

КОНСТРУЮВАННЯ ПОВЕРХОНЬ ТА ОРТОГОНАЛЬНИХ СІТОК НА ОСНОВІ ІЗОТРОПНОГО ПАРАМЕТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА

Досліджується спосіб побудови поверхонь та сіток на основі ізотропного параметричного многочлена Лагранжа. Знайдено умови для формування ізотропної кривої. Пропонується формувати сітки на основі конформної та квазіконформної заміни параметра. Наводяться приклади моделювання поверхні з ортогональною сіткою.

Ключові слова: параметричний многочлен Лагранжа, ізотропна крива, мінімальна поверхня, ортогональна сітка, напрямна крива.

Постановка проблеми. При моделюванні сіток та поверхонь основною задачею є проходження через початкові задані точки. Найчастіше, при створенні інтерактивного режиму користувача, використовуються криві Без'є, які дозволяють керувати формою кривою, але тоді необхідно виконувати додаткові обчислення проміжних точок [1]. Для уникнення цих обчислень можна застосувати многочлени Лагранжа [2]. При створенні поверхонь та сіток на площині зі спеціальними властивостями (ортогональність та ізотермічність) доцільно використовувати властивості ізотропних кривих [3]. Тому актуальним питанням є дослідження з конструювання поверхонь та сіток на основі ізотропних кривих, що побудовані за допомогою многочлена Лагранжа.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [4, 5] проводиться дослідження побудови мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є. Робота [6] направлена на моделювання плоскої сітки на основі ізотропної кривої за годографом Піфагора (РН). Для розширення класу кривих, що використовуються, були проведені дослідження з дробово-раціональними ізотропними кривими [7].

Цілі статті. Метою даної роботи є розробка способу конструювання поверхонь та сіток за напрямною ізотропною кривою у вигляді полінома Лагранжа.

Основна частина.

Розглянемо спочатку моделювання ізотропної кривої. Глобальний інтерполяційний многочлен Лагранжа задається в явному вигляді таким чином:

$$L(x) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(x), \text{ де } l_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_j - x_k)}. \quad (1)$$

Перейдемо до параметричного многочлена:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{j=0}^n r_j l_j(t), \text{ де } l_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(t - t_k)}{(t_j - t_k)}, \quad (2)$$

де $\mathbf{r}_j = [x_j \quad y_j]$

Застосуємо в рівнянні (2) умову ізотропності відрізків, якщо мати на увазі, що точки лежатимуть на кривій. Тобто ланки ізотропного багатокутника в даному випадку будуть хордами нульової довжини. Одержимо:

$$x(t) = \sum_{j=0}^n x_j l_j(t), \quad y(t) = \sum_{j=0}^n y_j l_j(t), \text{ де } y_{j+1} = i(x_{j+1} - x_j) + y_j \quad (3)$$

Для аналізу виразів (3) наведемо конкретний приклад. Візьмемо $n = 3$ та назначимо $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{2}{3}$, $t_3 = 1$. Будемо мати:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + (-5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3)t + (9x_0 - 22.5x_1 + 18x_2 \\ &\quad - 4.5x_3)t^2 + (-4.5x_0 + 13.5x_1 - 13.5x_2 + 4.5x_3)t^3, \\ y(t) &= y_0 + i(-5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3)t + i(9x_0 - 22.5x_1 + 18x_2 \\ &\quad - 4.5x_3)t^2 + i(-4.5x_0 + 13.5x_1 - 13.5x_2 + 4.5x_3)t^3. \end{aligned} \quad (4)$$

Візьмемо похідну від виразів (4):

$$\begin{aligned} x'(t) &= -5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3 + (18x_0 - 45x_1 + 36x_2 - 9x_3)t + \\ &\quad + (-13.5x_0 + 40.5x_1 - 40.5x_2 + 13.5x_3)t^2, \\ y'(t) &= i(-5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3) + i(18x_0 - 45x_1 + 36x_2 - 9x_3)t + \\ &\quad + i(-13.5x_0 + 40.5x_1 - 40.5x_2 + 13.5x_3)t^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо проаналізувати вирази (5), то видно, що абсциса від ординати відрізняється тільки на уявну одиницю. Тобто довжина такої кривої буде дорівнювати 0.

Застосуємо для моделювання сітки ізотропну криву (2). Виконаємо конформну заміну параметра $t = u + iv$ та виділимо дійсну частину, будемо мати:

$$\operatorname{Re}(x(u + iv)) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^n x_j l_j(u + iv)\right), \quad \operatorname{Re}(y(u + iv)) = \operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^n y_j l_j(u + iv)\right), \quad (6)$$

$$\text{де } y_{j+1} = i(x_{j+1} - x_j) + y_j, \quad l_j(u + iv) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{(u + iv) - t_k}{t_j - t_k}.$$

Тепер перейдемо до аналізу сітки для конкретного степеня. Підставимо у вираз (6) $n=3$, $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{1}{3}$, $t_2 = \frac{2}{3}$, $t_3 = 1$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(x(u+iv)) = & \operatorname{Re}(x_0 + (-5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3)(u+iv) + (9x_0 - \\ & - 22.5x_1 + 18x_2 - 4.5x_3)(u+iv)^2 + (-4.5x_0 + 13.5x_1 - 13.5x_2 + \\ & + 4.5x_3)(u+iv)^3), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(y(u+iv)) = & \operatorname{Re}(y_0 + i(-5.5x_0 + 9x_1 - 4.5x_2 + x_3)(u+iv) + i(9x_0 - \\ & - 22.5x_1 + 18x_2 - 4.5x_3)(u+iv)^2 + i(-4.5x_0 + 13.5x_1 - 13.5x_2 + \\ & + 4.5x_3)(u+iv)^3). \end{aligned}$$

Відокремимо дійсну частину від виразу (7) та проаналізуємо одержану сітку. Для цього розрахуємо часткові похідні та порівняємо одержані похідні:

$$x_v(u,v) = y_u(u,v), \quad x_u(u,v) = -y_v(u,v). \quad (8)$$

Рівняння (8) є аналогом умови Коши-Рімана. Одержані рівняння підставимо у вирази для першої квадратичної форми:

$$\begin{aligned} F = x_u(u,v)x_v(u,v) + y_u(u,v)y_v(u,v) &= x_u(u,v)y_u(u,v) - y_u(u,v)x_u(u,v) = 0, \\ E = x_u(u,v)^2 + y_u(u,v)^2 &= y_v(u,v)^2 + y_u(u,v)^2, \\ G = x_v(u,v)^2 + y_v(u,v)^2 &= y_u(u,v)^2 + y_v(u,v)^2, \text{ тобто } E = G. \end{aligned}$$

Значення $F = 0$ означає, що побудована сітка є ортогональною, а $E = G$ – ізотермічною.

Приклад 1. Побудуємо сітку на основі многочлена Лагранжа 5-го порядку, якщо задано значення $x_{0\operatorname{Re}} = 1$, $x_{1\operatorname{Re}} = 3$, $x_{2\operatorname{Re}} = 6$, $x_{3\operatorname{Re}} = 8$, $x_{4\operatorname{Re}} = 10$, $x_{5\operatorname{Re}} = 15$, $y_{0\operatorname{Re}} = 0$, $y_{1\operatorname{Re}} = 1$, $y_{2\operatorname{Re}} = 2$, $y_{3\operatorname{Re}} = 3$, $y_{4\operatorname{Re}} = 4$, $y_{5\operatorname{Re}} = 5$, $y_{4\operatorname{Re}} = 4$, $y_{5\operatorname{Re}} = 5$, $x_{0\operatorname{Im}} = 2$, $y_{0\operatorname{Im}} = 3$. Розрахуємо на основі виразів (3) значення точок для уявної кривої: $x_{1\operatorname{Im}} = 1$, $y_{1\operatorname{Im}} = 5$, $x_{2\operatorname{Im}} = 0$, $y_{2\operatorname{Im}} = 8$, $x_{3\operatorname{Im}} = -1$, $y_{3\operatorname{Im}} = 10$, $x_{4\operatorname{Im}} = -2$, $y_{4\operatorname{Im}} = 12$, $x_{5\operatorname{Im}} = -3$, $y_{5\operatorname{Im}} = 17$. Задамо значення параметрів: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, $t_4 = 4$, $t_5 = 5$. Підставимо розраховані значення у вирази (6). Одержимо:

$$\begin{aligned} x(u,v) = & -0.04v^4u + 0.21v^4 + 0.21u^4 - 3.29v^2 + 3.29u^2 + 4.13v^2u - 1.25v^2u^2 - \\ & - 0.01u^5 + 0.08u^3v^2 - 1.38u^3 - 0.12u + 1 + v, \\ y(u,v) = & 0.04u^4v - 1.38v^3 + 0.12v + 0.01v^5 - 6.58uv + 4.13u^2v + 0.83v^3u - \\ & - 0.83u^3v - 0.08v^3u^2 + u. \end{aligned}$$

На рис. 1. відображено одержану сітку. На рис.2. зображено графіки функцій F , $E=G$. З рисунку видно, що $F = 0$, тобто сітка є ортогональною, а графіки E та G збігаються, тобто сітка ізотермічна. На рис.3. відображено сітку при квазіконформній заміні $t = u + 1.5iv$, а на рис.4. - при $t = 0.5u + iv$.

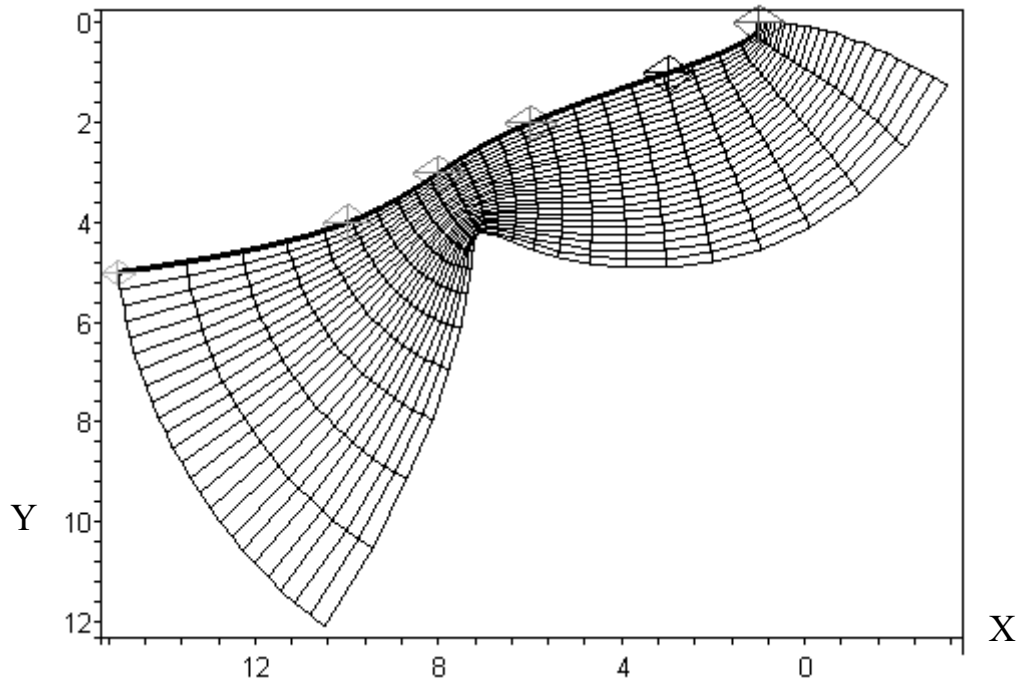


Рис.1. Дійсна частини плоскої сітки при заміні $t = u + iv$ на основі многочлена Лагранжа, який проходить через 6 точок

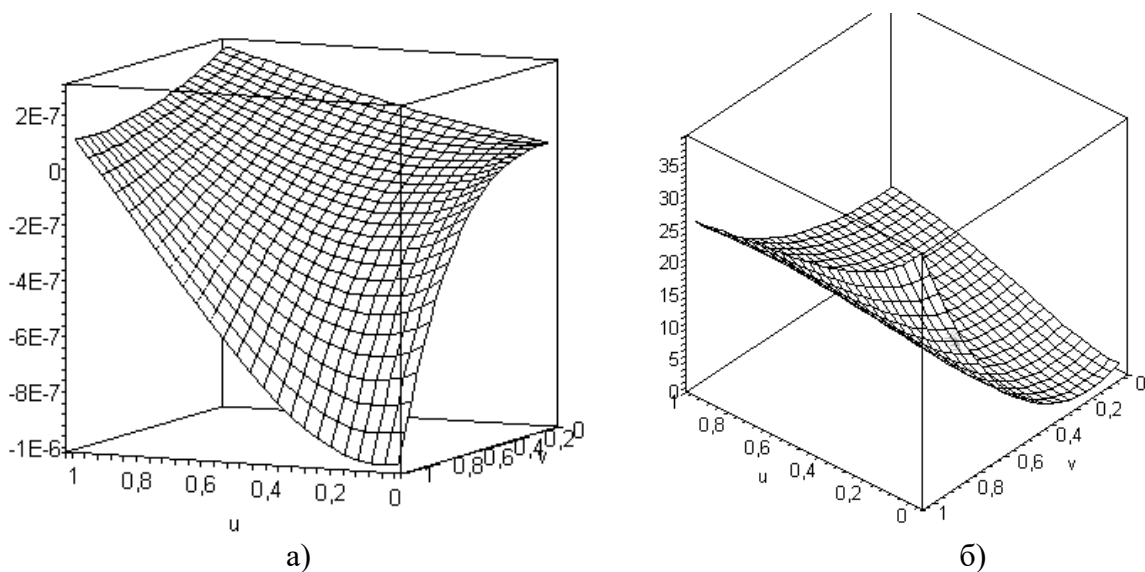


Рис.2. Графіки функцій а) графік функції F , б) графіки функцій E та G

Будемо перетворювати плоску сітку в поверхню за заданими певними умовами. Для того, щоб із плоскої ортогональної сітки утворити поверхню, яка буде віднесена до ортогональної u - v -сітки, потрібно одну сім'ю плоскої сітки розподілити по висоті за будь-яким законом. Такий спосіб формування поверхні застосовано автором роботи [8]. Тобто рівняння $z = z(u, v)$ має бути залежне лише від однієї змінної: $z = z(u)$ або ж $z = z(v)$. Тоді частинна похідна по одній зі змінних для Z дорівнюватиме нулю і коефіцієнт F при переході від плоскої ортогональної сітки до просторової не зміниться, тобто буде рівний

нулю, отже, поверхня буде віднесена до сімей ортогональних координатних ліній.

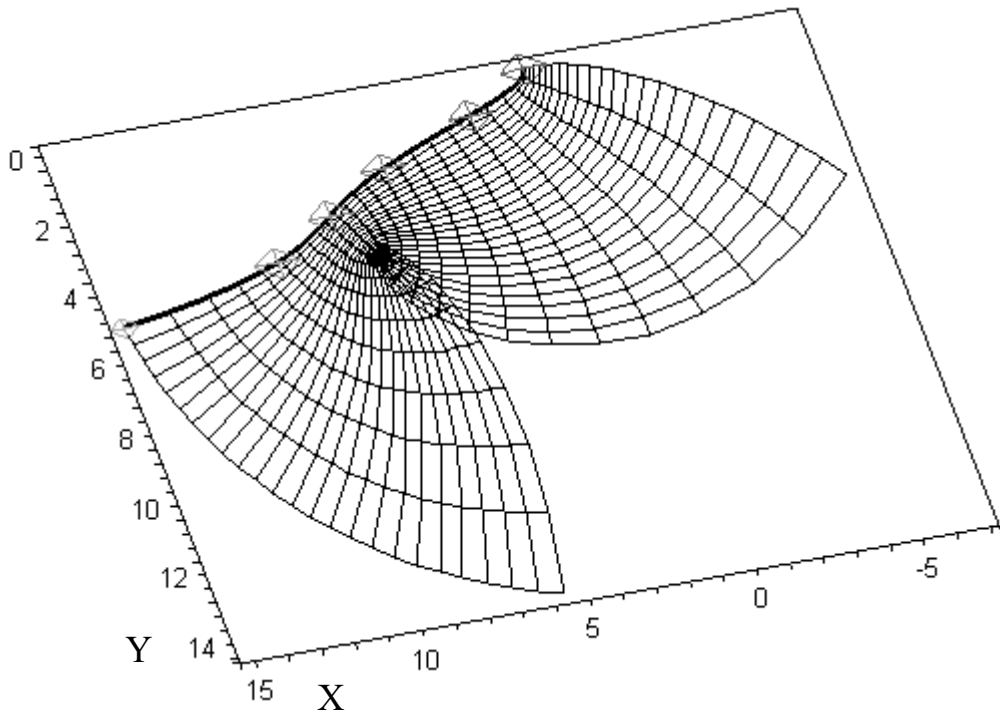


Рис.3. Дійсна частини плоскої сітки при заміні $t = u + 1.5iv$ на основі многочлена Лагранжа, який проходить через 6 точок

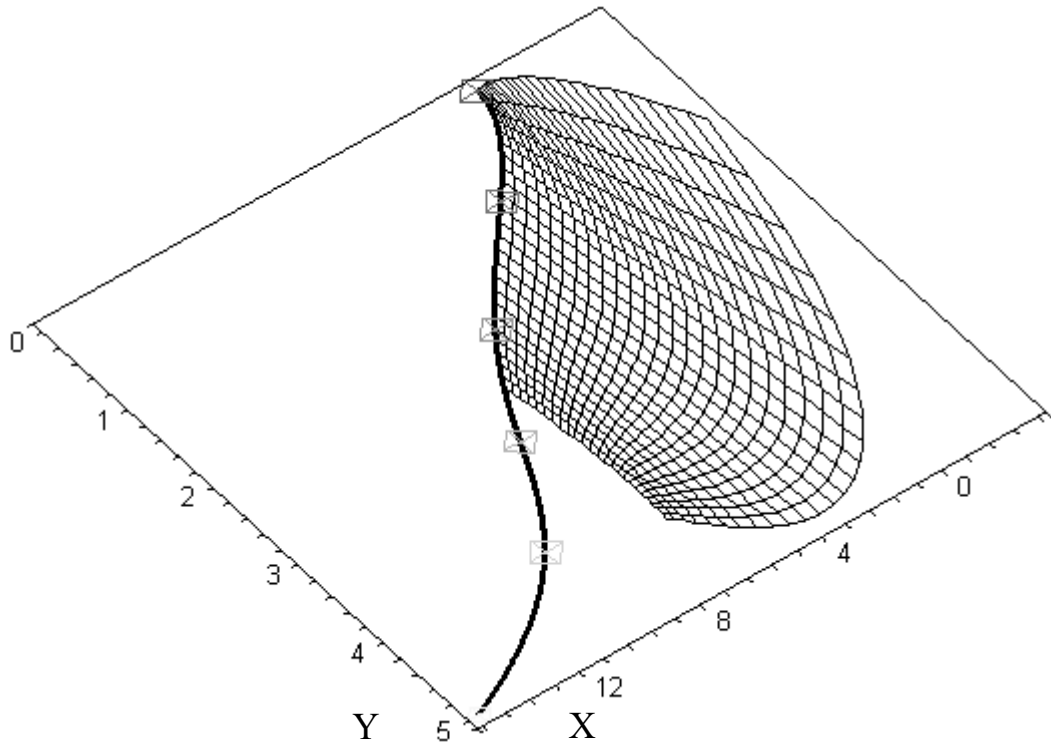


Рис.4. Дійсна частини плоскої сітки при заміні $t = 0.5u + iv$ на основі многочлена Лагранжа, який проходить через 6 точок

Якщо плоска сітка побудована на основі ізотропного многочлена Лагранжа, тоді, якщо задавати залежність $z = z(u)$ як функцію (2), будемо мати поверхню з напрямною просторовою кривою у вигляді многочлена Лагранжа для випадків $t = u + iv$ та $t = u + ikv$, а для випадку $t = ku + iv$ просторова крива матиме задану проекцію на сітці. Якщо задати залежність $z = z(v)$, тоді поверхня буде побудована на основі плоскої кривої.

На рис. 5. відображено сітку на основі конформної заміни та ізотропного многочлена Лагранжа, який проходить через 6 точок.

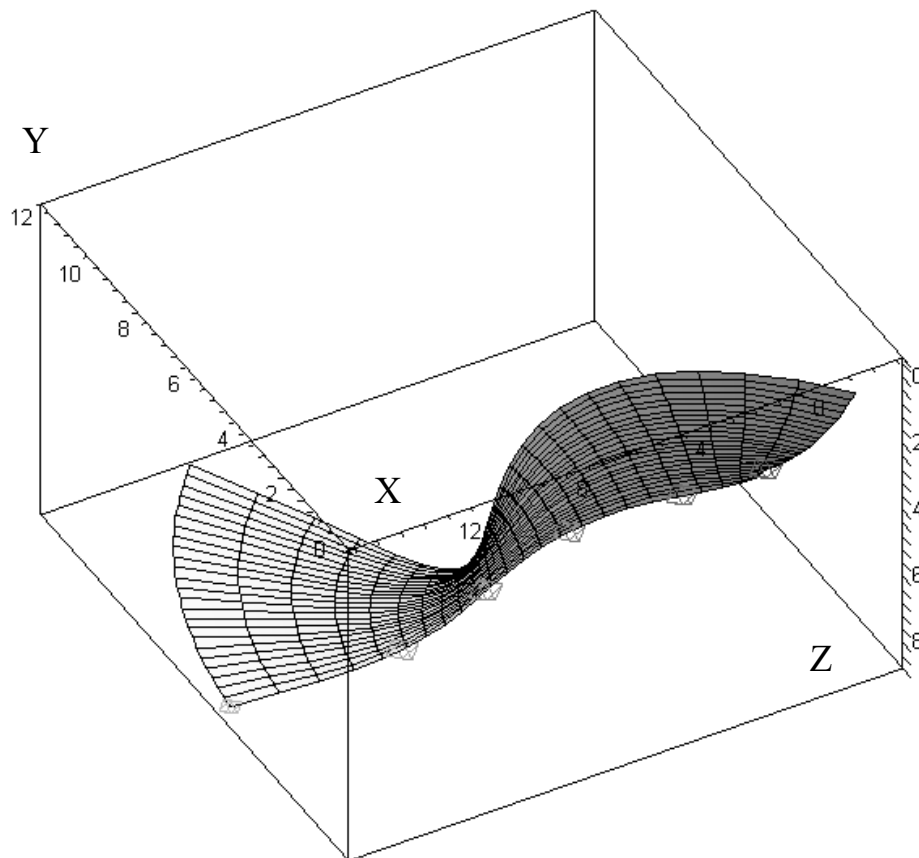


Рис.5. Поверхня на основі конформної заміни та ізотропної кривої за многочленом Лагранжа, який проходить через 6 точок

Висновки. Дослідження показали, що при побудові сітки на основі ізотропної кривої за параметричним многочленом Лагранжа одержимо ортогональну та ізотермічну сітку. Часткові похідні від рівняння сітки будуть пов'язані умовами Коши-Рімана. Розраховано коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні та доведено, що $F = 0$, а $E = G$. Поверхня з ортогональною сіткою будується на основі розподілення однієї сім'ї плоскої сітки по висоті за параметричним многочленом Лагранжа. Подальші дослідження пов'язані з конструюванням складених поверхонь на основі ізотропних кривих.

Література

1. Херн Д. Компьютерная графика и стандарт OpenGL [Текст]/ Д. Херн, Паулин М. Бейкер, 3-е издание.: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005.–1168 с.
2. Турчак Л.И. Основы численных методов [Текст]: Учеб. пособие / Л.И. Турчак. – М.: Наука. Гл.ред. физ.–мат. лит., 1987. – 320 с.
3. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна [Текст]/ В. Бляшке. - Главная редакция общетехнической литературы и номотографии, 1935.- 330 с.
4. Аушева Н.М. Моделювання мінімальних поверхонь Без`є [Текст] / Н.М. Аушева // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.50.-Мелітополь: ТДАТУ, 2011. - С.105-109.
5. Аушева Н.М. Визначення сім'ї мінімальних поверхонь з прямою кривою Без`є на базі процесора SIMD-архітектури [Текст] / Н.М. Аушева, А.А. Демчишин // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. - Вип.4, т.57.- Мелітополь: ТДАТУ, 2013. - С.10-16.
6. Аушева Н. М. Моделювання плоских сіток на основі ізотропних кривих за годографом Піфагора [Текст] / Н.М. Аушева // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник.- Вип.48.-Луцьк:ЛНТУ, 2015р.- С.13-17.
7. Аушева Н. М. Моделювання сіток з напрямними дробово-раціональними кривими [Текст] / Н.М. Аушева // Сучасні проблеми архітектури та містобудування: Наук.-техн. збірник. – Вип.34. – К.: КНУБА, 2013. – С. 393–399.
8. Дзюба В.В. Конструювання і перетворення поверхонь із збереженням ліній кривини [Текст]: автореф. дис... канд. техн. наук: 05.01.01 / В.В. Дзюба. – К.: КНУБА, 2008. – 21 с.

Аннотация

В работе исследуется способ построения поверхностей и сетей на основе изотропного параметрического многочлена Лагранжа. Найдены условия для формирования изотропной кривой. Предлагается формировать сетки на основе конформной и квазиконформной замены параметра. Приводятся примеры моделирования поверхности с ортогональной сеткой.

Ключевые слова: параметрический многочлен Лагранжа, изотропная кривая, минимальная поверхность, ортогональная сетка, направляющая кривая.

Annotation

In the paper investigated the way of building surfaces and grids based on isotropic parametric Lagrange polynomial. The conditions for the formation of the isotropic curve were found. It is proposed to form a grid-based conformal and quasiconformal replacement of the parameter. Examples of modeling surface orthogonal grid are given.

Keywords: parametric Lagrange polynomial, isotropic curve, minimum surface orthogonal grid, guide curve.