УДК. 528.1: 512.1 канд. техн. наук В.М.Гладілін,
Національний авіаційний університет, м. Київ,
Б.Г.Пряха,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ОСОБЛИВОСТІ ГЕОМЕТРІЇ ЦЕНТРАЛЬНИХ СИСТЕМ ТРИКУТНИКІВ

Розглянуто основи дослідження геометричних зв'язків між трикутниками: геодезичного чотирикутника і центральних систем, описано простий спосіб зрівнювання таких побудов, вказано, що перехресні кутові зв'язки не ускладнюють зрівнювання, а навпаки спрощують його.

Постановка проблеми. В геодезичній практиці при створенні планової геодезичної основи, для підвищення жорсткості системи, виникає необхідність в створенні додаткових перехресних кутових зв′язків між вершинами лінійно-кутової системи. Прикладом такої системи може бути геодезичний чотирикутник, а також інші спеціальні геометричні побудови. Створення таких зв′язків приводить до збільшення кількості умовних рівнянь, тому необхідно відмовлятися від перехресних кутових побудов, які ускладнюють зрівнювання системи.

Будь-яка геодезична побудова, яка складається з геометричних фігур, повинна бути замкненою системою. Якщо прийняти, що множина кутів замкнутої системи є якийсь образ, тоді множина сторін буде їх прообразом. В роботі [2] описано алгебраїчне *коло* ***K*** - множина елементів замкненої системи, алгебраїчна сума яких є істинною фізичною величиною. Якщо вирівняти лінійно-кутову побудову, тоді кути створять кола ***K***, а їх образом буде множина сторін системи. Треба зауважити, що від вибору одиниці довжини залежить масштаб відтворення, який не залежить від величин кутів (один і той же кут може мати протилежну йому сторону будь – якої довжини).

X-побудовою назвемо два зв′язані між собою трикутники, які мають одну спільну вершину, а дві сторони одного з трикутників є продовженням двох сторін іншого. На рисунку 1а. показано два X-трикутники. Кути C_{12} і C_{21} трикутників вертикальні, тому $C_{12} = C_{21} = C$.

Трикутники, зображені на рисунках 1*б,в*, мають спільний кут C, з алгебраїчної точки зору вони подібні до X-побудови, але їх геометрія суттєво відрізняється від X-трикутників, тому ці трикутники далі будемо називати X_V - трикутниками.

В одному випадку X_V - трикутники перетинаються (рис.1*в*) і в результаті створюють X- побудову, яку далі позначимо символом X_{Vx}.

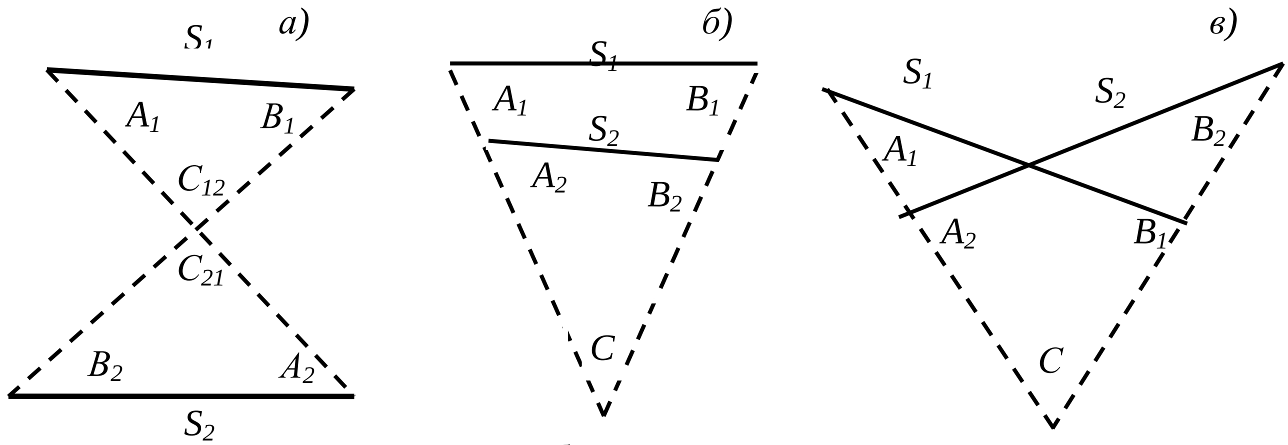

Рис.1. X-побудова, X_V - трикутники.

Для внутрішніх кутів X-трикутників справедливі рівності $\boldsymbol{K_1} = \{A_1, B_1, C_{12}\}$, $\boldsymbol{K_2} = \{A_2, B_2, C_{21}\}$, $A_1 + B_1 + C_{12} = A_2 + B_2 + C_{21} = 180°$, $A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \Rightarrow A_1 - A_2 = B_2 - B_1$. Якщо виміряти кути A_1, B_1, A_2, B_2 (рис.1а), і обчислити кути C_{12} і C_{21}, то значення останніх виявляться різними. Тому до кутів A_1, B_1, A_2, B_2 C_{12}, C_{21} вводять поправки, щоб вони утворили два зв′язані кола $\boldsymbol{X}$. X - трикутники будуть повністю визначені, якщо крім чотирьох кутів виміряти дві сторони S_1, S_2 , які протилежні кутам C_{12}, C_{21}.

На рис.2 показано геодезичний чотирикутник, який являє собою пару повністю зв′язаних X-трикутників.

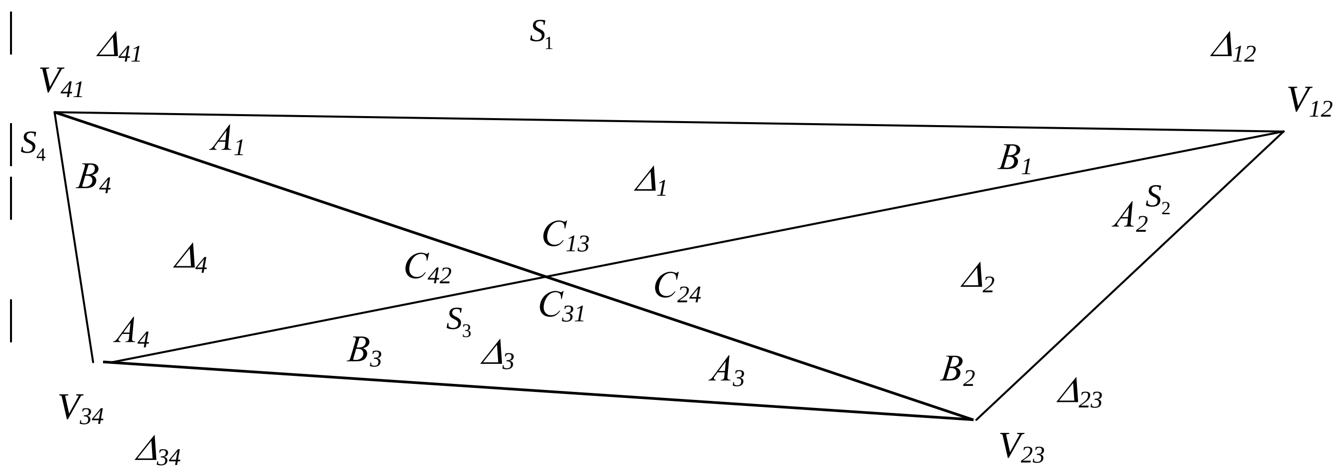

Рис.2. Геодезичний чотирикутник

Позначимо X-трикутники геодезичного чотирикутника символами: Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4. Якщо з ряду вершин чотирикутника $V_{12}, V_{23}, V_{34}, V_{41}$ вибрати по три вершини, а потім з′єднати їх відрізками, одержимо чотири трикутники: Δ_{12}, Δ_{23}, Δ_{34}, Δ_{41}, які далі будемо називати V-трикутниками.

Нехай M - деяка множина кіл $\boldsymbol{K}$ трикутників центральної системи: $M = \{\boldsymbol{K}_i \,/\, \boldsymbol{K}_i = \{A_i, B_i, C_i\}\}$, A_i, B_i, C_i - вирівняні кути трикутників центральної системи, C_i - центральний кут, A_i, B_i впорядковані від C_i за ходом годинникової стрілки так, що після C_i іде A_i , а потім B_i. На цій множині встановимо перетворення φ (рис.3).

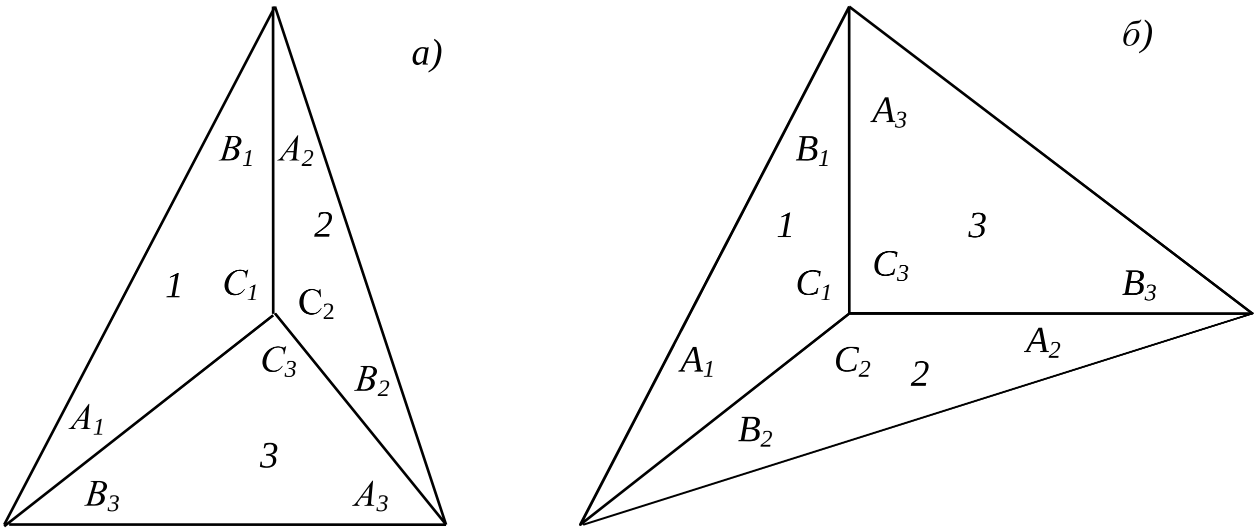

Рис. 3. Перетворення φ - перестановка трикутників

Для центральної системи трикутників порядку $n = 3$ маємо дві перестановки: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$ і множину підстановок порядку $n=2$ $\boldsymbol{K_3} = \{e, \varphi_1\}$,

де $e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $\varphi_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} = (23)$.

Тут e - тотожня підстановка, одиничний елемент, а φ_1 - елемент зворотний одиничному. Під зворотною підстановкою розуміємо таке перетворення, яке отримують з тотожньої підстановки, шляхом транспонування частини нижнього рядку, в результаті чого нерухомий елемент *1* завжди залишається на своєму місці. Операція взяття оберненого елемента від a позначимо як a^{-1}. Тоді: $e^{-1} = e$, $\varphi_1^{-1} = \varphi_1$, тобто φ_1 такий елемент, що в $\boldsymbol{K_3}$ він обернений самому собі. На множині $\boldsymbol{K_3}$ розглянемо операцію послідовного застосування перетворень (суперпозицію - множення підстановок)[1]: $e\varphi_1 = \varphi_1$, $\varphi_1 e = \varphi_1$; $e^2 = e$, $\varphi_1{}^2 = e$.

Відображення φ множини *X*-трикутників $M_X = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$ геодезичного чотирикутника буде складатися з трьох підстановок

$$e = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix} = (234), \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix} = (243). \qquad (4)$$

Встановимо властивості елементів і зв′язки між елементами множини підстановок

$$\boldsymbol{K_4} = \{e, \varphi_1, \varphi_2\};\ \varphi_1^{-1} = \varphi_2,\ \varphi_2^{-1} = \varphi_1;\ e\varphi_1 = \varphi_1 e = \varphi_1,\ e\varphi_2 = \varphi_2 e = \varphi_2,$$

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\,\varphi_1 = e,\ \varphi_1^2 = \varphi_2,\ \varphi_2^2 = \varphi_1,\ \varphi_1^3 = \varphi_2^3 = e.$$

З множини *V*-трикутників $M_V = \{\Delta_{12}, \Delta_{23}, \Delta_{34}, \Delta_{41}\}$ геодезичного чотирикутника (рис.2) вибираємо по одному трикутнику і виконуємо таке перетворення φ, що спочатку береться *V*-кут, а потім по черзі кути *B*, *A*, тоді можна зібрати центральну систему трикутників, в якій кути $V_{12}, V_{23}, V_{34}, V_{41}$ будуть центральними.

Якщо центральна система складена з п'яти або шести трикутників, тоді маємо відповідно дві множини перестановок: $K_5 = \{(12345), (15432), (13254), (14523)\}$, $K_6 = \{(123456), (134562), (162345), (145623), (156234)\}$; і дві множини підстановок: $\boldsymbol{K_5} = \{e, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$,де $\varphi_1 = (25)(34)$, $\varphi_2 = (23)(45)$, $\varphi_3 = (24)(35)$; $\boldsymbol{K_6} = \{e, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$, де $\varphi_1 = (23456)$, $\varphi_2 = (26543)$, $\varphi_3 = (24635)$, $\varphi_4 = (25364)$.

На всіх множинах $\boldsymbol{K_n}$ задається двомісна алгебраїчна операція (множення), при якій кожним двом елементам $\boldsymbol{K}$ відповідає третій елемент із $\boldsymbol{K}$. Множина підстановок $\boldsymbol{K_n}$ є абелевою групою порядку $n-1$. Взагалі група $\boldsymbol{K_n}$ є підгрупа знакозмінної нормальної підгрупи $\boldsymbol{A_n}$ індексу 2 симетричної групи $\boldsymbol{S}_n$ степені *n*, порядку $n!/2$. Всі підстановки в $\boldsymbol{K_n}$ і $\boldsymbol{A_n}$ є парними.

На рис.4 показано два довільні багатокутники: п′ятикутник і восьмикутник. Коли вершину *1* п′ятикутника з′єднати з вершиною *3* пунктирною лінією і продовжувати далі з′єднувати вершини п′ятикутника через одну вершину, то в результаті одержимо одну замкнену ламану лінію. Якщо таку графічну, бінарну операцію з′єднання всіх вершин, виконати на восьмикутнику, або іншому *n*-кутнику (*n*- парне число), тоді картина буде інша - в результаті одержимо два не зв′язані між собою чотирикутники або відповідно два *n/2*-кутники.

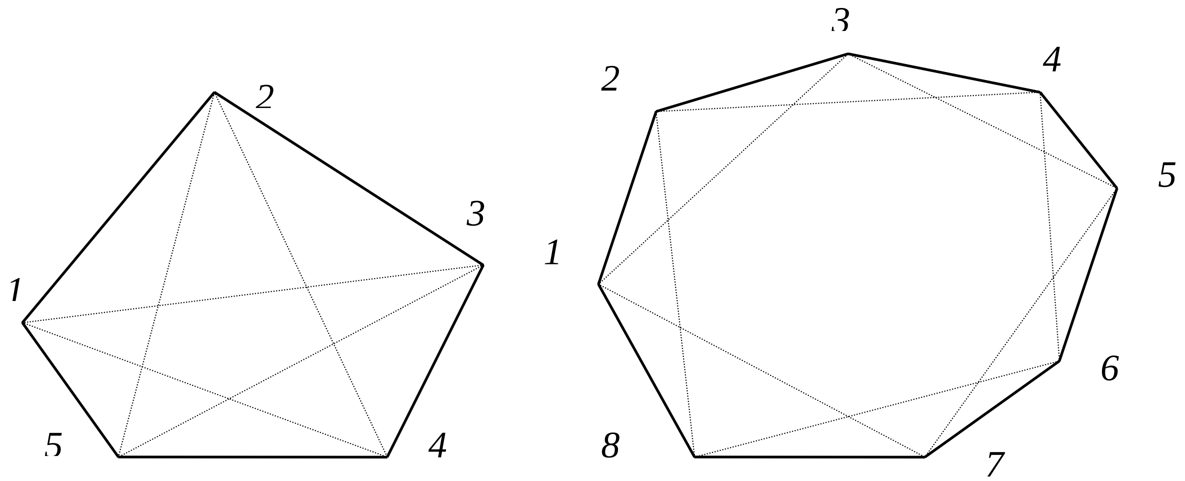

Рис.4. Два багатокутники

Якщо в геодезичному чотирикутнику виміряти всі кути (рис 1), а потім вирівняти *X* , *V*- трикутники, привести до умови горизонту *C*-кути [4], тоді множина всіх кутів чотирикутника буде колом ***K*** [2], а множина підстановок трикутників не створить коло $\boldsymbol{K_n}$, так як чотирикутник не замкнеться (рис 5).

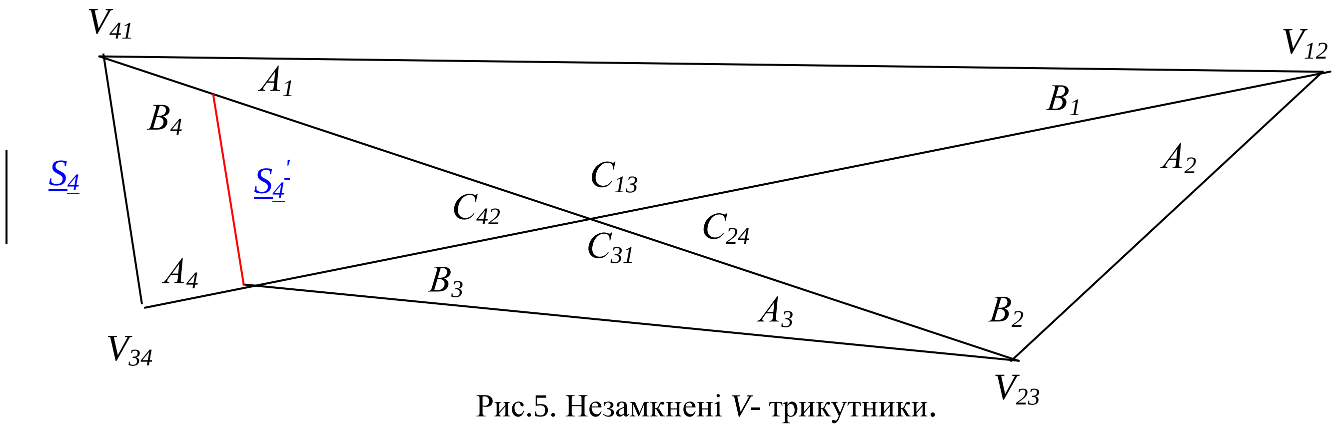

Рис.5. Незамкнені *V*- трикутники.

Щоб привести *V*-трикутники до кола $\boldsymbol{K_n}$, кути *A*, *B* чотирикутника переводять в таке коло ***K*** кутів, щоб вони задовольняли полюсній умові

$$\frac{\sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin A_3 \cdot \sin A_4}{\sin B_1 \cdot \sin B_2 \cdot \sin B_3 \cdot \sin B_4} = 1.$$

В простому способі вирівнювання [4] досліджують, як змінюються логарифми синусів кутів при сталій зміні величини кожного кута і виходячи з цього визначають відповідно для кутів *A, B* однакові за модулем і різні за знаком поправки. Процес вирівнювання значно спрощується, якщо до кола $\boldsymbol{K_n}$ приводити не *V*-трикутники, а *X*-трикутники, причому необхідно виміряти всі зовнішні сторони чотирикутника. Допустимо, що виміряні сторони S_1, S_2, S_3, S_4 чотирикутника (рис.2), а всі кути приведені до кола ***K*** кутів. Спочатку визначають діаметри кіл $D_C^{S_1}$, $D_C^{S_2}$, $D_C^{S_3}$, $D_C^{S_4}$ описаних навколо *X*- трикутників [3] і знаходять сторони цих трикутників, протилежні кутам A, B: $S_{12} = D_C^{S_1} \cdot \sin A_1$, $S_{21} = D_C^{S_2} \cdot \sin B_2$; $S_{23} = D_C^{S_2} \cdot \sin A_2$, $S_{32} = D_C^{S_3} \cdot \sin B_3$; $S_{34} = D_C^{S_3} \cdot \sin A_3$, $S_{43} = D_C^{S_4} \cdot \sin B_4$; $S_{41} = D_C^{S_4} \cdot \sin A_4$, $S_{14} = D_C^{S_1} \cdot \sin B_1$.

Якщо над трикутниками спробувати виконати тотожнє перетворення $\varphi_0 = e$, тобто зібрати з них центральну систему, то вони не замкнуться (рис. 6)

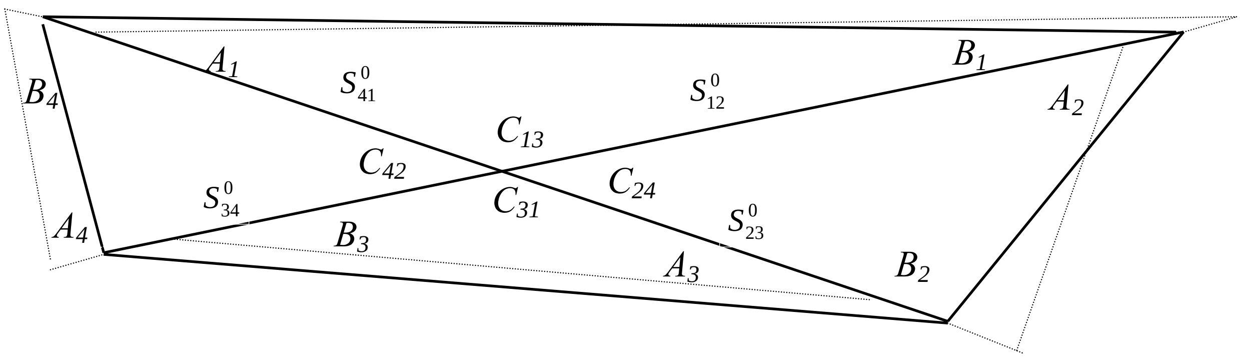

Рис. 6. Приведення *X*- трикутників до кола $\boldsymbol{K_4}$.

Вирівняти геодезичний чотирикутник означає привести утворені X_V, X_{Vx}-трикутники до кола $\boldsymbol{K_4}$. Для цього визначають вирівняні сторони

$$S^0_{12} = (S_{12} + S_{21})/2\ ,\ S^0_{23} = (S_{23} + S_{32})/2\ ,\ S^0_{34} = (S_{34} + S_{43})/2\ ,\ S^0_{41} = (S_{41} + S_{14})/2\ .$$

Оскільки вирівняні сторони S^0_{12}, S^0_{23}, S^0_{34}, S^0_{41} і центральні кути C_{13}, C_{24}, C_{31}, C_{42} відомі, то це дає можливість визначити зовнішні вирівняні сторони і інші кути геодезичного чотирикутника.

ЛІТЕРАТУРА

1. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. - М.: Наука, 1973.
2. Пряха Б.Г. Властивості істинних похибок.//Інженерна геодезія.Вип. 41.-1999.-С. 145-147.
3. Пряха Б.Г. Вирівнювання вільної станції.// Інженерна геодезія. Вип. 39.- 1997.-С. 94-98.
4. Степанов Н.Н. Инженерная геодезия и военная топография. ВВИТКУ, Л., 1963.-С. 257-271.

Аннотация

Рассмотрено основы исследования геометрических связей между треугольниками: геодезического четырехугольника и центральных систем, описано простейший способ уравнивания таких построений, указано, что перекресные угловые связи не усложняют уравнивания, а наоборот упрощают его.

Annotation

Basis research of communications between triangles of geometry figures in this article.