

УДК 539.37

В.О. Ротко, к.т.н., доцент В.В.Шваб'юк,
к.т.н., доцент С.В. Ротко,
Луцький національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ НЕКЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗГИНУ ОРТОТРОПНИХ БАЛОК-СМУГ

Досліджується вплив деформацій поперечного зсуву та обтиснення на величини напружень та переміщень ортотропної балки-смуги. Одержані результати тестових розв'язків порівнюються із наявними теоретичними та експериментальними результатами інших авторів.

Ключові слова: балка-смуга, ортотропний матеріал, деформації поперечного зсуву та обтиснення, граничні умови, диференціальні рівняння рівноваги, уточнена теорія стрижнів, метод граничних елементів.

На даний час користуються двома найбільш поширеними теоріями стрижнів: класичною теорією Бернуллі-Ейлера і уточненою теорією С.П. Тимошенка [2,10]. Названі теорії дають більш-менш задовільні результати для гладких навантажень, але жодна з них не може бути використана для розрахунку коротких смуг (балок-стінок), або для розв'язку задач про контактну взаємодію стрижнів із жорсткими штампами [4]. Розв'язок таких задач міг проводитись тільки за допомогою рівнянь теорії пружності. Разом з тим, в останні десятиліття з'явилася низка уточнених теорій згину коротких композитних стрижнів [1,5], що враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення і можуть бути застосовані в таких задачах.

1. Гіпотези та допущення. Для розв'язання названих вище проблем скористаємось гіпотезами уточненої теорії стрижнів (рис. 1), запропонованими в [4].

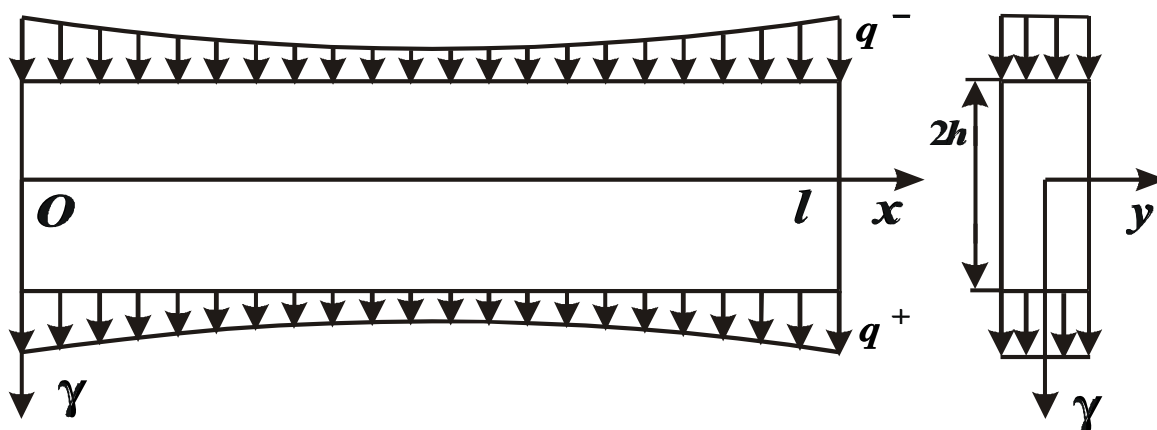


Рис. 1. Схема навантаження

Згідно з цими гіпотезами формули для напружень σ_x , σ_γ і $\tau_{x\gamma}$, а також для переміщень, можна записати наступним чином

$$\sigma_x = \frac{N}{2h} + \frac{M}{I} \cdot \gamma + \frac{q_2}{I} \left(\frac{E}{2G'} - v'' \right) \left(\frac{\gamma^3}{3} - \frac{\gamma h^2}{5} \right) - \frac{1}{4} \frac{h^2}{I} \left(\frac{E}{E'} - v'' \frac{G'}{E'} \right) \left(\frac{\gamma^3}{3} - \frac{\gamma h^2}{5} \right) \cdot \frac{d^2 q_2}{dx^2}; \quad (1)$$

$$\sigma_\gamma = q_1 + \frac{q_2}{6I} (3h^2 - \gamma^2) \gamma; \quad \tau_{x\gamma} = \frac{3Q}{4h} (1 - \gamma^2/h^2);$$

$$U(x, \gamma) = u(x) + \gamma \cdot \gamma_x(x) + \gamma \left(\gamma^2 - \frac{3}{5} h^2 \right) u_3(x);$$

$$W(x, \gamma) = w(x) + \left(q_1 - \frac{v'N}{2h} \right) \cdot \frac{\gamma}{E'} + \frac{v''}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \gamma^2 + \gamma^2 \left(C_1 - C_2 \gamma^2/h^2 \right) \cdot \frac{q_2}{E'h} + \frac{5v''\varepsilon_2}{32hE'} \cdot \frac{d^2 q_2}{dx^2} \cdot \gamma^4;$$

Тут $N = \int_{-h}^h \sigma_x d\gamma = 2Eh \left(\frac{du}{dx} + v' \cdot \frac{q_1}{E'} \right); \quad Q = \int_{-h}^h \tau_{x\gamma} d\gamma = \Lambda' \left(\frac{d\tilde{w}}{dx} + \gamma_x \right);$

$M = \int_{-h}^h \gamma \sigma_x \cdot d\gamma = -EI \frac{d\tilde{w}}{dx^2} - \varepsilon_1 h^2 q_2$ – поздовжня та поперечна сили, згинальний

момент у поперечних перерізах балки; $\gamma_x = \frac{3}{2h^3} \cdot \int_{-h}^h \gamma \cdot u d\gamma$ – узагальнений кут

повороту перерізу балки; $\tilde{w} = w + \varepsilon_2 \cdot \frac{3q_2}{8E'} \cdot h$; $I = \frac{2}{3} h^3$; $\kappa_0 = \frac{3v'G'}{5\varepsilon_2 E'}$,

$$u_3 = -\frac{5}{6} \cdot \frac{\varepsilon_2}{I} \left(\frac{Q}{G'} + \frac{h^2}{2E'} \cdot \frac{dq_2}{dx} \right); \quad q_1 = \frac{1}{2} (q^+ - q^-); \quad q_2 = q^+ + q^-;$$

$$\Lambda' = \frac{2G'h}{k'}; \quad k' = \frac{6}{5} \left(1 + \frac{v'}{4} \cdot \frac{G'}{E'} \right);$$

$$v'' = v'E/E', \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} (1 - v'v''); \quad \tilde{w} = w + \frac{3q_2}{8E'} \cdot h;$$

$$C_1 = \frac{3}{8} \left(2\alpha_0 + \frac{v'E}{G'} \right); \quad C_2 = \frac{1}{16} \left(2\alpha_0 + \frac{v'E}{G'} - v' \cdot v'' \right);$$

$$\varepsilon_1 = 0,1 \left(4 \frac{E}{G'} - 3v'' \right); \quad \varepsilon_2 = 0,2 (1 - v'G'/E').$$

При цьому вважається, що смуга знаходиться у плоскому напруженому стані ($\sigma_y \equiv 0$).

2. Рівняння рівноваги та граничні умови. Підставивши вирази (3) для поздовжньої і поперечної сил N і Q , а також згинального моменту M у диференціальні рівняння рівноваги, які для прямого стрижня спрощуються до вигляду

$$\frac{dN}{dx} = 0, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q_2, \quad (2)$$

одержимо наступні диференціальні рівняння відносно $u(x)$, $\gamma_x(x)$ і $w(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= -\frac{v'}{E'} \cdot \frac{dq_1}{dx}; \\ \frac{d^3 \gamma_x}{dx^3} &= -\frac{q_2}{EI} - \frac{2v'h^2}{5E'I} \cdot \frac{d^2 q_2}{dx^2}; \\ \frac{d^4 w}{dx^4} &= \frac{q_2}{EI} - \frac{\varepsilon_1 h^2}{EI} \cdot \frac{d^2 q_2}{dx^2} - \frac{\varepsilon_2 h^4}{4E'I} \frac{d^4 q_2}{dx^4}. \end{aligned} \quad (3)$$

Зауважимо, що останнє рівняння (3) відрізняється від раніше виведеного в роботах [1,2], членом з коефіцієнтом ε_2 .

Розв'язок системи диференціальних рівнянь (3), який визначає остаточний вигляд формул для переміщень і напружень кожної точки смуги, повинен задовольняти трьом граничним умовам на кожному з країв смуги.

Якщо її краї $x = \pm l$ оперті на горизонталі $\gamma = \gamma_0$, ($-h \leq \gamma_0 \leq h$), то така умова має вигляд:

$$N = 0, \quad M = 0, \quad W|_{\gamma=\gamma_0} = 0. \quad (4)$$

Якщо переміщення країв смуги вільні і до них за певним визначеним законом прикладені дотичні напруження, що урівноважують нормальні напруження q^\pm , то ці умови набувають вигляду:

$$N = 0, \quad M = 0, \quad Q = \pm Q_0 (x = -l; x = l), \quad (5)$$

якщо ці краї на горизонталі $\gamma = \gamma_0$ жорстко защемлені, то

$$U|_{\gamma=\gamma_0} = 0, \quad \left. \frac{dU}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = 0, \quad W|_{\gamma=\gamma_0} = 0, \quad (6)$$

якщо ж краї стрижня защемлені (не жорстко) на горизонталях $\gamma = \gamma_0$ та $\gamma = 0$ (вертикальне переміщення країв серединної поверхні дозволене), то:

$$u = 0, \quad \left. \frac{dU}{d\gamma} \right|_{\gamma=\gamma_0} = 0, \quad W|_{\gamma=\gamma_0} = 0. \quad (7)$$

Граничні значення ($\pm Q_0$) перерізуювальної сили Q на торцях смуги визначаються із умов її глобальної рівноваги.

Для випадку розподілених на поверхні смуги сталих нормальних навантажень $q^\pm = const$ рівняння (3) гранично спрощуються:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 \gamma_x}{dx^3} = -\frac{q_2}{EI}, \quad \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q_2}{EI}. \quad (8)$$

З рівнянь рівноваги (8) видно, що при такому навантаженні ортотропія матеріалу на базову систему диференціальних рівнянь не впливає. Крім того, поклавши кут зсуву $\gamma_x = -\frac{dw}{dx}$, отримаємо рівняння, що відповідають класичній теорії тонких стрижнів Бернуллі-Ейлера, де не враховуються деформації поперечного зсуву та обтиснення.

3. Дослідження точності виведених рівнянь на основі тестових розв'язків та експериментальних даних. Розглянемо згин шарнірно опертої ортотропної смуги рівномірно розподіленим навантаженням. Розв'язок рівнянь (8) при граничних умовах (5) і навантаженні $q^- = q = const$, ($q_1 = -q/2$, $q_2 = q$), дозволяє записати

$$\sigma_x = \frac{q\gamma}{2I} [(l^2 - x^2) + \alpha^2 (\frac{2}{3}\gamma^2 - \frac{2}{5}h^2)]; \quad \alpha^2 = \frac{E}{2G'} - \nu'' \quad (9)$$

$$W = \frac{q(l^2 - x^2)}{24EI} (5l^2 - x^2 + 12\varepsilon_1 h^2 - 6\nu'' \gamma^2) + \frac{q(\gamma_0 - \gamma)}{2E'} +$$

$$+ \frac{\nu'' \varepsilon_1 h^2}{2EI} (\gamma^2 - \gamma_0^2) \cdot q + \frac{q}{E'h} [C_1 - C_2 (\gamma^2 + \gamma_0^2) h^2] (\gamma^2 - \gamma_0^2).$$

Для смуги прямокутного перерізу одиничної ширини екстремальне значення відносного напруження спрощується до вигляду:

$$\bar{\sigma}_x^{extr} = \pm \left(\frac{3}{4} \frac{l^2}{h^2} + \frac{1}{5} \alpha^2 \right). \quad (10)$$

Таблиця 1

Абсолютні значення екстремальних напружень $\bar{\sigma}_x^{extr}$

$\frac{l}{h}$	МГЕ			Формула (5.15)	$\delta, \%$
	32 ел.	48 ел.	64 ел.		
1,0	0,9789	0,9805	0,9818	0,9500 (0,75)	3,24
1,5	1,8661	1,8712	1,8744	1,8875 (1,6875)	0,70

У табл. 1 абсолютні значення цих екстремальних величин зіставлені з отриманими за допомогою методу граничних елементів (МГЕ). Останні умовно можна вважати точними, оскільки використання вже 32 елементів гарантувало точність обчислень у 1% (різниця значень, отриманих під час розбиття межі області на 32 та 64 елементи, дорівнює 0,30% та 0,44% для $l/h=1$ та $l/h=1,5$ відповідно). Чим більше відношення l/h , тим точнішою є залежність (10).

Однак навіть для дуже короткої смуги ($l/h=1$) вона забезпечує цілком прийнятну високу точність, оскільки абсолютна похибка $\delta\%$ експериментальних значень менша від 3,5%. Числа в дужках відповідають класичній теорії Бернуллі–Ейлера.

На рис. 2 штриховою лінією відображена залежність зведених нормальних напружень $\bar{\sigma}_x(0, \gamma)$ у серединному вертикальному перерізі смуги ($x=0$) для випадку квадратної ($l/h=1$) та видовженої $l/h=1,5$ балки–стілки, які одержані за допомогою методу граничних елементів (МГЕ).

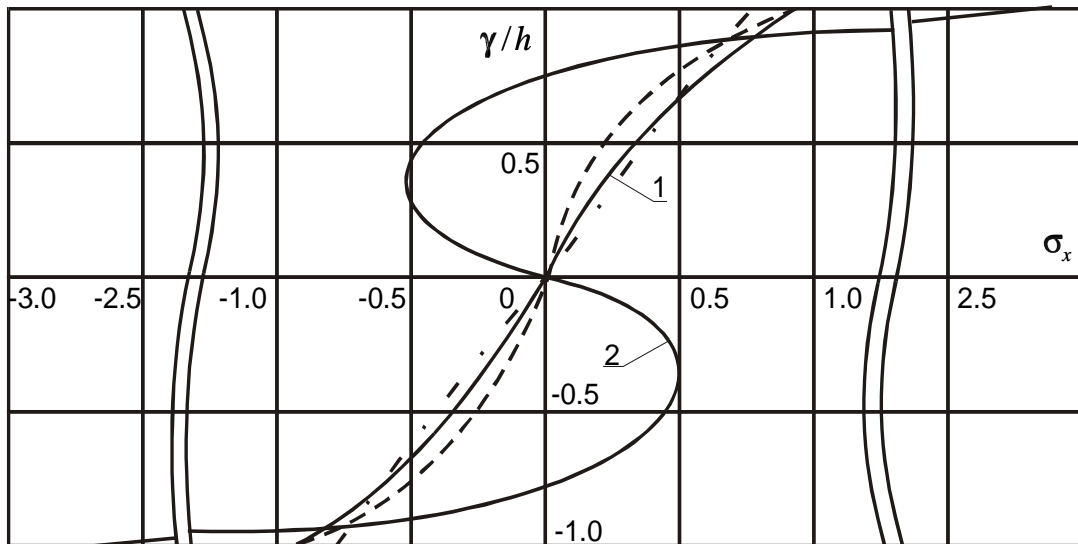


Рис. 2. Зміна нормальних напружень σ_x у поперечному перерізі смуги

Суцільні лінії характеризують цю залежність, обчислену на основі формули (11). Крива 2 на рисунку побудована за формулою (11) для ортотропної балки–стілки (дерево, $E/G' = 20$, $\nu'' = 0,3$, $\alpha^2 = 9,7$). Для видовженої смуги графіки, отримані цими двома способами, між собою не відрізняються.

З рис.2 видно, що для квадратної балки-стілки незначна різниця між графіками для ізотропного матеріалу проявляється тільки в області, близькій до нейтральної лінії. Якщо побудувати аналогічні графіки для видовженої смуги ($l/h=1,5$), то вони практично не будуть відрізнятися між собою.

Разом з тим, епюра нормальних напружень для ортотропного матеріалу (крива 2) дуже відрізняються і якісно, і кількісно ($\sigma^{extr} = 2,69$) від відповідних

епюр для ізотропного матеріалу. Це пояснюється тим, що в цьому випадку поправки від поперечного зсуву та обтиснення починають відігравати основну роль.

Вираз (12) для вертикальних переміщень смуги w дає можливість знаходити їх у будь-якій точці, а також задаватися більш реальними граничними умовами на кінцях смуги. Одержані результати можуть бути дуже близькими до відповідних результатів, знайдених методами теорії пружності для балок-стінок. Наприклад, максимальне ($x=0$) значення переміщення

$\bar{W} = W : \frac{ql}{E}$ середньої лінії квадратної балки-стінки дорівнює: $\bar{W} = 1,204$.

Відповідний результат плоскої задачі теорії пружності, отриманий П.М. Варваком, дорівнює $\bar{W}_T = 1,248$. Тобто, похибка формули (12) складає всього 3,5%. Разом з тим, заданою формулою можна визначити переміщення і в ортотропних смугах, а також і на інших рівнях по відношенню до середньої лінії.

Розроблена модель згину ортотропних смуг дозволяє одержувати результати, близькі до результатів теорії пружності та для інших видів навантажень. Так, при згині смуги довжиною l , що лежить на двох опорах, центральною зосередженою силою P вертикальне переміщення її середнього перерізу ($x=l/2$) має вигляд:

$$W\left(\frac{l}{2}, \gamma\right) = \frac{Pl^3}{48EI} \left(1 + 4,8 \left(\frac{E}{G'} - \frac{\nu''}{2} \right) \frac{h^2}{l^2} - 6\nu''\gamma^2/l^2 \right). \quad (11)$$

Зокрема, максимальний прогин середньої лінії смуги зводиться до виразу:

$$w_{\max} = w^* \left(1 + 0,486\kappa^2 \left(1 - \frac{\nu''G'}{2E} \right) \right), \quad (12)$$

де $w^* = Pl/(48EI)$ – прогин, який визначається класичною теорією;

$$\kappa^2 = \frac{E}{G'} \cdot \frac{\pi^2 h^2}{l^2}.$$

Аналогічний результат, одержаний Д. Гроссом [9] шляхом точного розв'язку плоскої задачі теорії пружності для ортотропної балки-стінки, має вигляд:

$$w_{\max} = w^* \left(1 + 0,486\kappa^2 \left(1 - \frac{\nu''G'}{6E} \right) \right). \quad (13)$$

Подібний результат, але вже енергетичним методом, отримано В.Л. Бідерманом [2]:

$$w_{\max} = w^* \left(1 + 0,486\kappa^2 - 0,008\kappa^4 \right). \quad (14)$$

Разом з тим, у формулі (12), так само як і в аналітичних формулах, одержаних Ю.М. Тарнопольським [2], нехтується впливом поперечного обтиснення ($\nu'' = E / E' = 0$), що певним чином знижує її точність.

Варто відзначити факт, який випливає з формули (11), а також підтверджується дослідженнями інших авторів [1,7,8], що переміщення верхнього і нижнього країв смуги дещо зменшуються за рахунок ефекту Пуассона на величину

$$\Delta w = -0,61\nu'' \frac{G'}{E} \kappa^2 w^*. \quad (15)$$

Цей факт необхідно враховувати під час проведення експериментів на згин з метою визначення модулів пружності матеріалів. У таких випадках вимірюються не переміщення середньої лінії, а переміщення зовнішніх поверхонь зразків.

Так, згідно з даними експерименту, наведеними в роботі [7], максимальний прогин соснової балки ($E / G' = 20$, $\nu'' = 0,3$, $l = 1i$, переріз 3см × 10см) дорівнює $w_{\max} = 1,98$ мм. За формулою (11), з урахуванням обтиснення Δw , відповідне переміщення дорівнює $W(h) = 2,04$ мм. Похибка теорії дорівнює 3%. Без врахування ефекту Пуассона вона б складала 4%. Аналогічне переміщення, знайдене за класичною формулою для тонких стрижнів, дорівнює $w^* = 1,66$ мм. Порівняно з експериментом похибка складає 16,2%.

Для монокристалів $n - Ge$, що можуть застосовуватись у композитних матеріалах, використання формул згину для визначення їх пружних сталих може бути проблематичним. Тому у роботі [6] для визначення модулів пружності використано теоретико-експериментальний метод вимірювання поздовжнього п'єзоопору. Згідно з цим методом робоча формула для обчислення модуля зсуву записувалась у вигляді

$$(G)^{-1} = S_{44} = 2,72 \cdot T \cdot \frac{\Delta \lg(10^4 a)}{\Delta \sigma_x} \left(\frac{\tilde{n}^2}{I} \right), \quad (16)$$

де T – температура за шкалою Кельвіна; $a = n_2/n_1$ – відносна заселенність електронами долин, що піднімаються (n_2) до долин, що опускаються (n_1); Δ – абсолютна зміна величини.

Зразки з концентрацією легувальної домішки $S_b = 9,15 \cdot 10^{13} \tilde{n}^{-3}$ вирізувалися для вимірювань уздовж кристалографічного напрямку [111].

На рис. 3 показано вплив відносної висоти $2h/l$ і ступеня анізотропії $\beta^2 = E / G'$ на величину відношення w_{\max} / w^* . Криві 1, 3 відповідають

максимальним переміщенням у смугах із однонаправлених склопластиків:

$$\text{АА} - 4\tilde{N} \left(\frac{E}{G'} = 23; \nu'' = 0,31 \right); 27 - 63C \left(\frac{E}{G'} = 12,25; \nu'' = 0,31 \right).$$

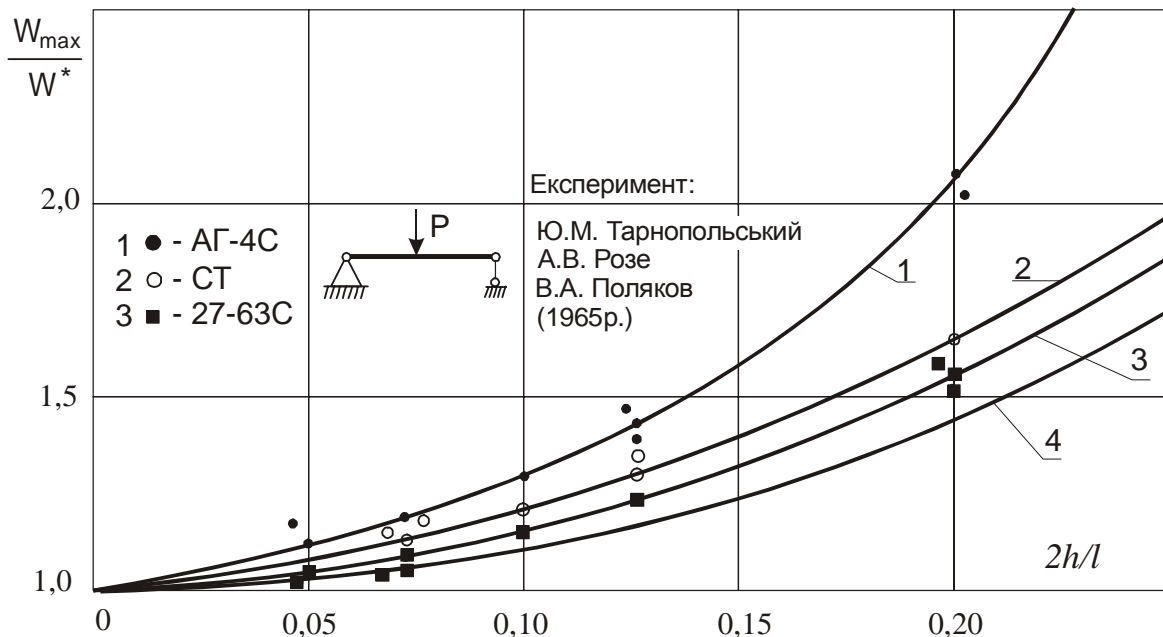


Рис. 3. Вплив величин $2h/l$ і E/G' на відношення w_{\max}/w^*

Крива 2 побудована для склотекстоліту СТ на епоксидній основі ($E/G' = 16; \nu'' = 0,44$), крива 4 - для монокристалу $n-Ge$, коли $E/G' = 2,4$. Суцільними і порожніми кружечками й квадратами відмічені результати експерименту [7] для відповідних матеріалів. Аналіз кривих, побудованих за формулою (13), показує, що вони у відповідних точках майже співпадають із результатами експериментів для досить широкого діапазону товщин. Вісь абсцис на рисунку відповідає розв'язку класичної теорії Бернуллі-Ейлера.

Література

1. Горик О.В., Піскунов В.Г., Чередніков В.М. Механіка деформування композитних брусів. Полтава – Київ; ПДАА, НТУ, 2008.- 404 с.
2. Тарнопольський Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969.- 276 с.
3. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов, т.1, М.: Физматгиз, 1960.- 379с.
4. Филоненко-Бородич М.М. Изгиб тонкого стержня по заданной кривой // Труды Моск.эл.-мех. ин-та инж. транспорта, 1949. В.58.- С. 3-10.

5. Шваб'юк В.И. К теории изгиба коротких трансверсально-изотропных балок. //Расчет пространственных строительных конструкций. Куйбышев: КуИСИ, 1981. В.9.– С.86-91.
6. Шваб'юк В.І., Маткова А.В. Метод визначення пружних сталей у монокристалах n-Ge // Машинознавство.-Львів: 1998. №6.– С.32-34.
7. Шушания В.Р. Изучение прогибов балки из однородных анизотропных материалов с учетом поперечной силы // Труды Грузинского политех. ин-та, 1978. №2.– С.89-95.
8. Anderman F. Tarcze prostokotne. Obliczenia statyczne. Warszawa: Arkady, 1966. 263 s.
9. Gross D. Fortpflanzung von Transversalwellen in scheibenartigen orthotropen Balken // Zeitschrift fur Angew. Mathematik und Mechanik ,1971, vol. 51. №4.
10. Timoshenko S.P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Magazine and J. Science, 1921, v.41,ser.6, №245, p.744-746.

Аннотация

Исследуется влияние деформаций поперечного сдвига и обжатия на величины напряжений и перемещений ортотропной балки-полосы. Полученные результаты тестовых решений сопоставляются с существующими теоретическими и экспериментальными результатами других авторов.

Annotation

Investigation of the accuracy of the non-classic bending model of orthotropic beams. The effect of transversal shear deformation and compression on the stress and displacement values of orthotropic beam is investigated. The obtained results of test solution are compared with available theoretical and experimental results of other authors.