

УДК. 539.3

д.т.н. М.Г. Сур'янінов, д.т.н. В.Ф. Оробей,
Одеський національний політехнічний університет
д.т.н. О.В. Максимович, Луцький національний технічний університет

СТІЙКІСТЬ АРОК І АРКОВИХ СИСТЕМ

Розглянуто задачі стійкості арок зі змінними параметрами жорсткості за радіального навантаження. Для розв'язку задач розвинено чисельно-аналітичний метод граничних елементів. Наведено алгоритм формування матриці граничних задач стійкості арок і аркових систем. Показано, що результати розв'язування задач стійкості характеризуються високою точністю і достовірністю.

Ключові слова: стійкість, арка, метод граничних елементів, диференціальні рівняння з параметрами.

Стійкості арок присвячено багато робіт [2-4,6-8], аналіз яких показує, що для кругових арок і аркових систем задачі стійкості розв'язуються в замкненому вигляді тільки при рівномірно розподіленому вздовж усієї довжини радіальному навантаженню, або дії зосередженої сили, прикладеної в площині симетрії арки. Якщо радіальне навантаження розташоване на частині арки, зосереджені сили діють довільно, а також для арок некругової конфігурації застосовують чисельні методи, за яких необхідно оцінювати точність розрахунків. У той же час при використанні чисельно-аналітичного методу граничних елементів (МГЕ) [1] не має необхідності проводити такі дослідження, оскільки в ньому відсутні похибки обчислень. Цей метод дає можливість враховувати різні граничні умови і закони зміни навантаження, жорсткості і радіуса кривизни.

МЕТОД ДОСЛІДЖЕНЬ

Інтегрування диференціального рівняння стійкості кругової арки. При довільному радіальному навантаженні в арці можуть бути ділянки, де навантаження відсутнє. На цих ділянках арки має місце статичний вигин при втраті стійкості. Розв'язок задачі Коші статичного вигину має вигляд

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline EIv(\alpha) \\ \hline EI\varphi(\alpha) \\ \hline M(\alpha) \\ \hline Q(\alpha) \\ \hline EAu(\alpha) \\ \hline N(\alpha) \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \hline 2 & & a_{22} & -a_{23} & -a_{13} & & a_{26} \\ \hline 3 & & & a_{22} & a_{12} & & -a_{36} \\ \hline 4 & & & & a_{11} & & -a_{46} \\ \hline 5 & a_{51} & a_{52} & -a_{53} & -a_{54} & a_{11} & a_{56} \\ \hline 6 & & & & -a_{64} & & a_{11} \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|} \hline EIv(0) \\ \hline EI\varphi(0) \\ \hline M(0) \\ \hline N(0) \\ \hline EAu(0) \\ \hline N(0) \\ \hline \end{array}
 \end{array}
 , \quad (1)$$

де EI , EA – поперечна і поздовжня жорсткості; $v(\alpha)$, $u(\alpha)$ – радіальне і тангенціальне переміщення; $\varphi(\alpha)$ – кут повороту; $M(\alpha)$, $Q(\alpha)$, $N(\alpha)$ – згинальний момент, поперечна і нормальна сили; α – кутова координата.

Фундаментальні ортонормовані функції a_{11}, \dots, a_{64} представлені в [1,5], де потрібно відкинути доданки, що враховують деформацію розтягу осі арки.

Диференціальне рівняння стійкості кругової арки у своїй площині:

$$EI[\chi'''(\alpha) + \chi'(\alpha)/R^2] + qR\chi'(\alpha) = M'''(\alpha) + (1 + qR^3/EI)M'(\alpha) = 0, \quad (2)$$

де $\chi(\alpha)$ – кривина деформованої осі арки; $R = const$ – радіус кривини; $q = const$ – радіальне навантаження, яке діє перпендикулярно осі арки.

Параметри стану арки без врахування деформацій розтягу [6] мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) &= [u(\alpha) + u''(\alpha)]/R; \quad M(\alpha) = -EI\chi(\alpha) = -EI[u'(\alpha) + u'''(\alpha)]/R^2; \\ Q(\alpha) &= -EI[u''(\alpha) + u^{IV}(\alpha)]/R^3; \\ N(\alpha) &= -Q'(\alpha) - qR = EI[u'''(\alpha) + u^V(\alpha)]/R^3 - qR. \end{aligned} \quad (3)$$

Після підстановки моменту $M(\alpha)$ з (3) у рівняння (2) рівняння стійкості арки в переміщеннях прийме вигляд

$$u^VI(\alpha) + (2 + qR^3/EI)u^{IV}(\alpha) + (1 + qR^3/EI)u''(\alpha) = 0. \quad (4)$$

Його характеристичне рівняння

$$k^6 + (2 + qR^3/EI)k^4 + (1 + qR^3/EI)k^2 = 0 \quad (5)$$

має корені $k_{1,2} = 0$; $k_{3,4} = \pm i$; $k_{5,6} = \pm \sqrt{1 + qR^3/EI} = \pm bi$. (6)

В зв'язку з цим розв'язок рівняння (4) запишеться

$$u(\alpha) = C_1 + C_2\alpha + C_3 \cos \alpha + C_4 \sin \alpha + C_5 \cos b\alpha + C_6 \sin b\alpha. \quad (7)$$

Сталі інтегрування знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь при $\alpha = 0$ за врахування (3)

	1	2	3	4	5	6		
1	1		1		1		C_1	$u(0)$
2		1		1		b	C_2	$v(0)$
3	1				$(1 - b^2)$		C_3	$\varphi(0)R$
4		1				$b(1 - b^2)$	C_4	$-M(0)R^2/EI$
5					$-b^2(1 - b^2)$		C_5	$-Q(0)R^3/EI$
6						$-b^3(1 - b^2)$	C_6	$N(0)R^3/EI$

$$= \quad (8)$$

$$C_1 = \varphi(0)R + \frac{1}{b^2}[-Q(0)R^3/EI]; \quad C_2 = \frac{1}{b^2}N(0)R^3/EI + [-M(0)R^2/EI];$$

$$C_3 = u(0) - \varphi(0)R + [-Q(0)R^3/EI]/(1 - b^2);$$

$$C_4 = v(0) + N(0)R^3/EI(1 - b^2) - [-M(0)R^2/EI]; \quad (9)$$

$$C_5 = -[-Q(0)R^3/EI]/b^2(1-b^2); \quad C_6 = -N(0)R^3/EIb^3(1-b^2).$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння (4) буде мати вигляд

		1	2	3	4	5	6	
$EIv(\alpha)$	1	A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	A_{15}	A_{16}	$EIv(0)$
$EI\varphi(\alpha)$	2		A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		A_{26}	$EI\varphi(0)$
$M(\alpha)$	3			A_{22}	A_{34}		$-A_{36}$	$M(0)$
$Q(\alpha)$	4				A_{44}		$-A_{46}$	$N(0)$
$E Au(\alpha)$	5	A_{51}	A_{52}	$-A_{53}$	$-A_{54}$	A_{11}	A_{56}	$E Au(0)$
$N(\alpha)$	6				$-A_{64}$		A_{44}	$N(0)$

(10)

де фундаментальні ортонормовані функції мають наступні вирази

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \cos \alpha; A_{12} = R \sin \alpha; A_{13} = R^2(1 - \cos \alpha); A_{14} = R^3(-b \sin \alpha + \sin b \alpha)/b(1 - b^2); \\
 A_{15} &= EI(-\sin \alpha)/EA; A_{16} = R^3[(1 - b^2) + b^2 \cos \alpha - \cos b \alpha]/b^2(1 - b^2); \\
 A_{22} &= 1; A_{23} = R \alpha; A_{24} = R^2(1 - \cos b \alpha)/b^2; A_{26} = R^2(\alpha b - \sin b \alpha)/b^3; \\
 A_{34} &= R \sin b \alpha/b; A_{36} = R(1 - \cos b \alpha)/b^2; A_{44} = \cos b \alpha; \\
 A_{46} &= \sin b \alpha/b; A_{51} = EA \sin \alpha/EI; A_{52} = EAR(1 - \cos \alpha)/EI; \\
 A_{53} &= EAR^2(\alpha - \sin \alpha)/EI; A_{54} = EAR^3[(1 - b^2) + b^2 \cos \alpha - \cos b \alpha]/b^2(1 - b^2)EI; \\
 A_{56} &= EAR^3[\alpha b(1 - b^2) + b^3 \sin \alpha - \sin b \alpha]/b^3(1 - b^2)EI; A_{64} = -b \sin b \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

РЕЗУЛЬТАТИ ТА ЇХ ОБГОВОРЕННЯ

Розв'язок задач стійкості при традиційних навантаженнях.
Застосуємо МГЕ для задач стійкості, де відомі точні значення критичних навантажень.

Задача 1. Двохшарнірна арка (рис. 1).

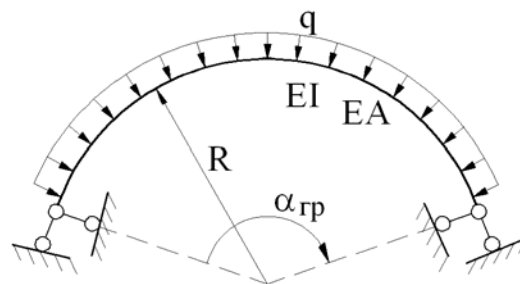


Рис. 1. Двохшарнірна арка

За врахування граничних умов матриці початкових і кінцевих параметрів будуть

$$X_*(0) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} EIv(0)=0; \\ EI\varphi(\alpha_{GP}) \\ EI\varphi(0) \\ M(0)=0; Q(\alpha_{GP}) \\ Q(0) \end{matrix} \quad ; \quad Y(\alpha_{GP}) = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{matrix} EIv(\alpha_{GP})=0 \\ EI\varphi(\alpha_{GP}) \\ M(\alpha_{GP})=0 \\ Q(\alpha_{GP}) \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c}
 5 \\
 6
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 EAu(0)=0; N(\alpha_{ГР}) \\
 \hline
 N(0) \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 5 \\
 6
 \end{array}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 EAu(\alpha_{ГР})=0 \\
 \hline
 N(\alpha_{ГР}) \\
 \hline
 \end{array}$$

З матриці $X_*(0)$ впливає, що в $A_*(q_{кр})$ потрібно обнулити 1,3 і 5 стовпчики. На місце нульових параметрів $X_*(0)$ переносять ненульові параметри $Y(\alpha_{ГР})$. Матриця $A_*(q_{кр})$ крайової задачі стійкості двохшарнірної арки прийме вигляд

$$A_*(q_{кр}) = \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 1 & & A_{12} & & -A_{14} & & A_{16} \\
 2 & -1 & A_{22} & & -A_{24} & & A_{26} \\
 3 & & & & A_{34} & & -A_{36} \\
 4 & & & -1 & A_{44} & & -A_{46} \\
 5 & & A_{52} & & -A_{54} & & A_{56} \\
 6 & & & & -A_{64} & -1 & A_{44} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{12}$$

Критичні значення навантаження визначаються з рівняння МГЕ [1]

$$|A_*(q_{кр})| = 0. \tag{13}$$

Для даної задачі точне критичне навантаження визначається так

$$q_{кр} = [\pi^2 / (\alpha_{ГР} / 2)^2 - 1] EI / R^3.$$

Задача 2. Арка з жорстким защемленням граничних точок.

$$A_*(q_{кр}) = \begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 1 & & & -A_{13} & -A_{14} & & A_{16} \\
 2 & & & -A_{23} & -A_{24} & & A_{26} \\
 3 & -1 & & A_{22} & A_{34} & & -A_{36} \\
 4 & & -1 & & A_{44} & & -A_{46} \\
 5 & & & -A_{53} & -A_{54} & & A_{56} \\
 6 & & & & -A_{64} & -1 & A_{44} \\
 \hline
 \end{array}
 \end{array} \tag{14}$$

Критичні навантаження (значення коефіцієнта K) у формулі

$$q_{кр} = (b^2 - 1)EI / R^3 = KEI / R^3 \tag{15}$$

наведені в табл. 1, з якої видно збіжність із відомими результатами [7], а коефіцієнт $\bar{K}_{МГЕ}$ відноситься до арки з жорстко затисненою і шарнірною опорами.

Таблица 1

$\alpha_{ГР}/2$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
K	73,34	–	18,14	8,00	4,59	3,27	3,00
$K_{МГЕ}$	73,33	32,45	18,14	8,00	4,59	3,27	3,00
$\bar{K}_{МГЕ}$	50,70	22,14	12,15	5,04	2,62	1,63	1,39

Задача 3. Визначити критичне навантаження q , що діє на систему арок (рис. 2) при даних: $R_1 = 10\text{ м}$; $R_2 = 15\text{ м}$; $\alpha_1 = 50^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$; $EI_1 = 17,7\text{ МНм}^2$; $EI_2 = 2EI_1$; $EA_1 = 12EI_1$; $EA_2 = 12EI_2$.

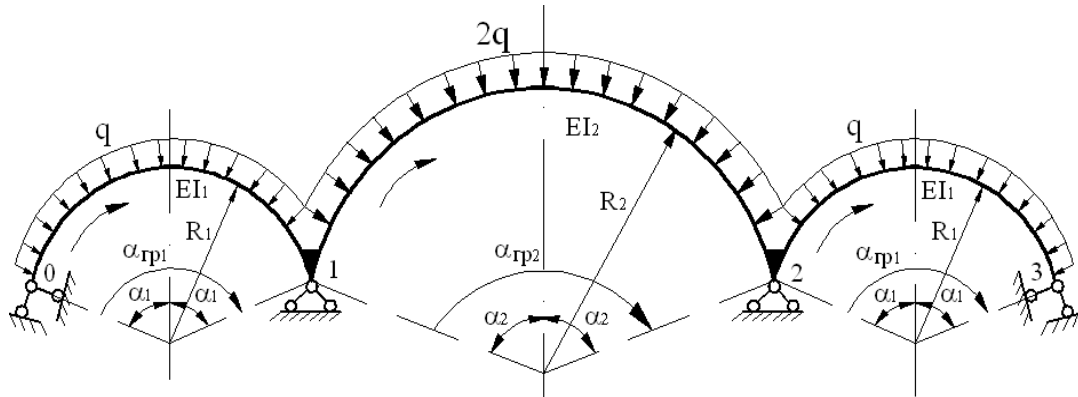


Рис. 2. Система арок

Матриці початкових і кінцевих параметрів системи приймають вид (16). З матриці початкових параметрів $X_*(0)$ впливає, що в $A_*(q_{кр})$ потрібно обнулити 1,3,5,7,11,13 і 17 стовпчики. В неї вводяться компенсуючі елементи, враховуючи перенос граничних параметрів з $Y(\alpha_{ГР})$ в $X_*(0)$. Матриця $A_*(q_{кр})$ рівняння стійкості прийме вигляд (17). Знайдене перше критичне навантаження $q_{кр1} = 62,1\text{ кН/м}$ збігається з даними [2].

Розв’язок задач стійкості при нетрадиційних навантаженнях.

Розглянемо задачі, де рівномірно розподілене навантаження задане на частині арки.

Задача 4. Арка (рис. 3) розбивається на три частини: на ділянках 0-1 і 2-3 має місце статичний вигин, на 1-2 – вигин, пов’язаний із втратою стійкості. У матриці $A_*(q_{кр})$ крайової задачі стійкості доцільно використовувати матрицю (1) для частин 0-1 і 2-3, а для частини 1-2 – матрицю (10).

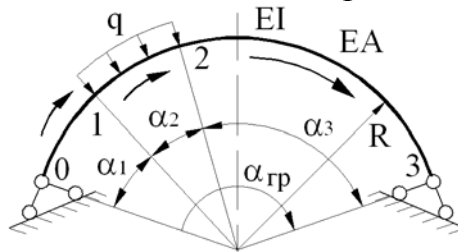


Рис. 3. Розподілене радіальне навантаження на частині арки

$$X_*(0) = \begin{matrix} 1 & EI_1 v_{(0)}^{0-1} = 0; & Q_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1} \\ 2 & EI_1 \varphi_{(0)}^{0-1} \\ 3 & M_{(0)}^{0-1} = 0; & N_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1} \\ 4 & Q_{(0)}^{0-1} \\ 5 & EA_1 u_{(0)}^{1-2} = 0; & Q_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2} \end{matrix} ; Y(\alpha_{ГР}) = \begin{matrix} 1 & EI_1 v_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1} = 0; \\ 2 & EI_1 \varphi_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1} = EI_1 \varphi_{(0)}^{1-2} \\ 3 & M_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1} = M_{(0)}^{1-2} \\ 4 & Q_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1} \\ 5 & EA_1 u_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1} = 0 \end{matrix} \quad (16)$$

6	$N_{(0)}^{0-1}$	6	$N_{(\alpha_{ГР1})}^{0-1}$
7	$EI_2 v_{(0)}^{1-2} = 0; N_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2}$	7	$EI_2 v_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2} = 0$
8	$EI_2 \phi_{(0)}^{1-2}$	8	$EI_2 \phi_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2} = EI_2 \phi_{(0)}^{2-3}$
9	$M_{(0)}^{1-2};$	9	$M_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2} = M_{(0)}^{2-3}$
10	$Q_{(0)}^{1-2}$	10	$Q_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2}$
11	$EA_2 u_{(0)}^{1-2} = 0; EI_1 \phi_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3}$	11	$EA_2 u_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2} = 0$
12	$N_{(0)}^{1-2}$	12	$N_{(\alpha_{ГР2})}^{1-2}$
13	$EI_1 v_{(0)}^{2-3} = 0; Q_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3}$	13	$EI_1 v_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3} = 0$
14	$EI_1 \phi_{(0)}^{2-3}$	14	$EI_1 \phi_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3}$
15	$M_{(0)}^{2-3};$	15	$M_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3} = 0$
16	$Q_{(0)}^{2-3}$	16	$Q_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3}$
17	$EA_1 u_{(0)}^{2-3} = 0; N_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3}$	17	$EA_1 u_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3} = 0$
18	$N_{(0)}^{2-3};$	18	$N_{(\alpha_{ГР1})}^{2-3}$

У граничних точках 1,2 потрібно врахувати неперервність векторів стану арки, а в опорних перетинах 0,3 – крайові умови. Ці умови враховуються точно відповідними рівняннями в матрицях $X_*(0), Y(\alpha_{ГР1})$. З $X_*(0)$ випливає, що в матриці стійкості $A_*(q_{кр})$ потрібно обнулити 1,3 і 5 стовпці. Параметри $Y(\alpha_{ГР1})$ переносяться в $X_*(0)$. При цьому в $A_*(q_{кр})$ вводяться компенсуючі елементи, як і в попередніх задачах. Аналогічно враховуються інші граничні умови. Значення перших критичних навантажень (коефіцієнти K) при різних кутах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ представлені в табл. 2, де K_1 - відноситься до шарнірно опертої арки, K_2 – для жорстко затисненої, K_3 – для жорстко затисненої і шарнірно обпертої.

Зазначимо, що має місце зниження критичних навантажень у порівнянні з повністю завантаженою аркою. При шарнірному опиранні зниження складає 10%, для жорстко затисненої – 53,8% і 17,1% для арки з затисненою і шарнірною опорами $\alpha_1 = \alpha_3 = \pi/4; \alpha_2 = \pi/2$.

Таблиця 2

α_1	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
α_2	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
α_3	$\pi/2$	$5\pi/12$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/12$	0
K_1	4,88	3,51	2,88	2,70	2,88	3,51	4,88
K_2	—	179,01	5,47	3,69	5,47	179,01	—
K_3	—	—	5,49	4,41	4,18	4,52	5,52

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		A_{12}		$-A_{14}$		A_{16}												
2		A_{22}		$-A_{24}$		A_{26}		$\frac{-EI_1}{EI_2}$										
3				A_{34}		$-A_{36}$			-1									
4	-1			A_{44}		$-A_{46}$												
5		A_{52}		$-A_{54}$		A_{56}												
6			-1	A_{64}		A_{44}												
7								A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$		A_{16}						
8								A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		A_{26}		$\frac{-EI_2}{EI_1}$				
9								A_{22}	A_{34}	$-A_{36}$				-1				
10				-1					A_{44}	$-A_{46}$								
11								A_{52}	$-A_{53}$	$-A_{54}$		$-A_{56}$						
12							-1			$-A_{64}$		A_{44}						
13														A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$		A_{16}
14											-1			A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		A_{26}
15															A_{22}	A_{34}		$-A_{36}$
16													-1			A_{44}		$-A_{46}$
17														A_{52}	$-A_{53}$	$-A_{54}$		A_{56}
18																$-A_{64}$	-1	A_{44}

(17)

Задача 5. Арка навантажена зосередженою радіальною силою F з довільною точкою прикладання. Тоді $q(\alpha) = F\delta(\alpha - \alpha_F)$, де $\delta(\alpha - \alpha_F)$ – дельта-функція Дірака; α_F – координата дії сили F . Однак безпосередньо застосувати цю модель у рівнянні стійкості (4) досить важко. У цьому зв'язку скористаємося наближеним підходом, коли кут α_2 (рис. 3) зменшується до малого значення. Знайдена критична сила в цьому випадку дорівнює

$$F_{кр} = q_{кр} R \alpha_2 = KEI / R^2 . \tag{19}$$

$X_*(0) =$		1	$EIv_{(0)}^{0-1} = 0; EI\varphi_{(\alpha_3)}^{2-3}$;	1	$EIv_{(\alpha_1)}^{0-1} = EIv_{(0)}^{1-2}$	(18)
		2	$EI\varphi_{(0)}^{0-1}$		2	$EI\varphi_{(\alpha_1)}^{0-1} = EI\varphi_{(0)}^{1-2}$	
		3	$M_{(0)}^{0-1} = 0; Q_{(\alpha_3)}^{2-3}$		3	$M_{(\alpha_1)}^{0-1} = M_{(0)}^{1-2}$	
		4	$Q_{(0)}^{0-1}$		4	$Q_{(\alpha_1)}^{0-1} = Q_{(0)}^{1-2}$	
		5	$E Au_{(0)}^{0-1} = 0; N_{(\alpha_3)}^{2-3}$		5	$E Au_{(\alpha_1)}^{0-1} = E Au_{(0)}^{1-2}$	
		6	$N_{(0)}^{0-1}$		6	$N_{(\alpha_1)}^{0-1} = N_{(0)}^{1-2}$	
		7	$EIv_{(0)}^{1-2}$		7	$EIv_{(\alpha_2)}^{1-2} = EIv_{(0)}^{2-3}$	
		8	$EI\varphi_{(0)}^{1-2}$		8	$EI\varphi_{(\alpha_2)}^{1-2} = EI\varphi_{(0)}^{2-3}$	
		9	$M_{(0)}^{1-2}$		9	$M_{(\alpha_2)}^{1-2} = M_{(0)}^{2-3}$	
		10	$Q_{(0)}^{1-2}$		10	$Q_{(\alpha_2)}^{1-2} = Q_{(0)}^{2-3}$	

11	$E Au_{(0)}^{1-2}$	11	$E Au_{(\alpha_2)}^{1-2} = E Au_{(0)}^{2-3}$
12	$N_{(0)}^{1-2}$	12	$N_{(\alpha_2)}^{1-2} = N_{(0)}^{2-3}$
13	$E I v_{(0)}^{2-3}$	13	$E I v_{(\alpha_3)}^{2-3} = 0$
14	$E I \varphi_{(0)}^{2-3}$	14	$E I \varphi_{(\alpha_3)}^{2-3}$
15	$M_{(0)}^{2-3}$	15	$M_{(\alpha_3)}^{2-3} = 0$
16	$Q_{(0)}^{2-3}$	16	$Q_{(\alpha_3)}^{2-3}$
17	$E Au_{(0)}^{2-3}$	17	$E Au_{(\alpha_3)}^{2-3} = 0$
18	$N_{(0)}^{2-3}$	18	$N_{(\alpha_3)}^{2-3}$

Величини α_2 для конкретних розрахункових схем арок завжди можуть бути визначені. У розрахунках критичних сил було прийнято $\alpha_2 = 0,01\alpha_{GP}$ і $0,001\alpha_{GP}$. В табл. 3 наведені значення коефіцієнтів K при $\alpha_{GP} = \pi$ і трьох крайових умов: K_1 – двохшарнірна арка; K_2 – жорстко затиснена; K_3 – арка з жорстко затисненою і шарнірною опорами.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		a_{12}		$-a_{14}$		a_{16}	-1											
2		a_{22}		$-a_{13}$		a_{26}		-1										
3				a_{12}		$-a_{36}$			-1									
4				a_{11}		$-a_{46}$				-1								
5		a_{52}		$-a_{54}$		a_{56}					-1							
6				$-a_{64}$		a_{11}						-1						
7							A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	A_{15}	A_{16}	-1					
8								A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$		A_{26}		-1				
9									A_{22}	A_{34}		$-A_{36}$			-1			
10										A_{44}		$-A_{46}$				-1		
11							A_{51}	A_{52}	$-A_{53}$	$-A_{54}$	A_{11}	A_{56}					-1	
12										$-A_{64}$		A_{44}						-1
13													a_{11}	a_{12}	$-a_{13}$	$-a_{14}$	a_{15}	a_{16}
14	-1													a_{22}	$-a_{23}$	$-a_{13}$		a_{26}
15															a_{22}	a_{12}		$-a_{36}$
16			-1													a_{11}		$-a_{46}$
17													a_{51}	a_{52}	$-a_{53}$	$-a_{54}$	a_{11}	a_{56}
18					-1											$-a_{64}$	-1	a_{11}

Таблиця 3

K_i	α_2	α_F					
		$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$	$3\pi/4$
K_1	$0,01\pi$	4,48	2,81	2,02	2,19	2,81	4,48
	$0,001\pi$	4,39	2,78	2,00	2,17	2,78	4,39
K_2	$0,01\pi$	5,46	4,27	π	3,58	4,27	5,46

	$0,001\pi$	5,21	4,15	π	3,51	4,15	5,21
K_3	$0,01\pi$	11,38	5,45	2,75	2,61	2,98	4,26
	$0,001\pi$	10,79	5,32	2,72	2,58	2,94	4,18

З табл. 3 випливає, що значення критичних сил у двох розглянутих випадках відрізняються незначно.

Задача 6. Розглянемо задачі стійкості, коли радіальні навантаження змінюються за лінійним законом (рис. 4):

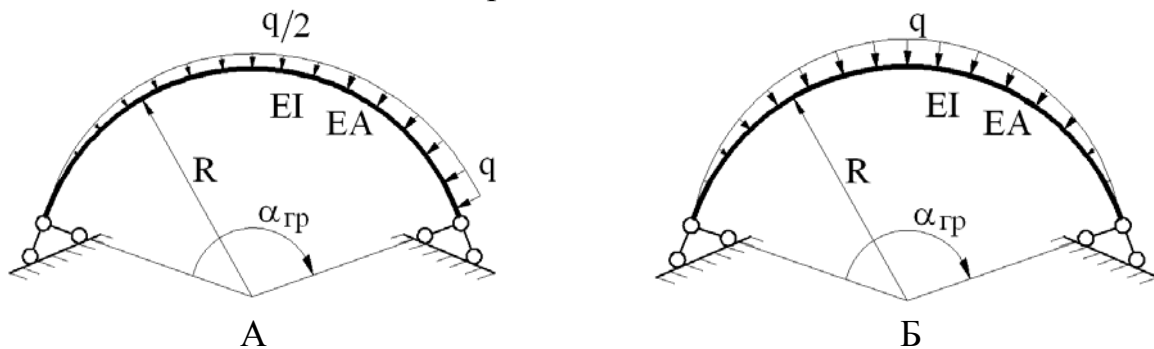


Рис.4. Радіальні навантаження змінюються за лінійним законом

$$a) q(\alpha) = q\alpha/\alpha_{gp}. \quad (21)$$

$$б) q(\alpha) = q[2\alpha/\alpha_{gp} + 2H(\alpha - \alpha_{gp}/2) - 4\alpha H(\alpha - \alpha_{gp}/2)/\alpha_{gp}], \quad (22)$$

де $H(\alpha)$ — одинична функція Хевісайда. За цих умов задачі стійкості арки зводяться до рівняння зі змінними коефіцієнтами. Розв'язок таких рівнянь можна одержати, використовуючи ряди. При цьому виникають значні математичні труднощі. Для її розв'язування використаємо чисельно-аналітичний варіант МГЕ. При цьому арка розбивається на n частин, у межах кожної з яких приймається $q_i = const$ і далі використовується матриця рівняння (10). На границях ділянок необхідно забезпечити неперервність векторів стану, а в опорних перетинах – крайові умови. При великому n східчаста апроксимація функції $q(\alpha)$ буде мало відрізнятися від заданої функції і значення $q_{кр}$ будуть близькі до точного. У табл. 4 представлені значення коефіцієнтів K для задач а), б) (рис. 4). З табл. 4 випливає, що для арки із шарнірними опорами зменшення середнього навантаження в два рази збільшує критичні значення відповідно в два рази.

Задача 7. Ускладнимо задачу 6 ввівши жорсткість, яка лінійно змінюється (рис. 5) згідно виразу

$$EI(\alpha) = EI\{(4 - 6\alpha/\alpha_{gp})[1 - H(\alpha - \alpha_{gp}/2)] + (6\alpha/\alpha_{gp} - 2)H(\alpha - \alpha_{gp}/2)\} \quad (23)$$

Таблиця 4

$q(\alpha)$ по формулі (21)								
$\alpha_{gp}/2$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
K_1	70,77	30,32	16,16	6,05	2,51	1,56	0,88	-
K_3	86,96	37,82	20,63	8,40	4,21	3,14	2,43	1,84
$q(\alpha)$ по формулі (22)								

K_1	39,14	16,77	8,94	3,35	1,39	0,87	0,49	-
K_2	70,89	31,23	17,36	7,51	4,16	3,32	2,79	2,41
K_3	54,86	23,94	13,12	5,43	2,82	2,16	1,77	2,00

У даному випадку ступінчатій апроксимації піддаються два параметри стійкості арки – навантаження q і поперечна жорсткість EI . Аналогічно задачі б арка розбивається на 60 частин, для дискретизованої системи формується матриця $A_*(q_{кр})$ і критичні значення (коэф. K) зведені в табл. 5.

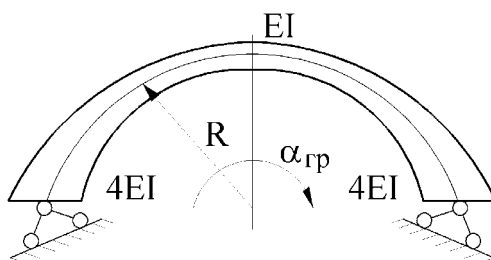


Рис.5

Задача 8. Стійкість кільця. Особливість формування матриці $A_*(q_{кр})$ полягає в тому, що стовпчики не мають нульових початкових параметрів і вводяться компенсуючі елементи, що забезпечують рівність початкових і кінцевих граничних параметрів. Кільце розбивалося на 100 частин. Критичні навантаження наступні: $q_{кр1} = 3EI / R^3$ для $q(\alpha) = const$, що дорівнює точному значенню [6]; $q_{кр1} = 5,828EI / R^3$ для $q(\alpha)$ по формулі (21) і $q_{кр1} = 6,197EI / R^3$ для $q(\alpha)$ за формулою (22) (рис. 4). Ці результати дозволяють оцінити точність запропонованої методики. Похибка складає 2,9% і 3,3% за умови, що коефіцієнти рівняння (4) є лінійними функціями.

Таблиця 5

$q(\alpha) = q; EI(\alpha)$ по формулі (23)								
$\alpha_{зр} / 2$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
K_1	46,90	20,1	10,72	4,02	1,67	1,04	0,59	-
K_2	82,62	36,38	20,2	8,71	4,8	3,81	3,18	2,67
K_3	65,12	28,41	15,58	6,45	3,34	2,57	2,10	2,65
$q(\alpha)$ по формулі (21); $EI(\alpha)$ по формулі (23)								
K_1	93,16	39,93	21,3	7,99	3,33	2,07	1,17	-
K_2	166,63	73,4	40,8	17,64	9,77	7,79	6,55	5,85
K_3	118,65	51,65	28,21	11,54	5,84	4,39	3,47	3,05
$q(\alpha)$ по формулі (22); $EI(\alpha)$ по формулі (23)								
K_1	53,03	22,72	12,11	4,54	1,89	1,17	0,66	-
K_2	88,12	38,74	21,47	9,20	5,01	3,95	3,26	2,69
K_3	71,9	31,35	17,17	7,1	3,66	2,81	2,29	2,69

Висновки

Наведені вище результати вказують на те, що методика розрахунку стійкості арок із змінними параметрами, яка базується на МГЕ, дозволяє ефективно з достатньою для практики точністю розв'язувати складні прикладні задачі.

Література

1. Баженов В.А., Дащенко А.Ф., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Численные методы в механике. – Одесса: СТАНДАРТ, 2005. – 564с.
2. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
3. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568с.
4. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. – М.: Наука, 1988. – 232с.
5. Оробей В.Ф., Работягов Д.Д. Статический расчет комбинированных арочных систем методом граничных интегральных уравнений // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1989. – №12. – с.24–28.
6. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высшая школа, 1991. – 440с.
7. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лашеников Б.Я. и др. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. – М.: Стройиздат, 1984. – 416с.
8. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 807 с.

Аннотация

Рассмотрены задачи стойкости арок с переменными параметрами жесткости и радиальной нагрузки. Для решения данной задачи развито численно-аналитический метод граничных элементов. Приведен алгоритм формирования матрицы граничных задач стойкости арок и арочных систем. Показано, что полученные результаты решения задач стойкости характеризуются высокой точностью.

Annotation

The considered problems to stability of the arches, which have a variable parameters to acerbity and radial load. Integrated differential equation to stability of the sixth order with constant factor. The developed methods of the using numerically-analytical method border element for decision of the presented problems. The stated algorithm of the shaping the matrixes of the marginal problems to stability of the arches and rings. The results of the decision of the problems to stability differ pinpoint accuracy and validity.