

ДИНАМІЧНА РЕАКЦІЯ ПОПЕРЕДНЬО НАГРІТИХ ПРЯМОКУТНИХ ПЛАСТИН І ПАНЕЛЕЙ НА УДАРНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Розглядається задача знаходження динамічної реакції на ударний імпульс попередньо навантажених внаслідок нагріву прямокутних пластин. Наведено постановку задач про визначення динамічних характеристик пружних елементів конструкцій при моделюванні їх за теорією пластин і тривимірного пружного тіла. Побудовано аналітичний розв'язок динамічної задачі для попередньо напружених внаслідок нагріву прямокутних пластин при шарнірному опиранні по двох протилежних краях і довільних граничних умовах на решті границь. Проаналізовано вплив температури на динамічні характеристики пластин. За допомогою обчислювального експерименту в тривимірній постановці досліджено задачу реакції на удар попередньо нагрітої плоскої прямокутної панелі при двосторонньому та всесторонньому зацеленні.

Ключові слова: теплообмін, термпружність, пластини, оперті пластини, зацелені пластини, динамічна реакція.

Вступ. Прямокутні пластини є одними з найважливіших елементів конструкцій в різних галузях машинобудування, будівництва та електроніки. Задачі динаміки тонких пластин розглядалися у багатьох роботах, починаючи з класичної роботи Лява [9]. Класичні задачі статичної прямокутних пластин і знаходження частот їхніх власних коливань увійшли у підручники та довідники [5, 10]. В останні роки продовжуються дослідження динаміки пластин експериментальними та числовими методами [1, 8], ускладненими моделями матеріалів пластин та взаємодії з іншими фізико-механічними полями [3, 6–8]. Істотний вплив температури на власні частоти коливань прямокутних пластинок встановлено в [2, 7]. У [7] також проаналізовано вплив залежності від температури фізико-механічних характеристик матеріалу пластинки, який виявився меншим, ніж вплив температурних напружень. В основному дослідження проводилися для гармонічних коливань або здійснювався пошук частот власних коливань. Пластина найчастіше описувалася рівняннями Кірхгофа при обмеженнях на типи граничних умов. Дослідження аналогічних задач при інших можливих варіантах граничних умов чи складніших моделях пластин потребує використання числових методів. Останнім часом при моделюванні інженерних конструкцій використовують засоби скінченно-елементного аналізу задач фізики та інженерії з можливостями моделювання зв'язаних (мультифізичних) задач (типу COMSOL Multiphysics, Elmer тощо).

У роботі розглядається задача динамічної реакції прямокутної пластини, попередньо навантаженої в площині внаслідок нагріву, на удар, нормальний до її поверхні.

1. Формулювання задачі. Розглянемо прямокутну пластинку розміром $a_1 \times a_2$ у декартовій системі координат $x_1 O x_2$ з початком в одному з кутів пластини. Вважаємо, що приріст температури T пластини і вектор переміщень у площині пластини $\bar{u} = (u_1, u_2)$ задовольняють рівняння плоскої незв'язаної задачі статичної термпружності [4]

$$\Delta u_i + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

$$\Delta T + \frac{1}{\lambda_q} Q - \frac{2\alpha_n}{\lambda_q h} T = 0, \quad (1)$$

✉ nadiyahor@gmail.com

де λ_q , α – коефіцієнти теплопровідності та лінійного теплового розширення матеріалу пластини, Q – потужність джерел тепла в пластині, α_n – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні пластини, h – товщина пластини,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа.

Задачу термомпружності (1) розглядаємо при заданих граничних умовах щодо компонент тензора напружень чи переміщень, а також приросту T .

При кріпленні пластини на неподатливих опорах в її площині виникають зусилля N_{ij} , $i, j = 1, 2$:

$$N_{ij} = \sigma_{ij}h = \frac{hE}{1-\nu^2} \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \left(\nu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) - (1-\nu)\alpha T \right) \delta_{ij} \right],$$

де E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона, δ_{ij} – символ Кронекера.

При дії зусиль N_{ij} прогин $w(x_1, x_2, t)$ пластинки в наближенні Кірхгофа задовольняє рівняння [5]:

$$D\Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(N_{11} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(N_{12} \frac{\partial w}{\partial x_1} + N_{22} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right), \quad (2)$$

де ρ – густина, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини.

Розв'язок рівняння (2) шукаємо в області $0 < x_i < a_i$ при заданні початкових умов для прогину $w(x_1, x_2, 0)$ та швидкості $\frac{\partial w(x_1, x_2, 0)}{\partial t}$, а також двох граничних умов на кожній з границь $x_i = 0$, $x_i = a_i$.

При кріпленні пластини на неподатливих опорах і рівномірному прогріві до температури T після закріплення при $x_i = 0$ та $x_i = a_i$ вздовж осей Ox_i діють зусилля $N_{ii} = -E\alpha hT$ та $N_{12} = 0$.

Прийmemo, що пластинка зазнає кінематичного збудження перпендикулярно до її площини за рахунок ударного зміщення опор за законом $W(t)$ або дії ударного прискорення $A(t) = \ddot{W}(t)$. Тоді рівняння (2) її поперечних деформацій набуває вигляду

$$D\Delta^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E\alpha hT\Delta w = \rho h A(t). \quad (3)$$

Обмежимося розглядом одного з найзагальніших, з практичної точки зору, варіанту граничних умов, який допускає аналітичний розв'язок задачі [5]. Вважаємо, що пластинка шарнірно опирається на двох краях по осі Ox_1 , тобто на границях $x_1 = 0$ і $x_1 = a_1$ виконуються граничні умови відсутності переміщення і моменту:

$$w \Big|_{x_1=0} = w \Big|_{x_1=a_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \Big|_{x_1=a_1} = 0. \quad (4)$$

Граничні умови на інших двох сторонах пластин по осі Ox_2 – довільні лінійні оператори відносно прогину.

Розглянемо постановку задачі у *тривимірному випадку* [10]. Нехай ε_{ij}^0 – тензор деформації початкових напружень. Підстановка в рівняння руху закону Гука з урахуванням наявності початкових деформацій

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) + \lambda\delta_{ij}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

приводить до системи рівнянь Ляме у переміщеннях:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu)u_{j,ji} + X_i - \rho\ddot{u}_i = 2\mu\varepsilon_{ij}^0 + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{ij}^0.$$

При однорідному нагріві пластини, зацмленої по краях, ненульові компоненти тензора початкових деформацій мають вигляд

$$\varepsilon_{ii}^0 = -\alpha T, \quad i = 1, 2.$$

Цю систему рівнянь потрібно розв'язувати при класичних початкових і граничних умовах теорії пружності.

2. Побудова розв'язку за теорією пластин. Розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді розкладу за власними формами коливань

$$W_{mn}(x_1, x_2) = \sin \frac{\pi m x_1}{a_1} g_n(x_2) \quad (5)$$

однорідного гармонічного рівняння згинних коливань

$$D\Delta^2 w + E\alpha h\Delta w = \rho h\omega^2 w, \quad (6)$$

де ω – кругова частота гармонічних коливань.

Підставивши вираз (5) у рівняння (6), отримуємо задачу на власні значення для функції $g_n(x_2)$, звідки

$$g_n(x_2) = C_1 \operatorname{sh}(k_1 x_2) + C_2 \operatorname{ch}(k_1 x_2) + C_3 \sin(k_2 x_2) + C_4 \cos(k_2 x_2), \quad (7)$$

де

$$k_i^2 = \sqrt{\frac{\rho h}{D}\omega^2 + \left(\frac{E\alpha h T}{2D}\right)^2} - (-1)^i \left(\frac{\pi m}{a_1}\right)^2 + (-1)^i \frac{E\alpha h T}{2D}.$$

Власні функції (5) задовольняють граничні умови опирання (4), а підстановка в лінійні граничні умови при $x_2 = 0$ і $x_2 = a_2$ дає можливість визначити константи C_j , $j = 1, \dots, 4$, і власні частоти. Зокрема, наприклад, при шарнірному опиранні по всіх сторонах з (5) та (7) отримуємо

$$k_2 = \frac{\pi n}{a_2}, \quad C_1 = C_2 = C_4 = 0,$$

$$W_{mn}(x_1, x_2) = \sin \frac{\pi m x_1}{a_1} \sin \frac{\pi n x_2}{a_2},$$

$$\frac{\rho h}{D}\omega_{mn}^2 = \left[\left(\frac{\pi m}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{a_2}\right)^2 \right]^2 - \left[\left(\frac{\pi m}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{a_2}\right)^2 \right] \frac{E\alpha h T}{D},$$

тобто власні функції і власні частоти співпадають з відомими [5].

Розв'язок рівняння (3) шукаємо у вигляді розкладу за власними функціями $W_{mn}(x_1, x_2)$:

$$w(x_1, x_2, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn}(t) W_{mn}(x_1, x_2). \quad (8)$$

Тут функція $\varphi_{mn}(t)$ задовольняє рівняння

$$\ddot{\varphi}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 \varphi_{mn}(t) = A(t) \frac{Q_{mn}}{M_{mn}},$$

де

$$M_{mn} = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} [W_{mn}(x_1, x_2)]^2 dx_2 dx_1,$$

$$Q_{mn} = \int_0^{a_1} \int_0^{a_2} W_{mn}(x_1, x_2) dx_2 dx_1,$$

розв'язок якого при нульових початкових умовах має вигляд

$$\varphi_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \frac{Q_{mn}}{M_{mn}} \int_0^t A(\xi) \sin[\omega_{mn}(t - \xi)] d\xi. \quad (9)$$

У цьому розв'язку вираз $\frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t A(\xi) \sin[\omega_{mn}(t - \xi)] d\xi$ є реакцією одно-масової системи з власною частотою ω_{mn} на ударний імпульс $A(t)$. Наприклад, для напівсинусоїдального імпульсу $A(t) = [H(t) - H(t - \pi/b)] \sin(bt)$ з умовною частотою b та тривалістю $\tau = \pi/b$ ($H(t)$ – одинична функція Гевісайда) маємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t A(\xi) \sin[\omega_{mn}(t - \xi)] d\xi &= \\ &= [H(t) - H(t - \tau)] \frac{b \sin \omega_{mn} t - \omega_{mn} \sin bt}{\omega_{mn}(b^2 - \omega_{mn}^2)} + \\ &+ H(t - \tau) \frac{2b}{\omega_{mn}(b^2 - \omega_{mn}^2)} \cos \frac{\omega_{mn} \tau}{2} \sin \left(\omega_{mn} t - \frac{\omega_{mn} \tau}{2} \right). \end{aligned}$$

Аналітичний вираз коефіцієнта $\frac{Q_{mn}}{M_{mn}}$ можна отримати лише у згаданому вище частковому випадку шарнірного закріплення усіх сторін пластинки. У цьому випадку ненульовими є тільки непарні члени:

$$\frac{Q_{2m+1, 2n+1}}{M_{2m+1, 2n+1}} = \frac{16}{\pi^2 (2m+1)(2n+1)}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

3. Числові результати. Розрахунки згідно з (8), (9) проводились для шарнірно опертої по усіх сторонах пластини, виготовленої з фольгованого склотекстоліту FR-4 ($E = 22$ ГПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 1900$ кг/м³, $\alpha = 18 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹), з розмірами $a_1 = a_2 = 0.1$ м, $h = 1.5$ мм. На пластинку діє напівсинусоїдальний імпульс тривалістю $\tau = 1.5$ мсек.

На рис. 1 зображено прогини у центрі пластини при трьох значеннях приросту T . Суцільна крива відповідає відсутності приросту: $T = 0$, штрихова – приросту $T = 10$ °С, точкова – $T = -10$ °С.

Оскільки в рівнянні (2) не враховувались дисипативні члени, після дії ударного імпульсу пластинка продовжує коливатись на основній частоті ω_{11} . Зміна приросту T на 10 градусів призводить, як було зауважено у [2], до зміни основної частоти на 10%. Амплітуда коливань при цьому змінюється приблизно на 20%.

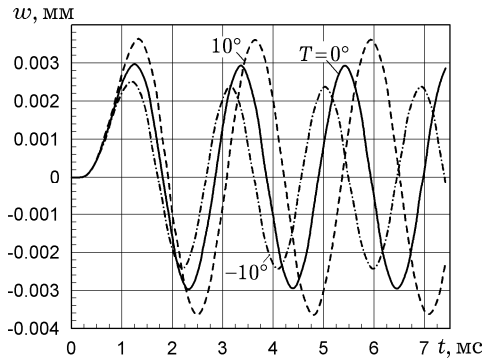


Рис. 1

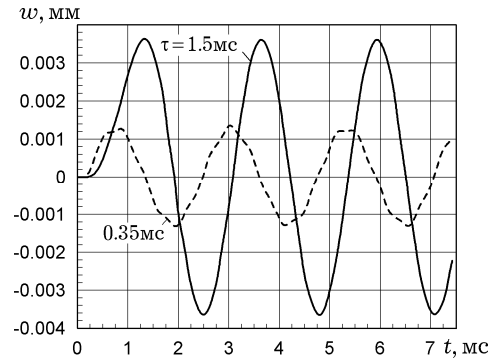


Рис. 2

На рис. 2 зображено реакцію цієї пластинки на ударні імпульси різної тривалості. Обидві криві побудовано для приросту $T = 10^\circ$: суцільна крива відповідає імпульсу тривалістю $\tau = 1.5$ мсек, штрихова – $\tau = 0.35$ мсек. При дії коротшого імпульсу збуджуються коливання не тільки на основній частоті, але й на частоті ω_{22} . Антисиметричні коливання пластинки на частотах $\omega_{21} = \omega_{12}$ в цьому випадку не збуджуються.

Розглянемо результати числового моделювання динамічної поведінки пластини в тривимірній постановці, отримані за допомогою пакету COMSOL Multiphysics. На рис. 3 зображено прогин у центрі пластини з наведеними вище параметрами. Суцільні, штрихові і точкові криві відповідають приростам $T = 0^\circ\text{C}$, $T = 10^\circ\text{C}$, $T = -10^\circ\text{C}$ для пластини, защемленої по двох протилежних сторонах і вільної по решті сторін. Штрихпунктирні криві відповідають реакції пластини, защемленої по усіх сторонах.

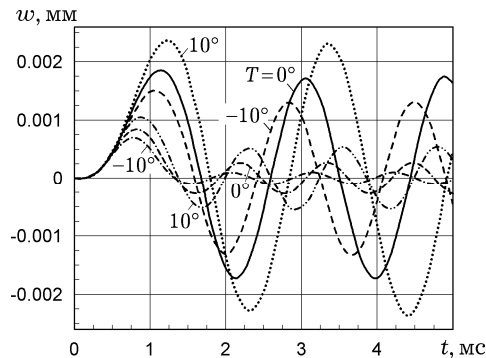


Рис. 3

У цьому тривимірному випадку розглянуто задачу про однорідний нагрів пластини і прийнято, що в площині пластини діють температурні напруження $\sigma_{ii}^T = E \epsilon_{ii}^0 = -\alpha E T$. У випадку пластини, защемленої по двох сторонах, вони діють лише в одному напрямку, для повністю защемленої по контуру пластини – у двох.

Частоти вільних коливань ненагрітої пластини після дії імпульсу для розглянутої моделі і граничних умов (рис. 3, суцільна крива) відповідають частотам, отриманим у [5] за теорією пластин. А залежність основної частоти та динамічних прогинів і напружень аналогічна до отриманих вище для опертої пластини.

Висновки. Аналіз динамічної реакції термічно навантажених пластин за аналітичними виразами розв'язків на основі теорії пластинок та числових експериментів для тривимірних рівнянь теорії пружності дає можливість оцінювати вплив температури не тільки на основні частоти згинних

коливань, але й на напружено-деформований стан пластинки. Зміна температурного стану прямокутної пластини, закріпленої на неподатливих опорах, істотно впливає на її динамічні характеристики при згинних деформаціях. Зміна температури на 10°C призводить до зміни основної частоти на 10%, амплітуда згинних деформацій і напружень при цьому змінюється приблизно на 20%. Отримані результати можуть бути використані для розробки рекомендацій при інженерних розрахунках елементів конструкцій, що перебувають в умовах динамічних навантажень.

1. Бреславский Д. В., Наумов И. В., Онищенко А. В. Исследование поведения тонких прямоугольных пластин при ударном нагружении // Проблемы обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 16. – С. 51–59.
2. Горечко О. М., Горечко Н. О. Вплив температури на вібраційні характеристики прямокутної панелі // Наук. записки [Укр. акад. друкарства]. – 2003. – Вип. 6. – С. 111–114.
3. Горечко Н. О., Кушнір Р. М. Термопружний стан складеної пластинки з теплообміном за дії рівномірно розподіленого джерела тепла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 153–162.
Те саме: Horechko N. O., Kushnir R. M. Thermostressed state of a composite plate with heat exchange under the action of a uniformly distributed heat source // J. Math. Sci. – 2012. – **183**, No. 2. – P. 177–189.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-0805-4>.
4. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 215 с.
5. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 576 с.
6. Abdikarimov R., Amabili M., Vatin N. I., Khodzhaev D. Dynamic stability of orthotropic viscoelastic rectangular plate of an arbitrarily varying thickness // Appl. Sci. – 2021. – **11**, No. 13. – Art. 6029. – P. 1–27.
– <https://doi.org/10.3390/app11136029>.
7. Chen Q., Fei Q., Devriendt H., Wu S., Plumeyers B., Desmet W. The dynamic bending analysis of plates under thermal loading using an efficient wave-based method // Thin-Walled Struct. – 2019. – **149**. – Art. 106421. – P. 1–22.
– <https://doi.org/10.1016/j.tws.2019.106421>.
8. Geng Q., Li H., Li Y. Dynamic and acoustic response of a clamped rectangular plate in thermal environments: Experiment and numerical simulation // J. Acoust. Soc. Am. – 2014. – **135**, No. 5. – P. 2674–2682. – <https://doi.org/10.1121/1.4870483>.
9. Love A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells // Philos. Trans. Roy. Soc. London. – 1888. – **179**, No. 16. – P. 491–546.
– <https://doi.org/10.1098/rsta.1888.0016>.
10. Nowacki W. Teoria sprężystości. – Warszawa: PWN, 1970. – 769 s.

DYNAMIC RESPONSE OF PREHEATED RECTANGULAR PLATES AND PANELS TO IMPACT LOADING

The problem of finding the dynamic reaction to the shock pulse of rectangular plates previously subjected to load heating is considered. The statement of the problems on determining the dynamic characteristics of elastic elements of structures in modeling them according to the theory of plates and a three-dimensional elastic body is presented. The analytic solution of the dynamic problem is constructed for rectangular plates prestressed due to heating hinged supported on two opposite edges and with arbitrary boundary conditions on the rest edges. The influence of temperature on the dynamic characteristics of the plates is analyzed. With the help of computational experiment in a three-dimensional statement the problem of response to the shock of a previously heated plane rectangular panel at bilateral and all-around clamping is investigated.

Key words: heat exchange, thermoelasticity, plates, supported plates, clamped plates, dynamic response.

¹ Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів