

ИЗМЕРЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев, Украина

Анотація. Для фізичних процесів великої тривалості запропонована нова модифікація методики вимірювання інтервалів статистичної стійкості, що забезпечує отримання більш точних оцінок інтервалів статистичної стійкості по відношенню до середнього і середньоквадратичного відхилення. Переваги нової модифікації методики продемонстровані на конкретному прикладі.

Ключові слова: статистична стійкість, параметр статистичної нестійкості, теорія гіпервипадкових явищ, похибка вимірювання.

Аннотация. Для физических процессов большой длительности предложена новая модификация методики измерения интервалов статистической устойчивости, обеспечивающая получение более точных оценок интервалов статистической устойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению. Преимущества новой модификации методики продемонстрированы на конкретном примере.

Ключевые слова: статистическая устойчивость, параметр статистической неустойчивости, теория гиперслучайных явлений, погрешность измерения.

Abstract. For the physical processes of long duration it is proposed a new measurement technique of the statistical stability intervals that provides more accurate assessment of statistical stability intervals with respect to the average and the standard deviation. Advantages of the new techniques are demonstrated on the particular example.

Keywords: statistical stability, parameter of statistical instability, theory of hyper-random phenomena, measurement error.

1. Введение

Классические методы статистики теории вероятностей базируются на предположении, что феномен статистической устойчивости, являющийся физической основой этих методов, носит идеальный характер, то есть статистики (функции выборки) обладают свойством сходимости или, иначе, оценки состоятельны.

Экспериментальные исследования реальных процессов разной физической природы [1–3] показывают, что статистики, сформированные по реальным выборкам, тенденции к сходимости не проявляют. Тенденция к сходимости наблюдается лишь при небольшом объеме выборки. При большом же объеме она отсутствует.

Этим объясняется [1, 2, 4, 5] ограниченная точность любых измерений физических величин и ограниченная точность прогнозирования развития реальных событий.

Нарушение сходимости статистик указывает на то, что реальный физический мир действительно подчиняется трем видам законов: детерминированным, статистически прогнозируемым (случайным (стохастическим)) и статистически непрогнозируемым [6].

При небольшом объеме выборки действие статически непрогнозируемых законов практически не влияет на результаты измерения физических величин. В этом случае можно применять классические методы статистики теории вероятностей.

При больших же объемах выборки, когда нарушение статистической устойчивости проявляется явно, использование классических методов приводит к недопустимо большим погрешностям [5]. Тогда приходится учитывать нарушения статистической устойчивости. Возможный вариант такого учета предоставляет специально разработанная для этих целей физико-математическая теория гиперслучайных явлений [1, 2].

Для обоснованного выбора статистического метода обработки процесса большой длительности необходимо проведение измерений интервала его статистической устойчивости – максимального интервала наблюдения, на котором нарушения статистической устойчивости можно считать пренебрежимо малыми. Если интервал наблюдения не превосходит интервал статистической устойчивости, можно применять классические методы, в противном случае приходится использовать методы, учитывающие нарушения устойчивости.

Исследования показывают [1, 2], что интервал статистической устойчивости зависит от характера процесса и рассматриваемой статистики.

Известная методика измерения интервалов статистической устойчивости [1, 2] позволяет оценить величины интервалов статистической устойчивости по отношению к среднему и среднеквадратическому отклонению (СКО). Если процесс представлен множеством своих реализаций, суть методики состоит в расчете для каждой реализации специальных параметров статистической неустойчивости, их усреднении по множеству реализаций и анализе динамики изменения полученных величин.

В ряде случаев в распоряжении исследователя имеется всего лишь одна реализация. Тогда используют упрощенный вариант этой методики, включающий расчет для имеющейся реализации указанных параметров статистической неустойчивости и анализ динамики их изменения. Получаемые при этом оценки интервалов статистической устойчивости оказываются не очень высокого качества.

Если длительность процесса существенно больше интервала статистической устойчивости и предположительно процесс обладает эргодическими свойствами, оценки можно улучшить путем разбиения процесса на равные по длительности фрагменты, расчета для каждого из них параметров статистической неустойчивости, последующего усреднения этих параметров (по множеству фрагментов) и анализа динамики изменения полученных величин.

Недостатком такого варианта измерения является неполное использование информации об интервалах статистической устойчивости, содержащейся в процессе. Вызвано это тем, что реальные величины интервала статистической устойчивости имеют большой разброс, а длительность фрагментов следует выбирать, исходя из максимальной величины этого интервала.

Целью настоящей статьи является разработка для процессов большой длительности более совершенной модификации методики измерения.

2. Параметры статистической неустойчивости по отношению к среднему и СКО

Простейшим параметром, характеризующим нарушения статистической устойчивости случайного процесса $X(t)$ по отношению к среднему, является параметр статистической неустойчивости

$$\gamma_N = M \left[\frac{\bar{D}_{Y_N}}{\bar{D}_{X_N}} \right], \quad (1)$$

где $M[\cdot]$ – оператор математического ожидания;

$$\bar{D}_{Y_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (Y_n - \bar{m}_{Y_N})^2 \quad (2)$$

– выборочная дисперсия флуктуации выборочного среднего

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (n = \overline{1, N}); \quad (3)$$

$\bar{m}_{Y_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n$ – выборочное среднее флуктуации среднего;

$$\bar{D}_{X_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (X_i - Y_N)^2 \quad (4)$$

– выборочная дисперсия процесса, X_i – i -й отсчет случайного процесса $X(t)$, t – время.

Простейшим параметром, характеризующим нарушения статистической устойчивости случайного процесса $X(t)$ по отношению к СКО, является параметр статистической неустойчивости

$$\Gamma_N = M \left[\frac{\bar{D}_{Z_N}}{\bar{D}_{X_N}} \right], \quad (5)$$

где
$$\bar{D}_{Z_N} = \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^N (Z_n - \bar{m}_{Z_N})^2 \quad (6)$$

– выборочная дисперсия флуктуации выборочного СКО

$$Z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - Y_n)^2} \quad (n = \overline{2, N}); \quad (7)$$

$\bar{m}_{Z_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N Z_n$ – среднее флуктуации выборочного СКО.

Заметим, что, если реальный процесс $X(t)$ носит неслучайный характер (не имеет вероятностной меры), для оценки нарушений статистической устойчивости также могут быть использованы параметры статистической неустойчивости (1) и (5). В этом случае под оператором $M[\cdot]$ следует понимать усреднение по ансамблю (если таковой имеется). В упрощенных вариантах методики, о которых шла речь во введении, усреднение по ансамблю может отсутствовать или проводиться по фрагментам процесса.

3. Критерии принятия решения

При реальных расчетах принятие решения о наличии или отсутствии нарушений статистической устойчивости по отношению к среднему и СКО возможно на основе сравнения значений оценок γ_N^* и Γ_N^* параметров γ_N и Γ_N при больших значениях N со значением γ_{0N} параметра γ_N , рассчитанного для эталонного статистически устойчивого процесса.

В качестве эталона удобно использовать белый гауссовский шум¹. Для него рассчитаны [1, 2] параметр γ_{0N} и СКО $\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ величины $\tilde{\gamma}_{0N} = \bar{D}_{Y_N} / M[\bar{D}_{X_N}]$. Эти два параметра определяют верхнюю границу $\gamma_{0N}^+ = \gamma_{0N} + k\sigma_{\tilde{\gamma}_{0N}}$ коридора параметра статистической устойчивости (k – параметр, определяющий ширину коридора). Выход оценок параметров статистической неустойчивости γ_N^* и Γ_N^* за верхнюю границу коридора может служить индикатором нарушения статистической устойчивости соответственно по отношению к среднему и СКО.

Удобными параметрами, характеризующими степень нарушения статистической устойчивости по отношению к среднему и СКО по сравнению с эталоном являются нор-

¹ Для корректного использования этого эталона период дискретизации исследуемого процесса должен быть равен интервалу его корреляции.

мированные на величину γ_{0N} параметры γ_N^* и Γ_N^* : $h_N^* = \gamma_N^* / \gamma_{0N}$ и $H_N^* = \Gamma_N^* / \gamma_{0N}$. Соответствующая этим параметрам верхняя граница коридора устойчивости описывается выражением $h_{0N}^+ = \gamma_{0N}^+ / \gamma_{0N}$.

4. Новая модификация методики

Предлагаемая модификация методики измерения интервалов статистической устойчивости процесса основана на стандартной методике измерения физических величин [7].

Применительно к измерению интервала τ статистической устойчивости по отношению к среднему она включает следующие этапы:

1) расчет по имеющимся данным $x_1, x_2, \dots, x_{N_{\max}}$ реального процесса $x(t)$ значений параметра $h_N^* = \frac{\bar{D}_{y_N}}{\bar{D}_{x_N} \gamma_{0N}}$ для возрастающего объема N до величины N_{\max} , при которой ве-

личина h_N^* становится больше h_{0N}^+ , и фиксация этой величины N_{\max} . Здесь

$$\bar{D}_{y_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (y_n - \bar{m}_{y_N})^2, \quad \bar{D}_{x_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x_n - y_n)^2, \quad \bar{m}_{y_N} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n, \quad y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i;$$

2) расчет по полученной величине N_{\max} оценки интервала статистической устойчивости τ для рассматриваемого фрагмента исследуемого процесса и исключение из массива данных первых N_{\max} отсчетов;

3) повторение п.п. 1 и 2 до тех пор, пока не будет обработан весь объем данных. В результате Q кратного повторения п.п. 1 и 2 формируется последовательность Q оценок $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$ величины τ интервала статистической устойчивости, соответствующих Q фрагментам исследуемого процесса (в общем случае эти фрагменты могут быть разной длительности и содержать разное количество отсчетов);

4) расчет усредненной оценки $\bar{\tau}^*$ интервала статистической устойчивости по отношению к среднему: $\bar{\tau}^* = \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^Q \tau_n^*$;

5) расчет для оценки $\bar{\tau}^*$ оценки СКО $\sigma_{\bar{\tau}^*}^*$, характеризующей погрешность измерения: $\sigma_{\bar{\tau}^*}^* = \sqrt{\frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{n=1}^Q (\tau_n^* - \bar{\tau}^*)^2}$.

Применительно к измерению интервала T статистической устойчивости по отношению к СКО методика включает следующие этапы:

1) расчет по имеющимся данным $x_1, x_2, \dots, x_{N_{\max}}$ реального процесса $x(t)$ значений параметра $H_N^* = \frac{\bar{D}_{z_N}}{\bar{D}_{x_N} \gamma_{0N}}$ для возрастающего объема N до величины N_{\max} , при которой ве-

личина H_N^* становится больше h_{0N}^+ , и фиксация этой величины N_{\max} . В данном случае

$$\bar{D}_{z_N} = \frac{1}{N-2} \sum_{n=2}^N (z_n - \bar{m}_{z_N})^2, \quad z_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - y_n)^2}, \quad \bar{m}_{z_N} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=2}^N z_n;$$

2) расчет по полученной величине N_{\max} оценки интервала статистической устойчивости T для рассматриваемого фрагмента исследуемого процесса и исключение из массива данных первых N_{\max} отсчетов;

3) повторение п.п. 1 и 2 до тех пор, пока не будет обработан весь объем данных. В результате Q кратного повторения п.п. 1 и 2 формируется последовательность Q оценок $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$ величины интервала статистической устойчивости по отношению к СКО, соответствующих Q фрагментам исследуемого процесса (в общем случае фрагменты также могут быть разной длительности);

4) расчет усредненной оценки интервала статистической устойчивости по отношению к СКО: $\bar{T}^* = \frac{1}{Q} \sum_{n=1}^Q T_n^*$;

5) расчет для оценки \bar{T}^* оценки СКО $\sigma_{\bar{T}^*}^*$, характеризующей погрешность измерения: $\sigma_{\bar{T}^*}^* = \sqrt{\frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{n=1}^Q (T_n^* - \bar{T}^*)^2}$.

Заметим, что описанные варианты методики базируются на предположении, что последовательности оценок $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$ и $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$ статистически устойчивы. Поэтому, рассчитав указанные оценки, прежде чем проводить их усреднение, следует удостовериться, что они обладают свойством статистической устойчивости по отношению к среднему. Если в результате анализа оказывается, что обе последовательности удовлетворяют критерию устойчивости, усреднять можно все их члены, если же лишь части последовательностей удовлетворяют критерию устойчивости, усреднять следует только члены последовательностей, относящиеся к этим частям.

5. Пример применения новой модификации методики

Детальные экспериментальные исследования нарушений статистической устойчивости реальных физических процессов на больших интервалах наблюдения начинались с изучения колебаний напряжения городской электросети [8]. Полученные тогда многочасовые записи колебания напряжения неоднократно использовались (в частности, в работах [1–5]) для отработки и тестирования различных методик. Воспользуемся этими данными.

На рис. 1 а представлено колебание напряжения в сети $x(t)$ на протяжении 60 ч наблюдения (количество отсчетов $N \approx 10^6$, период следования отсчетов – 0,2 с), а на рис. 1 б – зависимость выборочного среднего $y(t)$ рассматриваемого процесса от времени усреднения.

Отсчеты процесса $x(t)$ коррелированы [9]. Интервал его корреляции составляет примерно 1,6 с.

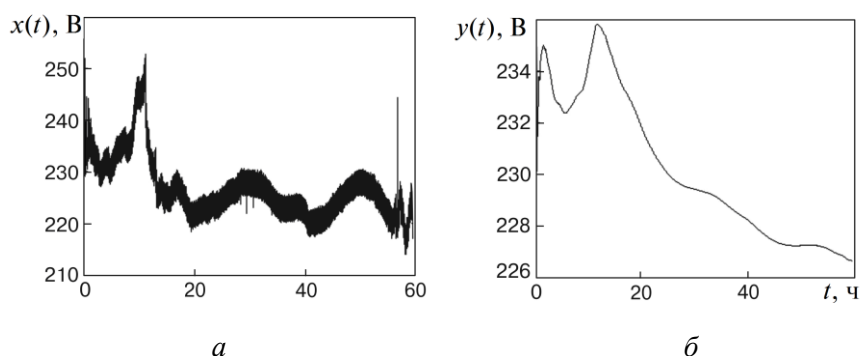


Рис. 1. Результаты измерения напряжения городской электросети на протяжении 60 ч наблюдения (а) и соответствующее им выборочное среднее (б)

Исследуемый процесс явно статистически неустойчивый, о чем свидетельствует отсутствие тенденции к стабилизации выборочного среднего $y(t)$ даже в конце 60-часового интервала наблюдения. Измерения, проведенные с использованием старой методики, показывают, что интервал статистической устойчивости по отношению к среднему равен примерно 1 ч.

Представление об изменениях закона распределения на протяжении рассматриваемого 60-часового интервала наблюдения дает рис. 2 а, а об изменениях оценки функции распределения выборочного среднего $m_{xN}^* = y_N$ – рис. 2 б [4].

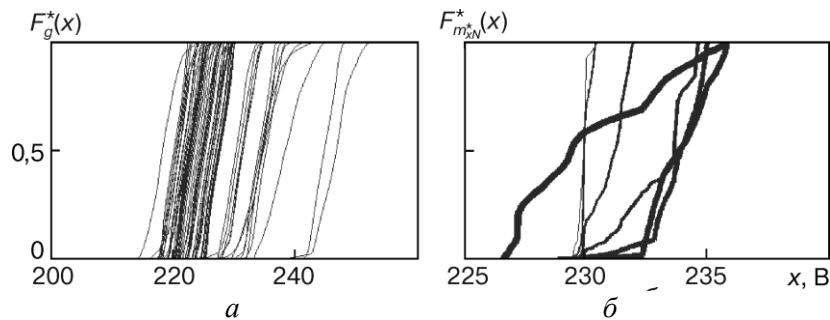


Рис. 2. Оценки функции распределения напряжения электросети $F_g^*(x)$ на 64 прилегающих друг к другу интервалах наблюдения равной длительности (а) и оценки функции распределения выборочного среднего напряжения $F_{m_{xN}^*}^*(x)$ при различных объемах выборки $N = 2^r$ ($r = 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$) (б) (толщина линий возрастает с увеличением параметра r)

Оценим величины этих интервалов с использованием предложенной модификации методики.

Результаты расчета параметров статистической неустойчивости h^* и H^* исследуемого колебания на прилегающих друг к другу фрагментах разной длительности, определяемых интервалом статистической устойчивости по отношению к среднему, представлены на рис. 3, а на прилегающих друг к другу фрагментах разной длительности, определяемых интервалом статистической устойчивости по отношению к СКО, – на рис. 4. При расчетах учитывалось, что отсчеты коррелированы, и поэтому использовался каждый 8 отсчет выборки.

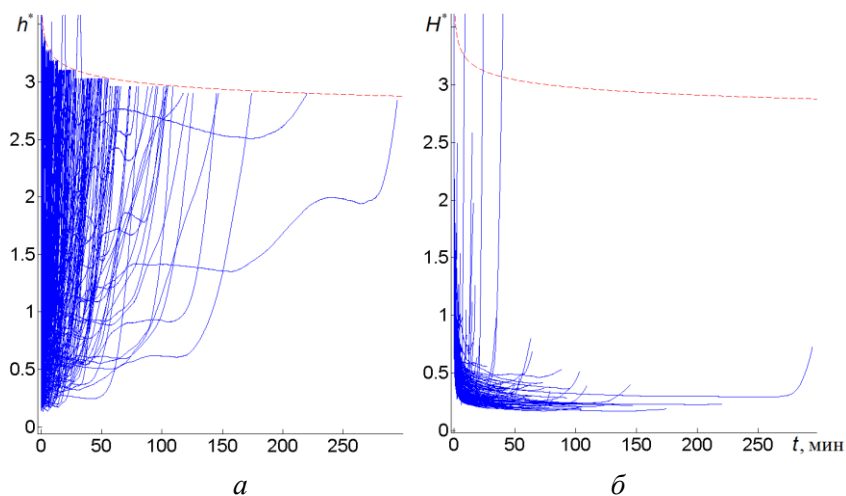


Рис. 3. Оценки параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему h^* (а) и по отношению к СКО H^* (б) фрагментов исследуемого процесса, определяемых интервалом статистической устойчивости по отношению к среднему τ

На приведенных рисунках, а также на рис. 6, пунктирными линиями изображена верхняя граница h_{0N}^+ коридора статистической устойчивости, соответствующая параметру $k = 3$.

На рис. 5 а представлена динамика изменения оценки интервала статистической устойчивости по отношению к среднему $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$, а на рис. 5 б – динамика изменения оценки интервала статистической устойчивости по отношению к СКО $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$.

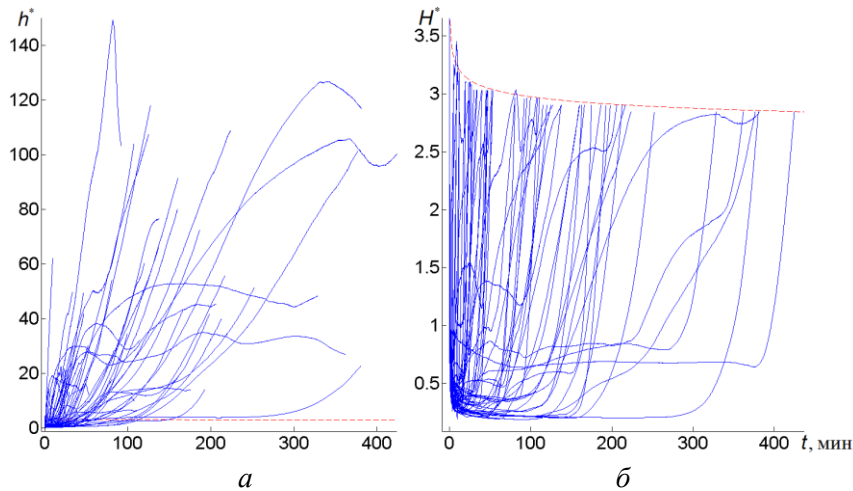


Рис. 4. Оценки параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему h^* (а) и по отношению к СКО H^* (б) исследуемого процесса на интервалах, определяемых интервалом статистической устойчивости по отношению к СКО T

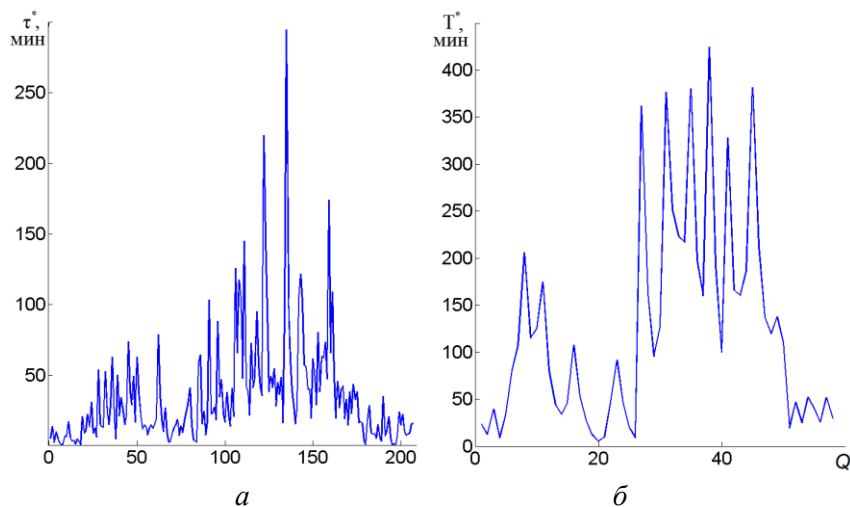


Рис. 5. Динамика изменения оценок интервала статистической устойчивости по отношению к среднему τ^* (а) и по отношению к СКО (б)

Анализ рис. 3–5 показывает, что интервал статистической устойчивости по отношению к среднему и СКО лежит в диапазоне от нескольких минут до нескольких часов. Количество оценок интервала статистической устойчивости по отношению к среднему $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$ равно 207, а количество оценок интервала статистической устойчивости по отношению к СКО $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$ – 58.

На рис. 6 а представлены результаты расчетов параметров статистической неустойчивости h_Q^* и H_Q^* по отношению к среднему и к СКО для последовательности оценок

$\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$, а на рис. 6 б – аналогичные результаты расчетов для последовательности оценок $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$.

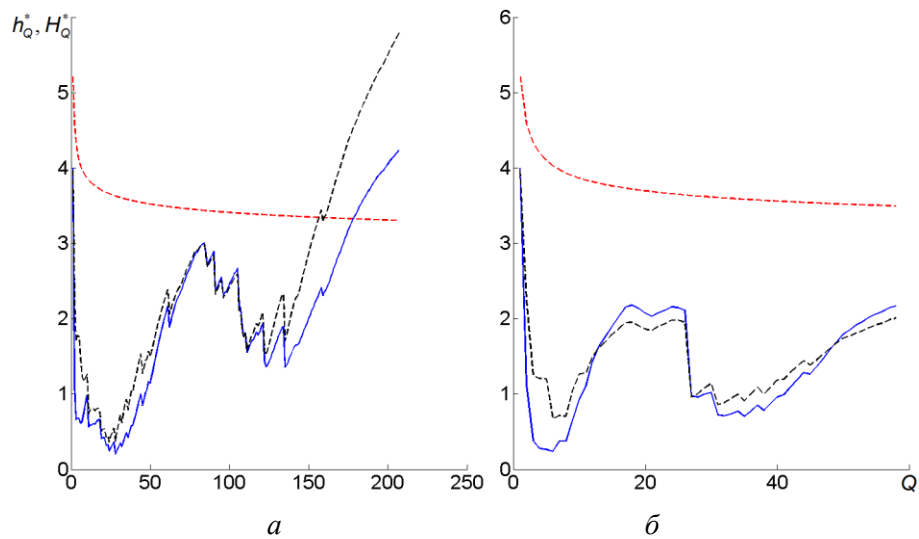


Рис. 6. Оценки параметров статистической неустойчивости по отношению к среднему h_Q^* (полуужирные сплошные линии) и по отношению к СКО H_Q^* (полуужирные пунктирные линии) последовательностей оценок $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$ (а) и $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$ (б)

Из рис. 6 следует, что оценки выборочного СКО $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$ статистически устойчивы на всем интервале наблюдения, а оценки выборочного среднего $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$ – примерно на 3/4 этого интервала (до 160-й оценки, определяемой в данном случае выходом за границу статистической устойчивости параметра статистической неустойчивости по отношению к СКО). Это означает, что расчет усредненных оценок выборочного СКО можно проводить с использованием всех оценок, полученных на протяжении всего интервала наблюдения, а расчет усредненных оценок выборочного среднего – на 3/4 это интервала. При этом усредненные оценки $\bar{\tau}^*$ и \bar{T}^* оказываются статистически устойчивыми не только по отношению к среднему, но и по отношению к СКО. Последнее означает, что для усредненных оценок $\bar{\tau}^*$ и \bar{T}^* могут быть корректно рассчитаны СКО, характеризующие погрешности измерений этих средних.

Исследование автоковариационных функций последовательностей оценок $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_Q^*$ и $T_1^*, T_2^*, \dots, T_Q^*$ показывает, что отсчеты этих последовательностей практически некоррелированы.

Представление о динамике изменения величин $\bar{\tau}^*$ и \bar{T}^* дают соответственно рис. 7 а, б.

Из графиков следует, что среднее интервалов статистической устойчивости по отношению к среднему $\bar{\tau}^* = 35 \pm 30$ мин, а среднее интервалов статистической устойчивости по отношению к СКО $\bar{T}^* = (120 \pm 100)$ мин $\approx (2 \pm 1,7)$ ч.

Как видно, полученная ранее оценка интервала статистической устойчивости по отношению к среднему (равная 1 ч) располагается в районе верхней границы допуска средней оценки $\bar{\tau}^*$, рассчитанной по новой модификации методики.

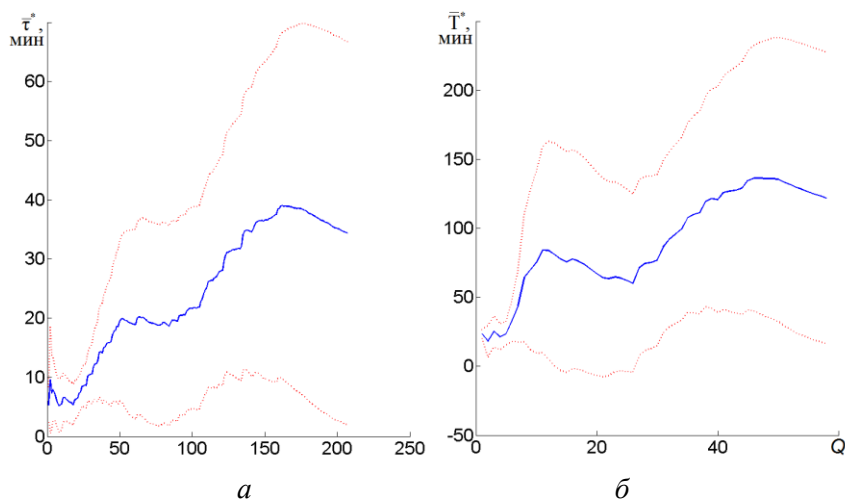


Рис. 7. Динамика изменения усредненного интервала $\bar{\tau}^*$ статистической устойчивости по отношению к среднему (а) и усредненного интервала \bar{T}^* статистической устойчивости по отношению к СКО (б) (полужирные сплошные линии). Полужирными пунктирными линиями изображены границы допусков $\tau^{\pm} = \bar{\tau}^* \pm 3\sigma_{\tau}^*$ и $T^{\pm} = \bar{T}^* \pm 3\sigma_{T}^*$

6. Выводы

1. Для процессов большой длительности предложена новая модификация методики измерения, позволяющая повысить точность измерения интервалов статистической устойчивости по отношению к среднему и по отношению к СКО.
2. Обращено внимание на то, что усредненная оценка, получаемая в результате усреднения множества оценок интервала статистической устойчивости, может не обладать свойством статической устойчивости. Поэтому при проведении измерений необходимо оценивать статистическую устойчивость усредненных оценок.
3. Показано, что для тестового колебания напряжения городской электросети усредненная оценка интервала статистической устойчивости по отношению к СКО обладает свойством статистической устойчивости на протяжении всего 60-часового интервала наблюдения, а усредненная оценка интервала статистической устойчивости по отношению к среднему – на протяжении примерно 45 ч.
4. Установлено, что полученная ранее для указанного тестового колебания оценка интервала статистической устойчивости по отношению к среднему располагается в районе верхней границы допуска средней оценки $\bar{\tau}^*$ интервала статистической устойчивости, рассчитанной по новой модификации методике. Согласно уточненным расчетам $\bar{\tau}^* = 35 \pm 30$ мин.
5. Для указанного тестового колебания оценена величина интервала статистической устойчивости по отношению к СКО. Согласно расчетам средняя оценка интервала статистической устойчивости по отношению к СКО $\bar{T}^* \approx (2 \pm 1,7)$ ч.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбань И.И. Теория гиперслучайных явлений: физические и математические основы [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2011. – 318 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.
2. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2014. – 444 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.
3. Горбань И.И. Феномен статистической устойчивости / И.И. Горбань // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84, № 3. – С. 22 – 30.

4. Горбань И.И. Почему точность измерения физических величин ограничена / И.И. Горбань // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 4. – С. 207 – 210.
5. Горбань И.И. Измерение физических величин в непрогнозируемо изменяющихся статистических условиях / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2015. – № 4. – С. 80 – 91.
6. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. – М.: Изд-во Московского ун-та, 1972. – 230 с.
7. ГОСТ 8.207-76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2001. – 8 с.
8. Горбань И.И. Нарушение статистической устойчивости физических процессов / И.И. Горбань // Математичні машини і системи. – 2010. – № 1. – С. 171 – 184.
9. Горбань И.И. Случайность и гиперслучайность [Электронный режим] / Горбань И.И. – К.: Наукова думка, 2016. – 288 с. – Режим доступа: http://www.immsp.kiev.ua/perspages/gorban_i_i/index.html.

Стаття надійшла до редакції 04.04.2016