УДК 514.7

к.т.н., доцент Аушева Н.М.,
Національний технічний університет України «КПІ»

КОНСТРУЮВАННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ГЕОДЕЗИЧНОЮ ЛІНІЄЮ БЕЗ'Є

У роботі досліджується метод побудови мінімальних поверхонь на основі ізотропних кривих Без'є 3-го порядку. В якості напрямної кривої обирається геодезична лінія поверхні. Знайдені умови для формування ізотропної геодезичної кривої Без'є. Наводиться приклад конструювання напрямної кривої методом деформації кривої у площині.

<u>*Ключові слова:*</u> *крива Без'є, геодезична лінія, мінімальна поверхня, ізотропна крива, ортогональна сітка.*

Постановка проблеми. При конструюванні поверхонь часто виникає необхідність пошуку на них спеціальних ліній і їх сімей. Як правило, ця задача обумовлена вимогами практичного характеру, що пов'язана із властивостями цих кривих. Тому актуальним питанням є конструювання поверхонь таким чином, щоб задані криві були спеціальними лініями поверхні. Саме до таких ліній і відносяться геодезичні криві.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В дисертаційному дослідженні проф. Пилипаки С.Ф. розглядається новий напрям конструювання поверхонь та їх неперервного згинання в кінцеві форми на основі використання натуральних параметрів. Конструювання поверхонь здійснюється на основі спеціальних напрямних кривих. Дисертацію [2] присвячено конструюванню і перетворенню поверхонь із збереженням ортогональних сіток координатних ліній та ліній кривини. Автором роботи [3] пропонується використовувати ізотропні криві для моделювання алгебраїчних мінімальних поверхонь. Автором знайдені параметричні рівняння просторових кривих нульової довжини та побудовані відповідні мінімальні поверхні. У роботах [4-6] проводиться дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є.

Цілі статті. Метою даної роботи є розробка способу конструювання поверхонь за напрямною геодезичною ізотропною лінією Без'є.

Основна частина. Для визначення дійсної мінімальної поверхні скористаємося методом Вейєрштрасса [3]. Візьмемо у якості напрямної – ізотропну криву Без'є третього порядку. Мінімальна поверхня буде визначатися на основі виразу:

$$r(u,v) = \mathrm{Re}(\sum_{j=0}^{3} r_j J_{n,j}(u+iv)), \text{ де}$$
$$J_{3,j}(u+iv) = \frac{3!}{j!(3-j)!} t^j (1-u-iv)^{3-j}, \quad (1)$$
де $r_j = \left[x_{j\mathrm{Re}} + x_{j\mathrm{Im}} \quad y_{j\mathrm{Re}} + y_{j\mathrm{Im}} \quad z_{j\mathrm{Re}} + z_{j\mathrm{Im}} \right], \ j = 0..3.$

Знайдемо рівняння мінімальних поверхонь, якщо напрямна ізотропна крива Без'є буде геодезичною лінією поверхні. Для виконання цієї умови достатньо, щоб дотична площина до поверхні в кожній точці напрямної кривої співпадала із спрямною площиною кривої.

Рівняння дотичної площини до поверхні в точках напрямної кривої має вигляд:

$$\begin{vmatrix} X - x(u_0,0) & Y - y(u_0,0) & Z - z(u_0,0) \\ x_u(u_0,0) & y_u(u_0,0) & z_u(u_0,0) \\ x_v(u_0,0) & y_v(u_0,0) & z_v(u_0,0) \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

де $(u_0,0)$ – значення параметру точки дотику напрямної кривої.

Рівняння спрямної площини до кривої буде мати вигляд:

$$\begin{vmatrix} X - x_k(u_0) & Y - y_k(u_0) & Z - z_k(u_0) \\ x'_k(u_0) & y'_k(u_0) & z'_k(u_0) \\ \begin{vmatrix} y'_k(u_0) & z'_k(u_0) \\ y''_k(u_0) & z''_k(u_0) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z'_k(u_0) & x'_k(u_0) \\ z''_k(u_0) & x''_k(u_0) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'_k(u_0) & y'_k(u_0) \\ x''_k(u_0) & y''_k(u_0) \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

де u_0 – значення параметру точки, через яку проводиться спрямна площина до напрямної кривої.

Знайдемо часткові похідні для поверхні, яка задана рівнянням (1) та підставимо значення параметру $v = 0$:

$$r_u(u,0) = 3(r_{1\mathrm{Re}} - r_{0\mathrm{Re}})(1-u)^2 + 6(r_{2\mathrm{Re}} - r_{1\mathrm{Re}})(1-u)u + 3(r_{3\mathrm{Re}} - r_{2\mathrm{Re}})u^2, \quad (4)$$
$$r_v(u,0) = -3(r_{1\mathrm{Im}} - r_{0\mathrm{Im}})(1-u)^2 - 6(r_{2\mathrm{Im}} - 6r_{1\mathrm{Im}})(1-u)u - 3(r_{3\mathrm{Im}} - r_{2\mathrm{Im}})u^2. \quad (5)$$

Тепер визначимо першу похідну та другу похідну для напрямної кривої:

$$r'_k(u) = 3(r_{1\mathrm{Re}} - r_{0\mathrm{Re}})(1-u)^2 + 6(r_{2\mathrm{Re}} - r_{1\mathrm{Re}})(1-u)u + 3(r_{3\mathrm{Re}} - r_{2\mathrm{Re}})u^2. \quad (6)$$
$$r''_k(u) = 6(r_{2\mathrm{Re}} - 2r_{1\mathrm{Re}} + r_{0\mathrm{Re}})(1-u) + 6(r_{31\mathrm{Re}} - 2r_{2\mathrm{Re}} + r_{1\mathrm{Re}})u. \quad (7)$$

Проаналізуємо рівняння дотичної та спрямної площин. Якщо підставити рівняння (1), (4), (6) у перший та другий рядок виразів (2) та (3), то видно, що вони дорівнюють один одному. Для того, щоб дотична площина співпадала зі спрямної необхідно, щоб виконувались залежності:

$$\begin{vmatrix} y'_k(u_0) & z'_k(u_0) \\ y''_k(u_0) & z''_k(u_0) \end{vmatrix} = x_v(u_0,0); \quad \begin{vmatrix} z'_k(u_0) & x'_k(u_0) \\ z''_k(u_0) & x''_k(u_0) \end{vmatrix} = y_v(u_0,0);$$
$$\begin{vmatrix} x'_k(u_0) & y'_k(u_0) \\ x''_k(u_0) & y''_k(u_0) \end{vmatrix} = z_v(u_0,0). \tag{8}$$

Підставимо у залежності (8) рівняння (5), (6) та (7). Та будемо прирівнювати коефіцієнти при відповідних степенях параметру u. Одержимо:

$$\begin{aligned}
&-(x_{1\,\mathrm{Im}} - x_{0\,\mathrm{Im}}) = 6(y_{1\,\mathrm{Re}} - y_{0\,\mathrm{Re}})(z_{2\,\mathrm{Re}} - z_{1\,\mathrm{Re}}) - 6(z_{1\,\mathrm{Re}} - z_{0\,\mathrm{Re}})(y_{2\,\mathrm{Re}} - y_{1\,\mathrm{Re}});\\
&-(x_{2\,\mathrm{Im}} - x_{1\,\mathrm{Im}}) = 3(y_{1\,\mathrm{Re}} - y_{0\,\mathrm{Re}})(z_{3\,\mathrm{Re}} - z_{2\,\mathrm{Re}}) - 3(z_{1\,\mathrm{Re}} - z_{0\,\mathrm{Re}})(y_{3\,\mathrm{Re}} - y_{2\,\mathrm{Re}});\\
&-(x_{3\,\mathrm{Im}} - x_{2\,\mathrm{Im}}) = 6(y_{2\,\mathrm{Re}} - y_{1\,\mathrm{Re}})(z_{3\,\mathrm{Re}} - z_{2\,\mathrm{Re}}) - 6(z_{2\,\mathrm{Re}} - z_{1\,\mathrm{Re}})(y_{3\,\mathrm{Re}} - y_{2\,\mathrm{Re}});
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&-(y_{1\,\mathrm{Im}} - y_{0\,\mathrm{Im}}) = 6(z_{1\,\mathrm{Re}} - z_{0\,\mathrm{Re}})(x_{2\,\mathrm{Re}} - x_{1\,\mathrm{Re}}) - 6(x_{1\,\mathrm{Re}} - x_{0\,\mathrm{Re}})(z_{2\,\mathrm{Re}} - z_{1\,\mathrm{Re}});\\
&-(y_{2\,\mathrm{Im}} - y_{1\,\mathrm{Im}}) = 3(z_{1\,\mathrm{Re}} - z_{0\,\mathrm{Re}})(x_{3\,\mathrm{Re}} - x_{2\,\mathrm{Re}}) - 3(x_{1\,\mathrm{Re}} - x_{0\,\mathrm{Re}})(z_{3\,\mathrm{Re}} - z_{2\,\mathrm{Re}});\\
&-(y_{3\,\mathrm{Im}} - y_{2\,\mathrm{Im}}) = 6(z_{2\,\mathrm{Re}} - z_{1\,\mathrm{Re}})(x_{3\,\mathrm{Re}} - x_{2\,\mathrm{Re}}) - 6(x_{2\,\mathrm{Re}} - x_{1\,\mathrm{Re}})(z_{3\,\mathrm{Re}} - z_{2\,\mathrm{Re}});
\end{aligned} \tag{10}$$

Якщо виконуються умови (9) та (10), тоді напрямна ізотропна крива Без'є третього порядку буде *геодезичною*.

Розглянемо деякі випадки формування ізотропної кривої таким чином, щоб виконувались умови для напрямної геодезичної лінії.

- *напрямна крива будується за допомогою деформації плоскої кривої*. Для конструювання ізотропної кривої на основі деформації [7] необхідно щоб виконувались наступні умови:

$$z_1 = z_0; \quad y_3 = \frac{-2(z_2 - z_1)^2 - (x_1 - x_0)(x_3 - x_2)}{(y_1 - y_0)} + y_2;$$
$$z_3 = \frac{2(y_2 - y_1)(z_2 - z_1)}{(y_1 - y_0)} + z_2; \quad x_3 = \frac{-(z_2 - z_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}{(x_1 - x_0)} + x_2. \tag{11}$$

Підставимо значення координат кривої після деформації у рівняння (8) та будемо проводити розрахунки аналогічно попередньому алгоритму, а саме прирівнювати коефіцієнти при відповідних степенях параметру u.

Одержимо залежності:

$$z_{2\,\mathrm{Re}} = 1/6 + z_{0\,\mathrm{Re}}\ ;\quad x_{2\,\mathrm{Im}} = \frac{x_{1\,\mathrm{Im}}(x_{2\,\mathrm{Re}} - x_{0\,\mathrm{Re}}) - x_{0\,\mathrm{Im}}(x_{2\,\mathrm{Re}} - x_{1\,\mathrm{Re}})}{x_{1\,\mathrm{Re}} - x_{0\,\mathrm{Re}}} \tag{12}$$

Приклад 1. Побудуємо мінімальну поверхню з напрямною геодезичною кривою на основі деформації, якщо задані такі початкові значення: $x_0 = 0.0 - 0.0i$, $y_0 = 3.0 + 4.0i$, $x_1 = 2.0 + 8.0i$, $x_{2\,\mathrm{Re}} = 6.0$, $z_0 = 4.0 + 0.0i$, $z_2 = 4.0 + 5.0i$, $z_{2\,\mathrm{Im}} = -6.0$.

Для знаходження координат напрямної кривої скористаємось умовами (12), які визначають умови того, що крива буде геодезичною. Одержимо:

$$z_{2\,\mathrm{Re}} = (1.0/6.0) + x_{0\,\mathrm{Re}} = (1.0/6.0)$$

$$x_{2\,\mathrm{Im}} = \frac{8.0(6.0 - 0.0) + 0.0(6.0 - 2.0)}{2.0 - 0.0} = \frac{48.0}{2.0} = 24.0.$$

Всі інші координати знаходяться з умов деформації. На рис.1. відображена побудована поверхня.

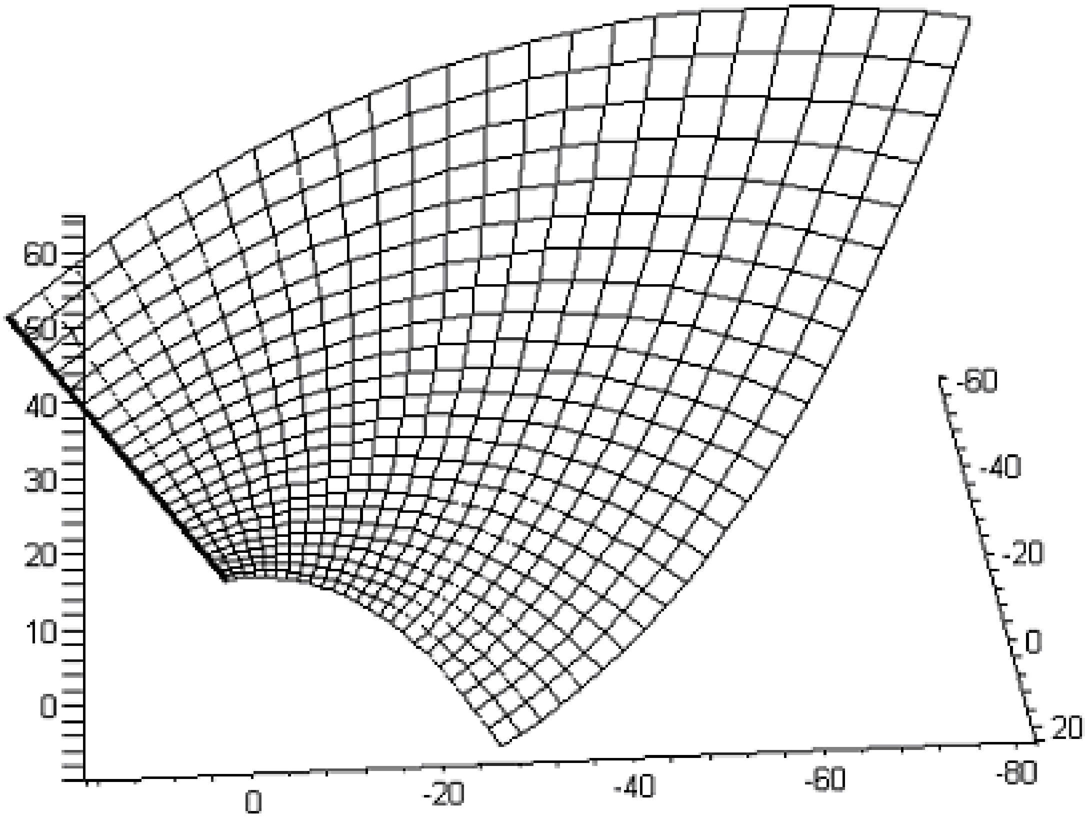

Рис.1. Мінімальна поверхня с напрямною ізотропною кривою Без'є, що побудована на основі деформації плоскої кривої та є геодезичною

При аналізі можна побачити, що крива Без'є перетворюється на пряму, тому що вона є лінією кривини та геодезичною. Рівняння дотичної площини до поверхні та стичної площини до напрямної кривої:

$$x(u) = -24.0 - 48.0u - 11.48u^2;\ y(u) = -6.0 - 12.0u - 2.12u^2;$$

$$z(u) = -36.0u + 36.0u^2.$$

Твердження 1. Ізотропна крива Без'є буде геодезичною кривою при будь-яких значеннях, якщо дві координати точок характеристичного чотирикутника будуть суто дійсні, а одна – уявна.

Доведення. Нехай $x_k = x_k(u)$ та $y_k = y_k(u)$ - дійсні координати, а $z_k = z_k(u)i$ - складається лише з уявної частини. Тоді в умовах (9) та (10): $x_{i\,\mathrm{Im}} = 0$, $y_{i\,\mathrm{Im}} = 0$ та $z_{i\,\mathrm{Re}} = 0$ ($i = 0..3$), тобто одержимо тотожність.

- напрямна крива будується за основі двох дійсних координат та однієї уявної. Задамо координати x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, x_2, y_2. В цьому випадку можемо послідовно розв'язувати рівняння для ізотропності кривих [4].

Приклад 2. Побудуємо мінімальну поверхню з напрямною геодезичною кривою, яка побудована на основі двох дійсних координат та однієї уявної, якщо задані такі початкові значення: $x_0 = 0.0$, $y_0 = 3.0$, $x_1 = 4.0$, $y_1 = 8.0$, $x_2 = 10.0$, $z_0 = 3.0i$, $y_2 = 5.0$.

Знайдемо послідовно координати на основі умов ізотропності:

$$z_1 = i\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} + z_0 = 9.403i,$$

$$z_2 = \frac{-(x_1 - x_0)(x_2 - x_1) - (y_1 - y_0)(y_2 - y_1)}{z_1 - z_0} + z_1 = 10.809i,$$

$$y_3 = f(x_3, z_3) = -18.052 - 0.8x_3 - 1.28z_3 i,\ z_3 = f(x_3) = 4.639i + 1.6x_3 i,$$

$$(x_3 - 10.0)^2 + (-23.05 - 0.8x_3 - 1.28i(1.6x_3 i + 4.64i))^2 + (1.6x_3 i - 6.17i)^2 = 0.$$

Після розв' язання одержимо: $x_3 = [-2.21 \cdot 10^{10}, 8.24]$. Оберемо один корінь та знайдемо інші координати: $x_3 = 8.24$, $z_3 = 17.84i$, $y_3 = -1.8$. Одержимо мінімальну поверхню з геодезичною напрямною (рис.2):

$$x(u,v) = 12u + 6u^2 - 6v^2 - 9.76u^3 + 29.27uv^2,$$

$$y(u,v) = 3 + 15u - 24u^2 + 24v^2 + 4.19u^3 - 12.59uv^2,$$

$$z(u,v) = -19.21v + 29.99uv - 31.86u^2 v + 10.62v^3.$$

Рівняння дотичної площини до поверхні та стичної площини до напрямної кривої:

$$x(u,v) = 0,\quad y(u,v) = 0,\ z(u,v) = 1 - 1.56u + 1.66u^2.$$

Твердження 2. Ізотропна крива Без'є буде геодезичною кривою при будь-яких значеннях, якщо уявні частини координат x та y рівні, а для координати z - дійсні координати точок характеристичного чотирикутника дорівнюють між собою.

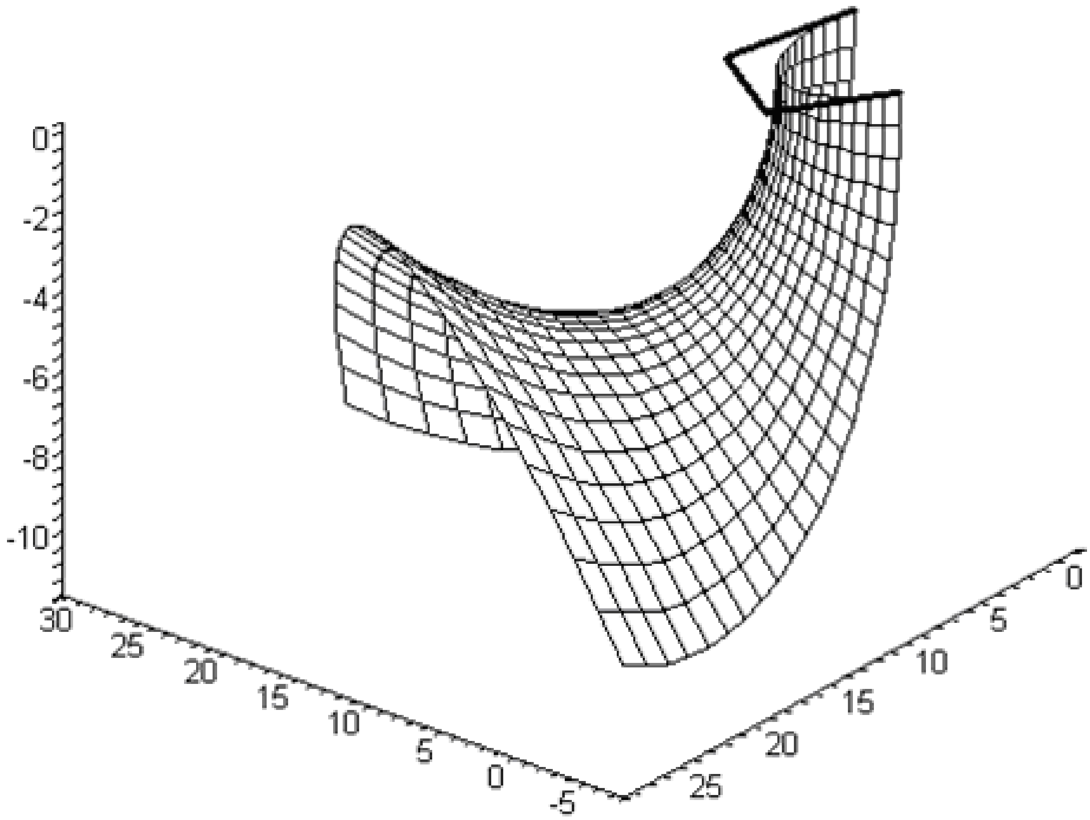

Рис.2. Мінімальна поверхня с напрямною геодезичною ізотропною кривою Без'є

Доведення. Якщо виконується рівність уявних частин для $x_k = x_{k\,\mathrm{Re}}(u) + x_{k\,\mathrm{Im}}(u)$ та $y_k = y_{k\,\mathrm{Re}}(u) + y_{k\,\mathrm{Im}}(u)$ та рівність дійсних частин для $z_k = z_{k\,\mathrm{Re}}(u) + z_{k\,\mathrm{Im}}(u)$, тоді в умовах (9) та (10) одержимо тотожну рівність 0.

Висновки. Дослідження показали, що мінімальну поверхню можна одержати на основі напрямної геодезичної ізотропної кривої. При моделюванні кривої за методом деформації плоскої ізотропної кривої Без'є третього порядку крива вироджується у пряму. Подальші дослідження пов'язані з конструюванням поверхонь на основі ізотропних кривих за іншими спеціальними лініями поверхні.

Література

1. Пилипака С.Ф. Конструювання поверхонь та їх неперервне згинання в кінцеві форми на основі управління натуральними параметрами: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка" / С.Ф. Пилипака. - К.: КНУБА, 2000. - 35 с.

2. Дзюба В.В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини: : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 „Прикладна геометрія, інженерна графіка” / В.В. Дзюба. - К.: КНУБА, 2008. - 21 с.

3. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна / В. Бляшке. - Главная редакция общетехнической литературы и номографии, 1935. - 330 с.

4. Аушева Н. М. Ізотропні багатокутники ізотропних кривих Без`є / Н.М. Аушева // Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.88.-К.:КНУБА, 2011р. - С.57-61.

5. Аушева Н.М. Моделювання мінімальних поверхонь Без`є / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.50.-Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.

6. Аушева Н.М. Визначення сім’ї мінімальних поверхонь з напрямною кривою Без`є на базі процесора SIMD-архітектури / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.57.- Мелітополь: ТДАТУ, 2013. - С.10-16.

7. Аушева Н. М. Згинання мінімальних поверхонь в комплексному просторі деформацією напрямної кривої Без`є / Н.М. Аушева, А. А. Демчишин// Міжвідомчий науково-технічний збірник „Прикладна геометрія та інженерна графіка”.-Вип.90.-К.:КНУБА, 2012р. - С.15-19.

Аннотация

В работе исследуется метод построения минимальных поверхностей на основе изотропных кривых Безье 3-го порядка. В качестве направляющей кривой выбирается геодезическая линия поверхности. Найдены условия для формирования изотропной геодезической кривой Безье. Приводится пример конструирования направляющей кривой методом деформации кривой в плоскости.

Ключевые слова: кривая Безье, геодезическая линия, минимальная поверхность, изотропная кривая, ортогональная сетка.

Annotation

The paper proposed a method for constructing of minimal surfaces basing on isotropic Bezier curve of the 3rd order. Geodesic line of the surface is chosen as the guide curve. Conditions for the formation of an isotropic geodesic Bezier curve were found. An example of the guide curve constructing using the method of straining a curve into a plane was performed.

Keywords: Bezier curve, geodesic line, minimal surface, isotropic curve, orthogonal grid.