

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ АППРОКСИМАЦИЙ В МЕТОДЕ SUPG ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

*Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев, Украина

**Институт космических исследований НАН Украины – НКА Украины, Киев, Украина

Анотація. Проаналізовано метод SUPG із застосуванням зосереджених апроксимацій і відмічено, що у ряді випадків він може призводити до надмірного згладжування розв'язку та значних похибок. Показано, що можна таким чином вибрати вагові функції, при яких вказані недоліки практично не проявляються. Побудовано відповідні апроксимації у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь та різницевих схем.

Ключові слова: SUPG, рівняння конвекції-дифузії, зосереджені апроксимації, штучна дисипація та дисперсія.

Аннотация. Проанализирован метод SUPG с применением сосредоточенных аппроксимаций и отмечено, что в ряде случаев он может приводить к чрезмерному сглаживанию решения и значительным погрешностям. Показано, что возможен такой выбор весовых функций, при котором указанные недостатки практически не проявляются. Построены соответствующие аппроксимации в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений и разностных схем.

Ключевые слова: SUPG, уравнение конвекции-диффузии, сосредоточенные аппроксимации, искусственная диссипация и дисперсия.

Abstract. The SUPG method with using lumped approximations was analyzed. It was mentioned in the paper that in some cases this method can lead to excessive smoothing solutions and significant errors. The paper has been presenting the possibility to choose weighting functions for which the above drawbacks almost are not visible. The corresponding approximations in the form of systems of ordinary differential equations and difference schemes were built.

Keywords: SUPG, convection-diffusion equation, lumped approximations, mass lumping, artificial dissipation and dispersion.

1. Введение

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода Галеркина с конечными элементами рассматривается в качестве одного из наиболее универсальных методов построения численных схем для решения задач математической физики. Приближенное решение с помощью МКЭ ищется в виде разложения по конечной совокупности финитных функций (то есть отличных от нуля только на некотором ограниченном множестве), называемых базисными, а коэффициенты разложения определяются из условия ортогональности невязки совокупности так называемых весовых финитных функций. В традиционном (классическом) МКЭ наборы базисных и весовых функций совпадают, однако при расчете задач с доминированием конвективных процессов классические методы могут давать неустойчивые (осциллирующие) решения, поэтому для подобных задач используют так называемые стабилизированные методы, в которых к весовым функциям добавляют специальные члены, обеспечивающие устойчивость счета. Метод SUPG (Streamline-Upwind Petrov-Galerkin) является одним из наиболее типичных (и эффективных) методов данного класса [1–3].

Применение МКЭ к нестационарному уравнению конвекции-диффузии приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ):

$$M\dot{\vec{a}} = F(t, \vec{a}), \quad (1)$$

где t – время, вектор $\vec{a}(t)$ – вектор коэффициентов разложения искомого решения по базисным функциям, $F(t, \vec{a})$ – некоторая вектор-функция (в общем случае, нелинейная), M – так называемая матрица масс, которая в общем случае оказывается недиагональной, несимметричной и разреженной [2, 3]. Для приведения системы (1) к каноническому виду матрицу M следует обратить; в случае дискретизации по переменной t с целью непосредственного перехода от системы (1) к разностной схеме получаемая схема оказывается неявной (в силу недиагональности M). В некоторых случаях (задачи с подвижными границами областей, с переменными во времени течениями) матрица M может также оказаться зависимой от времени, что приводит к необходимости ее обращения (или выполнения какой-либо факторизации) на каждом шаге интегрирования при решении СДУ (1). Для устранения указанных трудностей в вычислительной практике часто используют так называемый прием сосредоточения (mass lumping) [4, 5], суть которого заключается в замене матрицы M диагональной, в которой элементы диагонали представляют сумму элементов каждой строки матрицы M . Возможны и другие варианты реализации данного приема [4], но в статье [6] показано, что в этом случае будет нарушена консервативность метода, что может привести к серьезным вычислительным ошибкам (особенно при расчете нелинейных задач). Использование приема сосредоточения позволяет в схемах МКЭ трактовать частную производную по времени таким же образом, как это делается в методах конечных разностей. Понятно, что после выполнения диагонализации матрицы M отпадает необходимость в выполнении трудоемких операций по ее обращению, а частная производная по времени в разностных схемах может трактоваться явно. Можно показать [2, 4–6], что применение приема сосредоточения вносит в схему искусственную диссипацию, что, с одной стороны, приводит к сглаживанию неоднородностей решения (дополнительной стабилизации схем вблизи фронтов ударных волн) и повышению устойчивости, но, с другой стороны, также часто приводит к сильному уменьшению амплитуды численного решения, его "размыванию" и значительным потерям точности расчета. Краткий обзор работ "за" и "против" использования приема сосредоточения в численных аппроксимациях приводится в [8]. Заметим, однако, что при расчете некоторых нелинейных задач прием сосредоточения оказывается нужным для обеспечения устойчивости счета [9] и ссылки.

В данной работе, используя предложенную в [10] методику исследования сосредоточенных аппроксимаций и установленные результаты по устойчивости разностных схем, показано, что для линейного одномерного уравнения конвекции-диффузии имеется принципиальная возможность такого выбора весовых функций в методе SUPG с использованием сосредоточенных аппроксимаций, при котором результат расчета будет совпадать (по крайней мере, приближенно) с результатом расчета по методу SUPG с наперед заданными весовыми функциями, в котором сосредоточенные аппроксимации не используются. Это позволяет получать численные схемы, в которых использование приема сосредоточения не приводит к потере точности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующее уравнение конвекции-диффузии [1–7]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(t) \frac{\partial u}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(x, t), \quad x \in [L_1; L_2], \quad t \in [0; T], \quad (2)$$

где $\lambda(t)$ – некоторая зависящая от времени t функция, κ – положительная константа. Предполагается, что для уравнения (2) задано начальное условие $u(0, x) = u_0(x)$, а в точках $x = L_1$ и $x = L_2$ задано одно из стандартных граничных условий [11].

Целью данной работы является разработка версии метода SUPG с использованием сосредоточенных аппроксимаций, в котором не проявляются их негативные свойства, описанные выше.

3. Получение системы обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов

Пусть на отрезке $[L_1, L_2]$ задана система равномерно распределенных точек (узлов) x_i , $i = \overline{1, N}$ с шагом $h = x_{i+1} - x_i$, $x_1 = L_1$, $x_N = L_2$. Каждый из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ в МКЭ принято называть элементом [2, 3, 5–7]. С каждым узлом x_i свяжем непрерывную кусочно-линейную финитную базисную функцию $N_i(x)$. Функция $N_i(x)$ отлична от нуля на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ (носителе данной функции), равна нулю на концах отрезка и за его пределами, линейная на элементах $[x_{i-1}, x_i]$ и $[x_i, x_{i+1}]$ и равная единице в точке x_i .

В качестве весовой функции в соответствии с методом SUPG выберем функцию [1–3]:

$$W_i = N_i + \alpha_i \lambda \frac{dN_i}{dx}, \quad (3)$$

где число α_i является настроечным параметром весовой функции W_i , обеспечивающим устойчивость численных схем (что особенно актуально для задач с доминирующей конвекцией) и позволяющим регулировать уровень вносимой в схему методом SUPG искусственной вязкости. Особенности выбора данного настроечного параметра детально обсуждаются в [3, 12–14]. В частности, можно показать [3, 11], что выбор α_i в виде

$$\alpha = \frac{h}{2\lambda} \left(\coth \left(\frac{\lambda h}{2\kappa} \right) - \frac{2\kappa}{\lambda h} \right) \text{ для стационарного уравнения } \lambda \frac{du}{dx} = \kappa \frac{d^2u}{dx^2} \text{ с постоянными}$$

коэффициентами обеспечивает совпадение численного решения методом SUPG с аналитическим решением в узлах сетки. Отметим также, что обычно выбираемое значение параметра α_i является величиной $O(h)$ (или $O(h^2)$), как в приведенном выше случае, что следует из равенства $\coth x - 1/x = O(x)$ при $x \rightarrow 0$, иначе уровень вносимой методом искусственной вязкости может оказаться слишком большим, а это приведет к значительным потерям точности [3].

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) N_j(x), \quad (4)$$

где $\bar{a}(t) = \{a_j(t)\}_{j=1}^N$ – вектор искомых коэффициентов разложения по базисным функциям (систему (1)). В соответствии с процедурой метода SUPG умножим уравнение конвекции-диффузии (2) на весовую функцию W_i , соответствующую произвольному узлу сетки i , и проинтегрируем по области $\Omega \equiv [L_1, L_2]$. Подставив вместо неизвестного решения $u(x, t)$ приближенное решение $\tilde{u}(x, t)$ из (4), получаем следующее уравнение для i -го внутреннего узла (полудискретную аппроксимацию):

$$\left(\frac{h}{6} + \frac{\alpha_i \lambda}{2}\right) \frac{da_{i-1}}{dt} + \frac{2h}{3} \frac{da_i}{dt} + \left(\frac{h}{6} - \frac{\alpha_i \lambda}{2}\right) \frac{da_{i+1}}{dt} + \lambda \left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{\alpha_i \lambda}{h}\right) a_{i-1} + \frac{2\alpha_i \lambda}{h} a_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_i \lambda}{h}\right) a_{i+1} \right) =$$

$$= \kappa \left(\frac{a_{i-1}}{h} - \frac{2a_i}{h} + \frac{a_{i+1}}{h} \right).$$

Разделив данное уравнение на h , приводим его к форме

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{a}_{i-1} + \frac{2}{3} \dot{a}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{a}_{i+1} = -\lambda \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2h} + (\kappa + \lambda^2 \alpha_i) \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2}. \quad (5)$$

Применяя к уравнению (5) прием сосредоточения, получаем следующее уравнение:

$$\dot{a}_i^{(L)} = -\lambda \frac{a_{i+1}^{(L)} - a_{i-1}^{(L)}}{2h} + (\kappa + \lambda^2 \alpha_i^{(L)}) \frac{a_{i-1}^{(L)} - 2a_i^{(L)} + a_{i+1}^{(L)}}{h^2}. \quad (6)$$

Здесь верхние индексы (L) возле величин $\{a_j(t)\}$ введены для подчеркивания того, что их значения, вообще говоря, не совпадают со значениями соответствующих коэффициентов, определяемых из системы уравнений (5), в которой не использовался прием сосредоточения.

Найдем связь между параметрами α_i и $\alpha_i^{(L)}$ соотношений (5) и (6), исходя из условия совпадения погрешностей аппроксимации разностными операторами L_h и $L_h^{(L)}$ (соотношений (5) и (6) соответственно) дифференциального оператора L уравнения (2) на решении $u(x,t)$ этого уравнения. Данный подход к исследованию сосредоточенных аппроксимаций был предложен и развит в работе [10]. Погрешность ψ аппроксимации оператором L_h оператора L на решении $u(x,t)$ в точке (x_i, t) выражается следующим образом:

$$\psi \equiv L_h u - Lu = \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{u}_{i-1} + \frac{2}{3} \dot{u}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{u}_{i+1} + \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) -$$

$$- \frac{\alpha_i \lambda^2}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=x_i} = \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{u}_{i-1} + \left(\frac{2}{3} - 1\right) \dot{u}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{u}_{i+1} -$$

$$- \frac{\alpha_i \lambda^2}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \varepsilon = \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{u}_{i-1} - \frac{1}{3} \dot{u}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h}\right) \dot{u}_{i+1} - \frac{\alpha_i \lambda^2}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=x_i} + \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} - \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) =$$

$$= \lambda \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} - \kappa \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i} + O(h^4).$$

Аналогично, для погрешности $\psi^{(L)}$ аппроксимации оператором $L_h^{(L)}$ оператора L на решении $u(x,t)$ в точке (x_i, t) получаем

$$\begin{aligned} \psi^{(L)} \equiv L_h^{(L)} u - Lu = \dot{u}_i - \frac{\lambda^2 \alpha_i^{(L)}}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - \\ - \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=x_i} = - \frac{\lambda^2 \alpha_i^{(L)}}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Приравнявая теперь погрешности ψ и $\psi^{(L)}$, получаем выражение

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_i \lambda}{2h} \right) \dot{u}_{i-1} - \frac{1}{3} \dot{u}_i + \left(\frac{1}{6} - \frac{\alpha_i \lambda}{2h} \right) \dot{u}_{i+1} - \frac{\alpha_i \lambda^2}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) = - \frac{\alpha_i^{(L)} \lambda^2}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}),$$

откуда сразу получаем

$$\alpha_i^{(L)} = \alpha_i + \frac{\alpha_i \lambda \frac{\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}}{2h} - \frac{\dot{u}_{i-1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}}{6}}{\lambda^2 \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}}. \quad (7)$$

Теперь, с учетом выражения (7) для $\alpha_i^{(L)}$, имеем

$$\begin{aligned} (L_h^{(L)} u)(x_i) = \dot{u}_i - \frac{\lambda^2 \alpha_i}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) - \\ - \alpha_i \lambda \frac{\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}}{2h} + \frac{\dot{u}_{i-1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}}{6}. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых в приведенном выше выражении можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}_{i+1} - \dot{u}_{i-1}}{2h} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_i} + O(h^2) = \kappa \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} + O(h^2), \\ \frac{\dot{u}_{i-1} - 2\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}}{h^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_{x=x_i} + O(h^2) = \kappa \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i} - \lambda \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} + O(h^2). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали равенство $\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda(t) \frac{\partial u}{\partial x}$, следующее из (2).

Используя данные соотношения, выражение $(L_h^{(L)} u)(x_i)$ можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} (L_h^{(L)} u)(x_i) = \dot{u}_i - \frac{\lambda^2 \alpha_i}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \frac{\lambda}{2h} (u_{i+1} - u_{i-1}) - \frac{\kappa}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + \lambda^2 \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_i} - \\ - \left(\kappa \alpha_i \lambda + \frac{h^2 \lambda}{6} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i} + \frac{h^2 \kappa}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i}. \end{aligned}$$

Здесь опущены члены, порядок малости которых выше второго (с учетом замечаний относительно выбора параметров α_i). Производные $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=x_i}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x=x_i}$ можно со вторым порядком точности аппроксимировать выражениями $\frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2h^3}$ и $\frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{h^4}$ соответственно. В результате получаем следующую полудискретную аппроксимацию:

$$\dot{a}_i = -\lambda \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2h} + \kappa \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2} + \left(\kappa \alpha_i \lambda + \frac{h^2 \lambda}{6} \right) \frac{a_{i+2} - 2a_{i+1} + 2a_{i-1} - a_{i-2}}{2h^3} - \frac{h^2 \kappa}{6} \cdot \frac{a_{i+2} - 4a_{i+1} + 6a_i - 4a_{i-1} + a_{i-2}}{h^4}. \quad (8)$$

Выражение (8) можно упростить, опустив члены величины $O(h^2)$ (однако заметим, практика расчетов свидетельствует, что в ряде случаев удаление этих членов приводит к потере точности):

$$\dot{a}_i = -\lambda \frac{a_{i+1} - a_{i-1}}{2h} + \kappa \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2} + \kappa \alpha_i \lambda \frac{a_{i+2} - 2a_{i+1} + 2a_{i-1} - a_{i-2}}{2h^3}. \quad (9)$$

Заметим также, что аппроксимации (8) и (9) следуют из $(L_h^{(L)} u)(x_i)$, если положить в нем $\alpha_i^{(L)} = \left(\kappa \alpha_i + \frac{h^2}{6} \right) \cdot \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{2h\lambda \cdot (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})} - \frac{\kappa}{6\lambda^2} \cdot \frac{u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}}{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}$ и $\alpha_i^{(L)} = \frac{\kappa \alpha_i}{2h\lambda} \cdot \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}$ соответственно. Эти формулы показывают, что

можно так выбрать коэффициенты $\alpha_i^{(L)}$ изгиба весовых функций в методе SUPG с использованием сосредоточенных аппроксимаций, при котором результат расчета будет приближенно совпадать (в смысле приближенного равенства погрешностей аппроксимации соответствующих операторов) с результатом расчета по стандартному методу SUPG с коэффициентами α_i изгиба весовых функций, в котором сосредоточенные аппроксимации не используются, то есть соответствуют цели, указанной во Введении.

4. Разностные схемы

Пусть на временном промежутке $[0; T]$ введена равномерная сетка с узлами $t_n = n \cdot \tau$, где τ – шаг по времени, $n = 0, \dots, M$, $t_0 = 0$, $t_M = T$. Определим сокращенное обозначение $c_i^n \equiv c(x_i, t_n)$ для некоторой величины $c = c(x, t)$ в точке (x_i, t_n) пространственно-временной сетки. Также будем обозначать $c^{(\sigma)} \equiv \sigma c_i^{n+1} + (1 - \sigma) c_i^n$.

От полудискретных аппроксимаций (8)–(9) можно перейти к полностью дискретным (по времени и пространству) разностным схемам, заменив производные по времени \dot{a} в точке x_i (i -м узле) разностными соотношениями на пространственно-временной сетке.

$$\begin{aligned}
& \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\tau} + \lambda^{(\sigma)} \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - a_{i-1}^{n+1}}{2h} + \lambda^{(\sigma)} (1 - \sigma) \frac{a_{i+1}^n - a_{i-1}^n}{2h} = \kappa \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - 2a_i^{n+1} + a_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \\
& + \kappa(1 - \sigma) \frac{a_{i+1}^n - 2a_i^n + a_{i-1}^n}{h^2} + \theta_i \sigma \frac{a_{i+2}^{n+1} - 2a_{i+1}^{n+1} + 2a_{i-1}^{n+1} - a_{i-2}^{n+1}}{2h^3} + \\
& + \theta_i(1 - \sigma) \frac{a_{i+2}^n - 2a_{i+1}^n + 2a_{i-1}^n - a_{i-2}^n}{2h^3} + \mu \sigma \frac{a_{i+2}^{n+1} - 4a_{i+1}^{n+1} + 6a_i^{n+1} - 4a_{i-1}^{n+1} + a_{i-2}^{n+1}}{h^4} + \\
& + \mu(1 - \sigma) \frac{a_{i+2}^n - 4a_{i+1}^n + 6a_i^n - 4a_{i-1}^n + a_{i-2}^n}{h^4},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\tau} + \lambda^{(\sigma)} \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - a_{i-1}^{n+1}}{2h} + \lambda^{(\sigma)} (1 - \sigma) \frac{a_{i+1}^n - a_{i-1}^n}{2h} = \kappa \sigma \frac{a_{i+1}^{n+1} - 2a_i^{n+1} + a_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \\
& + \kappa(1 - \sigma) \frac{a_{i+1}^n - 2a_i^n + a_{i-1}^n}{h^2} + \theta_{1,i} \sigma \frac{a_{i+2}^{n+1} - 2a_{i+1}^{n+1} + 2a_{i-1}^{n+1} - a_{i-2}^{n+1}}{2h^3} + \\
& + \theta_{1,i}(1 - \sigma) \frac{a_{i+2}^n - 2a_{i+1}^n + 2a_{i-1}^n - a_{i-2}^n}{2h^3},
\end{aligned} \tag{11}$$

где $\theta_i = \kappa \alpha_i \lambda^{(\sigma)} + h^2 \lambda^{(\sigma)} / 6$, $\theta_{1,i} = \kappa \alpha_i \lambda^{(\sigma)}$, $\mu = -h^2 \kappa / 6$. Заметим, что можно также рассматривать и более общие разностные схемы, в которых каждый пространственный член соотношений (8)–(9) аппроксимируется со своим индивидуальным весом σ . Погрешность аппроксимации разностными соотношениями (10), (11) уравнения (2) по временной переменной есть величиной $O(\tau)$ при $\sigma \neq 1/2$ и величиной $O(\tau^2)$ при $\sigma = 1/2$ (аппроксимация Кранка-Николсона). Погрешность аппроксимации по пространственной переменной определяется величиной параметра α_i : если $\alpha_i = O(h^r)$, то и погрешность равна $O(h^r)$. В работе [10] исследован вопрос устойчивости схем типа (10)–(11) и, в частности, показано, что при $\sigma \geq 1/2$ они абсолютно устойчивы по начальному условию.

5. Численный пример

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (2) с известным аналитическим решением $u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa(t+1)}} \exp\left(-\frac{(x+3/5-(t+1))^2}{4\kappa(t+1)}\right)$ при $\lambda(t) = 1$, $\kappa = 10^{-3}$ на отрезке

$x \in [0; 1]$ [10]. Начальное условие и граничные условия получаются из выписанного аналитического решения путем его непрерывного продолжения на прямые в плоскости (x, t) с $t=0$ и $x=0$, $x=1$ соответственно. При расчетах использовалось $N = 200$

базисных и весовых функций, все коэффициенты $\alpha_i = \frac{h}{2\lambda} \left(\coth\left(\frac{\lambda h}{2\kappa}\right) - \frac{2\kappa}{\lambda h} \right)$. Для оценки

отклонения численного решения \tilde{u} от аналитического решения u используем величину $err_{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} |\tilde{u}(x_i, t) - u(x_i, t)|$.

На рис. 1 и 2 показаны результаты расчетов в момент времени $t = 0,35$. Тут и в дальнейшем на каждом из рисунков жирной линией обозначен график вычисленного решения в зависимости от пространственной координаты x , тонкой – график известного аналитического. На рис. 1 представлен результат расчета методом SUPG с использованием сосредоточенных аппроксимаций (система уравнений (6)). Видно, что численное решение

значительно отклоняется от истинного, $err_{\max} \approx 1,19$, амплитуда волны уменьшается, что связано с наличием искусственного диффузионного слагаемого в уравнении (6), величина которого регулируется параметром α (чем больше по величине параметр α , тем сильнее будет эффект затухания и размывания решения). На рис. 2 представлен результат расчета задачи с помощью системы уравнений (8), $err_{\max} \approx 0,04$. Как видим, предложенные численные схемы на основе метода SUPG обеспечивают весьма хорошую точность, а графики численного и аналитического решений на рис. 2 визуальнo практически сливаются друг с другом. График решения при расчете задачи методом SUPG без использования сосредоточенных аппроксимаций (система уравнений (5)) практически совпадает с рис. 2, поэтому также здесь не приводится (для него будет $err_{\max} \approx 0,041$).

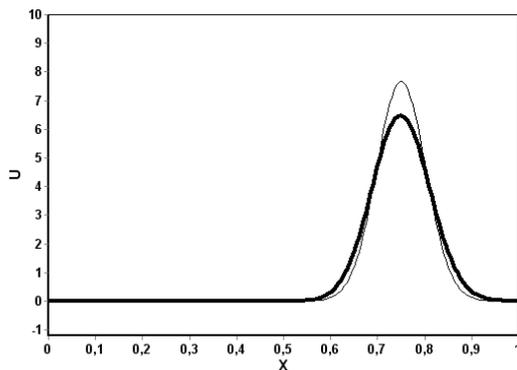


Рис. 1. Расчет с использованием сосредоточенных аппроксимаций

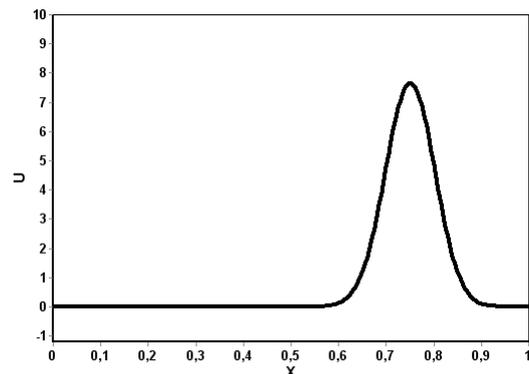


Рис. 2. Расчет с помощью системы уравнений (8)

При интегрировании СОДУ использовались методы, предложенные в статье [15], шаг по времени $\tau = 10^{-4}$.

6. Заключение

В настоящей работе, опираясь на результаты статьи [10] и используя предложенную в ней методику исследования сосредоточенных аппроксимаций, проанализировано влияние приема сосредоточения в конечноэлементном методе SUPG на точность и качественные свойства численного решения одномерного нестационарного уравнения конвекции-диффузии (2). Отмечено, что использование данного приема может привести к значительным погрешностям в численном решении, что связано с вносимой им искусственной диссипацией в численные схемы (это приводит к чрезмерному сглаживанию решения) и нарушением свойства согласованности численных аппроксимаций. Показано, что существует возможность выбора коэффициентов весовых функций в методе SUPG (с использованием приема сосредоточения) и построения соответствующих численных аппроксимаций в виде СОДУ (8)–(9) и разностных схем (10)–(11), при которой численные решения практически свободны от данных недостатков. Показано, что это достигается за счет введения в схему со сосредоточенными аппроксимациями искусственного дисперсионного (и диссипативного, но более высокого порядка) члена вместо исходного диссипативного члена, которым преимущественно и обуславливались сглаживающие свойства схемы. Теоретические результаты, полученные в работе, проиллюстрированы численным примером.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Brooks A.N. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier–Stokes equations / A.N. Brooks, T.J.R. Hughes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1982. – Vol. 32 (1–3). – P. 199 – 259.
2. Roos H.-G. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations / H.-G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.
3. Fries T.P. A Review of Petrov-Galerkin Stabilization Approaches and an Extension to Meshfree Methods / T.P. Fries, H.G. Matthies. – Germany; Brunswick: Technische Universität Braunschweig, Informatikbericht-Nr., 2004. – 71 p.
4. Zienkiewicz O.Z. The Finite Element Method. Volume 3: Fluid Dynamics / O.Z. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 334 p.
5. Finlayson B.A. Numerical methods for problems with moving fronts / B.A. Finlayson. – Seattle, Washington USA: Ravenna Park Publishing, Inc., 1992. – 613 p.
6. Hansbo P. Aspects of conservation in finite element flow computations / P. Hansbo // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1994. – Vol. 117. – P. 423 – 437.
7. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / Флетчер К.; пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
8. Wendland E. Numerical experiments on mass lumping for the advection-diffusion equation / E. Wendland, H.E. Schulz // Revista Minerva. – 2005. – Vol. 2, N 2. – P. 227 – 233.
9. Сирик С.В. Численное интегрирование уравнения Бюргерса методом Петрова-Галеркина с адаптивными весовыми функциями / С.В. Сирик, Н.Н. Сальников // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 94 – 110.
10. Сирик С.В. Анализ применения сосредоточенных аппроксимаций в методе конечных элементов при решении задач конвекции-диффузии / С.В. Сирик // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 5. – С. 152 – 163.
11. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1999. – 798 с.
12. Harari I. Streamline design of stability parameters for advection-diffusion problems / I. Harari, L.P. Franca, S.P. Oliveira // Journal of Computational Physics. – 2001. – N 171 (1). – P. 115 – 131.
13. Hughes T.J.R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods / T.J.R. Hughes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1995. – Vol. 127. – P. 387 – 401.
14. Hughes T.J.R. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. Beyond SUPG / T.J.R. Hughes, M. Mallet, A. Mizukami // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1986. – Vol. 54. – P. 341 – 355.
15. Скворцов Л.М. Простые явные методы численного решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений / Л.М. Скворцов // Вычислительные методы и программирование. – 2008. – Т. 9. – С. 154 – 162.

Стаття надійшла до редакції 10.06.2013