\left(\mu^{3/2}\right),
\end{aligned}
\tag{45}
$$

де $\left[a\left(s_1,s_2,c_1^{(0)},\beta c_1^{(0)}\right)+\alpha_{020}^{(1)}\left(s_1,s_2,c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)h_1^2\right]$ – функції, що описують доповнення до дійсної частини відгалуженого розв'язку, які зберігають той самий тип парності за аргументами s_1, s_2, що і функція $f_1\left(s_1,s_2,c_1^{(1)},\beta c_1^{(1)}\right)$. Уявна частина відгалужених розв'язків, згідно з (39), є непарною функцією за аргументом s_1 і парною за аргументом s_2.

2.3. Чисельне знаходження первинних і відгалужених розв'язків.

2.3.1. Для знаходження розв'язків системи рівнянь (21) застосуємо ітераційний процес

$$
u_{n+1}(Q)=B_1(u_n,v_n)\equiv\iint_{\Omega}F(Q')K_{\mathrm{ar}}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{u_n(Q')}{\sqrt{u_n^2(Q')+v_n^2(Q')}}\,dQ',
$$

$$
v_{n+1}(Q)=B_2(u_n,v_n)\equiv\iint_{\Omega}F(Q')K_{\mathrm{ar}}(Q,Q',\mathbf{c})\frac{v_n(Q')}{\sqrt{u_n^2(Q')+v_n^2(Q')}}\,dQ',
$$

$$
n=0,1,2,\ldots, \tag{46}
$$

в основу якого покладено метод послідовних наближень [9, 20]. Позначимо через $\{\boldsymbol{I}_n\}$ послідовність векторів спектра, яку отримуємо за формулою (14), підставляючи у цю формулу функцію $\arg f_n(Q)=\mathrm{arctg}\left(v_n(Q)/u_n(Q)\right)$, отриману на основі послідовних наближень (46).

Для послідовності $\{\boldsymbol{I}_n\}$ справджується

Теорема 1 [9]. *Послідовність* $\{\boldsymbol{I}_n\}$, *яка генерується ітераційним процесом* (46), *є релаксаційною для функціонала* $\sigma_F(\boldsymbol{I})$, *а значення яких він набуває на* $\{\boldsymbol{I}_n\}$, *утворюють збіжну числову послідовність* $\{\sigma_F(\boldsymbol{I}_n)\}$.

При проведенні ітераційного процесу (46) у випадку парної за обома аргументами фінітної функції $F(s_1, s_2)$ і симетричної області G доцільно використати властивість інваріантності інтегральних операторів $B_1(u, v)$, $B_2(u, v)$ в системі (15) залежно від типу парності функцій $u(s_1, s_2)$, $v(s_1, s_2)$. Функції u, v, які мають певний тип парності за відповідними аргументами, належать до відповідних інваріантних множин U_{ij}, $V_{k\ell}$ простору $\boldsymbol{C}(G)$, де індекси i, j, k, ℓ набувають значення 0 або 1. Зокрема, якщо $u(s_1, s_2) \in U_{01}$, тоді $u(-s_1, s_2) = u(s_1, s_2)$, а $u(s_1, -s_2) = -u(s_1, s_2)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що виконуються такі включення:

$$B_1(U_{ij} \cup V_{k\ell}) \subset U_{ij}, \qquad B_2(U_{ij} \cup V_{k\ell}) \subset V_{k\ell},$$

$$\boldsymbol{B}(U_{ij} \cup V_{k\ell}) \subset U_{ij} \cup V_{k\ell}.$$

Із цих співвідношень випливає можливість існування нерухомих точок оператора $\boldsymbol{B} = \{B_1, B_2\}$, що належать до відповідної інваріантної множини, тобто розв'язків системи (15) і відповідно − рівняння (11). Наведені властивості відгалужених розв'язків у першому наближенні та властивості інваріантності інтегральних операторів використовуємо, зокрема, при виборі початкового наближення, залежно від якого ітераційний процес буде збігатися до розв'язку відповідного типу.

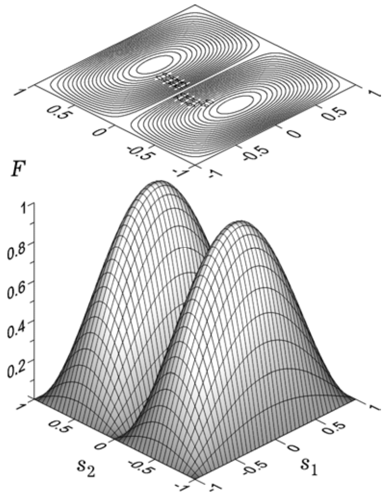


Рис. 2

2.3.2. Розглянемо числові приклади розв'язування задач апроксимації фінітної функції $F(s_1, s_2) = \cos\left(\frac{\pi s_1}{2}\right)|\sin(\pi s_2)|$ (рис 2), яка є парною функцією за обома аргументами, при $N = (2M_1 + 1) \times (2M_2 + 1) = 11 \times 11$.

На рис. 3 подано значення функціонала σ_F, яких він набуває на різних типах розв'язків, залежно від зміни параметрів $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ на промені $c_2 = 0.8c_1$. Крива ***1*** відповідає первинному розв'язку $f_0(s_1, s_2)$, крива ***2*** −

розв'язку з властивістю $\arg f(s_1,-s_2) = -\arg f(s_1,s_2)$, крива ***3*** – розв'язку з властивістю $\arg f(-s_1,s_2) = -\arg f(s_1,s_2)$, крива ***4*** – розв'язку з властивістю: $\arg f(-s_1,s_2) = -\arg f(s_1,s_2)$, $\arg f(s_1,-s_2) = -\arg f(s_1,s_2)$.

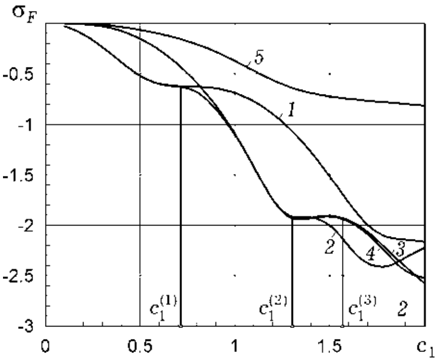
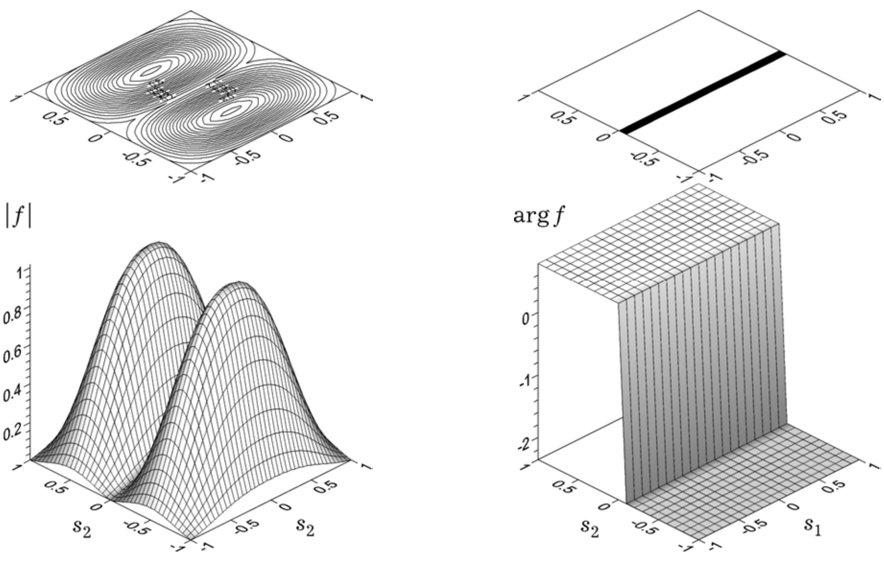


Рис. 3. Значення функціонала $\sigma_F(\boldsymbol{I})$ на розв'язках різних типів.

На рисунку бачимо, що найменшого значення функціонал набуває на розв'язку з непарною за аргументом s_2 фазовою характеристикою, цей розв'язок є найбільш ефективним. Вертикальними лініями на цьому рисунку показано значення параметра $c_1^{(i)}$, $i = 1,2,3$, при яких відбувається розгалуження розв'язків. Ці точки відповідають точкам перетину променя $c_2 = 0.8c_1$ зі спектральними лініями, наведеними на рис. 1.

На рис. 4 при $c_1 = 1.6$, $c_2 = 1.2$ наведено амплітуду (рис. 4***а***) і фазову характеристику (рис. 4***б***) апроксимуючої функції, що відповідає першому первинному розв'язку другого типу. Фазова характеристика $\arg f$ є непарною функцією за аргументом s_2.



а) ***б***)

Рис. 4. Перший первинний розв'язок другого типу: ***а***) – амплітуда апроксимуючої функції; ***б***) – її фазова характеристика.

На рис. 5 при тих самих значеннях параметрів $c_1 = 1.6$, $c_2 = 1.2$ наведено амплітудну характеристику другого первинного розв'язку другого типу. Бачимо, що розв'язок $f_2(s_1, s_2, \mathbf{c})$ має множину нульових значень за аргументом при $s_2 = 0$ в області його визначення. З огляду на цю властивість в результаті апроксимації одержано амплітуду апроксимуючої функції у вигляді чотирьох пелюсток.

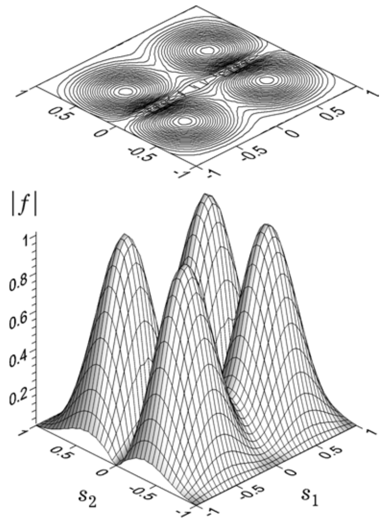
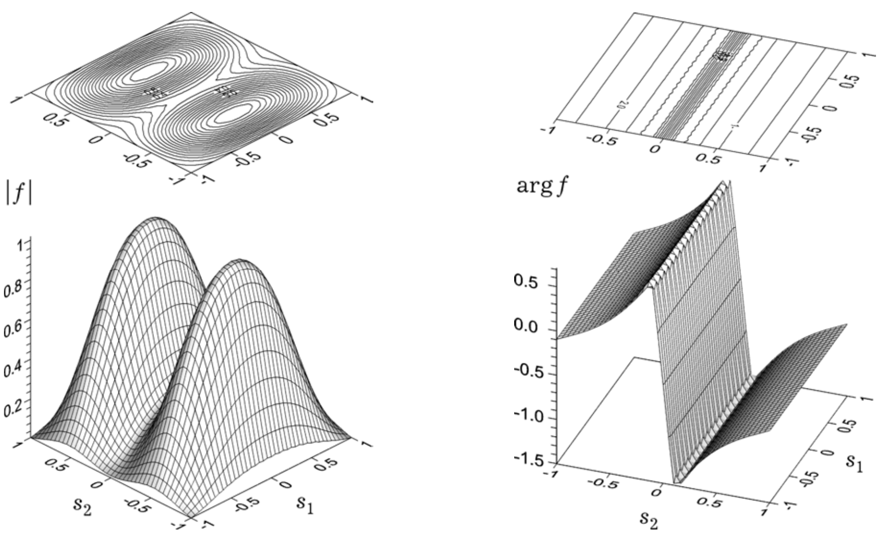


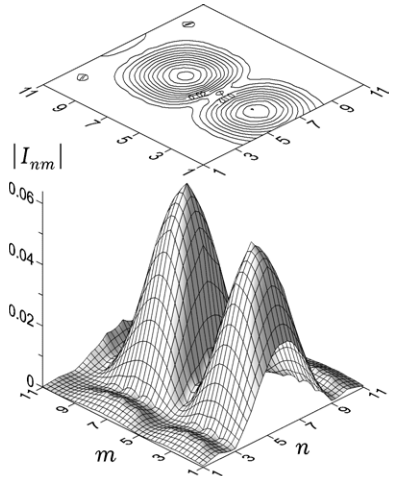
Рис. 5. Амплітуда другого первинного розв'язку другого типу.

На рис. 6 наведено результат апроксимації функції $F(s_1, s_2) = \cos\left(\frac{\pi s_1}{2}\right)|\sin(\pi s_2)|$ з властивістю $\arg f(-s_1, s_2) = -\arg f(s_1, s_2)$. На рис. 7 наведено амплітудний спектр, що відповідає цьому розв'язку. Бачимо, що амплітудний спектр є несиметричним відносно площини Oyz, хоча амплітуда апроксимуючої функції, яка створюється цим спектром, є симетричною відносно Oyz.



а) ***б***)

Рис. 6. ***а***) – амплітуда апроксимуючої фінітної функції;
б) – непарна фазова характеристика.



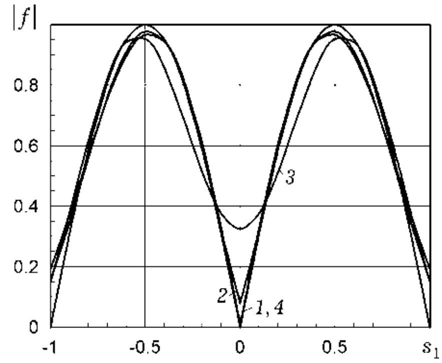


Рис. 7. Амплітудний спектр.

Рис. 8

Для порівняння амплітуд апроксимуючих функцій, що відповідають різним типам розв'язків рівняння (11), на рис. 8 наведено відповідні їм криві в перерізі $s_1 \equiv 0$. Крива ***1*** відповідає заданій фінітній функції, ***2*** – розв'язку, що відгалузився, ***3*** – первинному розв'язку. Очевидно, що відгалужений розв'язок краще наближає задану фінітну функцію.

Висновки. Наявність неєдиності розв'язків у задачах апроксимації дійсних фінітних функцій модулем дискретного подвійного перетворенням Фур'є дає можливість вибрати найбільш ефективний розв'язок, який має простішу фізичну реалізацію. Із аналізу числових результатів випливає, що первинні *розв'язки другого типу та відгалужені від них розв'язки є ефективними* для апроксимації таких фінітних функцій, які в області їх визначення на деяких прямих мають множини нульових значень.

Наведені у цій роботі результати досліджень можна застосовувати до задач синтезу плоских антенних решіток [9].

1. *Блейхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. – Москва: Мир, 1989. – 448 с.
   Те саме: *Blahut R. E.* Fast algorithms for signal processing. – Reading: Addison Wesley, 1985. – xiv+441p. – https://doi.org/10.1017/CBO9780511760921.
2. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 527 с.
3. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. и др.* Интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 448 с.
4. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
5. *Лайонс Р.* Цифровая обработка сигналов. – Москва: Бином, 2006. – 656 с.
6. *Методы компьютерной* обработки изображений / Под ред. В. А. Сойфера. – Москва: Физматлит, 2003. – 784 с.
7. *Процах Л. П., Савенко П. О., Ткач М. Д.* Галуження розв'язків задачі середньоквадратичної апроксимації дійсної фінітної функції від двох змінних модулем подвійного перетворення Фур'є // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 3. – С. 60–73.
   Те саме: *Protsakh L. P., Savenko P. O., Tkach M. D.* Branching of solutions for the problem of mean-square approximation of a real finite function of two variables by the modulus of double Fourier transformation // J. Math. Sci. – 2012. – **180**, No. 1. – P. 51–67.
8. *Рабинер Л. Р., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. – Москва: Мир, 1978. – 848 с.
   Те саме: *Rabiner L. R., Gould B.* Theory and application of digital signal processing. – Englewood Cliffs: Prentice Hall Inc., 1975. – 762 p.

9. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2014. – 314 с.
10. *Савенко П. А., Процах Л. П.* Метод неявной функции в решении двумерной нелинейной спектральной проблемы // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 41–44.
    Те саме: *Savenko P. A., Protsakh L. P.* Implicit function method in solving a two-dimensional nonlinear spectral problem // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2007. – **51**, No. 11. – P. 40–43. – https://doi.org/10.3103/S1066369X07110060.
11. *Савенко П. О., Процах Л. П., Ткач М. Д.* Про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної невід'ємної фінітної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 1. – С. 53–64.
    Те саме: *Savenko P. O., Protsakh L. P., Tkach M. D.* On the best mean-square approximation of a real nonnegative finite continuous function of two variables by the modulus of a double Fourier integral. I // J. Math. Sci. – 2009. – **160**, No. 3. – P. 343–356. – https://doi.org/10.1007/s10958-009-9502-3.
12. *Савенко П. О., Процах Л. П., Ткач М. Д.* Про найкраще середньоквадратичне наближення дійсної невід'ємної фінітної неперервної функції від двох змінних модулем подвійного інтеграла Фур'є. II // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51,** № 4. – С. 80–85.
    Те саме: *Savenko P. O., Protsakh L. P., Tkach M. D.* On the best mean-square approximation of a real nonnegative finite continuous function of two variables by the modulus of a double Fourier integral. II // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 1. – P. 89–95. – https://doi.org/10.1007/s10958-010-9904-2.
13. *Савенко П. О., Ткач М. Д.* Дослідження галуження розв'язків задач синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом за заданою амплітудною діаграмою напрямленості // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60,** № 2. – С. 14–31.
    Те саме: *Savenko P. O., Tkach M. D.* Investigation of the branching of solutions of the problems of synthesis of radiating systems with flat aperture according to a given amplitude directivity pattern // J. Math. Sci. – 2019. – **243**, No. 1. – P. 11–33. – https://doi.org/10.1007/s10958-019-04522-4.
14. *Сергиенко А. Б.* Цифровая обработка сигналов. – Санкт-Петербург: Питер, 2003. – 606 с.
15. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
16. *Hallinan P. L., Gordon G. G., Yuille A. L., Giblin P., Mumford D.* Two- and three-dimensional patterns of the face. – Natick: A. K. Peters Ltd., 1999. – xii+260 p.
17. *Mathematical morphology* and its application to image and signal processing / Eds. J. Goutsias, L. Vincent, D. S. Bloomberg. – Boston: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 456 p.
18. *Ritter G. X., Wilson J. N.* Handbook of computer vision algorithms in image algebra. – Boca Raton, etc.: CRC Press, 2001. – 425 p.
19. *Savenko P.* Computational methods in the theory of synthesis of radio and acoustic radiating systems // Appl. Math. – 2013. – **4**, No. 3. – P. 523–549.
20. *Savenko P., Tkach M.* Numerical approximation of real finite nonnegative function by the modulus of discrete Fourier transform // Appl. Math. – 2010. – **1**, No. 1. – P. 41–51.

PRIMARY AND BRANCHED SOLUTIONS IN THE PROBLEM OF APPROXIMATION OF THE FINITE FUNCTION BY MODULUS OF DOUBLE DISCRETE FOURIER TRANSFORM

The problem of nonuniqueness of solutions of one class of non-linear integral equations of the Hammerstein type, arising in problems of approximation of a finite function of two variables by the modulus of a double discrete Fourier transform, is investigated. The existence and properties of real (primary) solutions of four types are established. A numerical study of the branching of the primary solutions of the second type is carried out and the efficiency of real and branched complex solutions is determined.

Keywords: *approximation of a finite function, nonlinear integral equations of Hammerstein type, nonlinear two-parameter spectral problem, nonuniqueness and branching of solutions.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
02.10.21