УДК 517.51

В. В. Миронюк, С. Я. Янченко

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З УЗАГАЛЬНЕНИХ КЛАСІВ НІКОЛЬСЬКОГО–БЄСОВА ЦІЛИМИ ФУНКЦІЯМИ У ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

V. V. Myroniuk, S. Ya. Yanchenko. *Approximation of functions from generalized Nikol'skii–Besov classes by entire functions in Lebesgue spaces*, Mat. Stud. **39** (2013), 190–202.

Exact-order estimates for the approximations of functions of classes $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ by entire functions with the spectrum of a special form in the space $L_q(\mathbb{R}^d)$ for some relations between the parameters p and q, are established.

В. В. Миронюк, С. Я. Янченко. *Приближение функций из обобщённых классов Никольского-Бесова целыми функциями в пространствах Лебега* // Мат. Студії. – 2013. – Т.39, №2. – С.190–202.

Получены точные по порядку оценки приближения функций из классов $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ целыми функциями со спектром специального вида в пространстве $L_q(\mathbb{R}^d)$ при некоторых соотношениях между параметрами p и q.

Статтю присвячено дослідженню апроксимативних характеристик класів функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, що є узагальненням відомих класів Нікольського–Бєсова і при певному виборі Ω збігаються з ними. Знайдено точні за порядком оцінки величин наближення функцій з даних класів за допомогою цілих функцій зі спектром спеціального вигляду. При цьому встановлено, що у певних ситуаціях величина, яка досліджується у даній роботі, і найкраще наближення функцій з класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ цілими функціями, носій перетворення Фур'є яких міститься у східчастому гіперболічному хресті ([1, 2]), мають різні порядки.

1. Означення класів функцій $\boldsymbol{S^{\Omega}_{p,\theta}B}(\mathbb{R}^d)$. Нехай $\mathbb{R}^d$ — d-вимірний евклідів простір і $(x,y)=x_1y_1+\dots+x_dy_d$ для $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $y=(y_1,\dots,y_d)\in\mathbb{R}^d$. Через $L_q(\mathbb{R}^d)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$, позначимо простір вимірних функцій $f(x)=f(x_1,\dots,x_d)$ зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_q}:=\|f\|_q:=\biggl(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^q dx\biggr)^{\frac{1}{q}},\ 1\leqslant q<\infty,\ \|f\|_{L_\infty}:=\|f\|_\infty:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|.$$

Для функції $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $l\in\mathbb{N}$ розглянемо різницю l-го порядку за змінною x_j з кроком h_j

$$\Delta^l_{h_j}f(x):=\sum_{n=0}^{l}(-1)^{l-n}C^n_l f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+nh_j,x_{j+1},\dots,x_d).$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A30.
Keywords: approximation; functional class; entire function.

Також означимо кратну різницю l-го порядку з векторним кроком $h = (h_1, \dots, h_d)$ $\Delta_h^l f(x) := \Delta_{h_d}^l \big(\Delta_{h_{d-1}}^l ... (\Delta_{h_1}^l f(x))\big)$ і мішаний модуль неперервності функції $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$

$$\Omega_l(f,t)_q := \sup_{|h| \leqslant t} \|\Delta_h^l f(\cdot)\|_q.$$

Тут $t = (t_1, ..., t_d)$, $t_j \geqslant 0$, $j \in \{1, \dots, d\}$ (далі будемо писати $t \geqslant 0$), $|h| = (|h_1|, ..., |h_d|)$ і нерівність $|h| \leqslant t$ означає, що $|h_j| \leqslant t_j$, $j \in \{1, \dots, d\}$.

Нехай $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, тобто функція визначена на $\mathbb{R}_+^d$, що задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t > 0$ і $\Omega(t) = 0$, якщо $\prod_{j=1}^d t_j = 0$;
2) $\Omega(t)$ неспадна за кожною змінною;
3) $\Omega(t)$ неперервна на $\mathbb{R}_+^d$;
4) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \leqslant (\prod_{j=1}^d m_j)^l \Omega(t)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, d\}$.

Множину таких функцій Ω позначимо через Ψ_l.

Додатково вимагатимемо, щоб функції Ω задовольняли умови (S) та (S_l), які ще називають умовами Барі–Стєчкіна ([3]) і які полягають у наступному:

а) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S) з $\alpha > 0$, якщо $\varphi(\tau)/\tau^\alpha$ майже зростає при $\tau > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_1 > 0$, що
$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\alpha} \leqslant C_1 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\alpha}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1;$$

б) функція однієї змінної $\varphi(\tau) \geqslant 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує γ, $0 < \gamma < l$, таке, що $\varphi(\tau)/\tau^\gamma$ майже спадає при $\tau > 0$, тобто існує така незалежна від τ_1 і τ_2 стала $C_2 > 0$, що
$$\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^\gamma} \geqslant C_2 \frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^\gamma}, \qquad 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1.$$

Вважатимемо, що $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) та (S_l), якщо $\Omega(t)$ задовольняє ці умови за кожною змінною t_j для всіх можливих фіксованих t_i, $i \neq j$. У випадку, коли для Ω виконується умова (S), будемо говорити, що Ω належить множині S^α, а якщо умова (S_l) — множині S_l. Стверджуючи це (також і для функції ω однієї змінної), використовуватимемо запис $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$, $l \in \mathbb{N}$ (відповідно — $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$), де множина $\Phi_{\alpha,l}$ визначається співвідношенням $\Phi_{\alpha,l} = \Psi_l \cap S^\alpha \cap S_l$.

Зазначимо, що до множини $\Phi_{\alpha,l}$ належать, наприклад, функції

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^d \dfrac{t_j^{r_j}}{\left\{\log \frac{1}{t_j}\right\}_+^{b_j}}, & \text{якщо } \ t_j > 0,\ j \in \{1, \dots, d\}; \\ 0, & \text{якщо } \ \prod\limits_{j=1}^d t_j = 0, \end{cases}$$

де $\{\log \tau\}_+ = \max\{1; \log \tau\}$, $r_j, b_j \in \mathbb{R}$, $\alpha < r_j < l$, $j \in \{1, \dots, d\}$.

Нехай, далі, $e_d := \{1, 2, ..., d\}$, $d \in \mathbb{N}$, і $e := \{j_1, ..., j_m\}$, $m \leqslant d$, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < ...$ $... < j_m \leqslant d$, $e \subset e_d$, $t^e := (t_{j_1}, \dots, t_{j_m})$, $\bar{t}^e := (\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_d)$, де

$$\bar{t}_i = \begin{cases} t_i, & i \in e; \\ 1, & i \in e_d \backslash e. \end{cases}$$

Простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\Omega \in \Psi_l$ означаються так (див., наприклад, [1, 2])

$$S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d){:=}\{f \in L_p(\mathbb{R}^d)\colon \|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)} < \infty\},$$

де

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)}{:=}\|f\|_p + \sum_{e\subset e_d}\left(\int\limits_0^2 \cdots \int\limits_0^2 \Big(\frac{\Omega_{l^e}(f,t^e)_p}{\Omega(\overline{t}^e)}\Big)^{\theta} \prod_{j\in e}\frac{dt_j}{t_j}\right)^{\frac{1}{\theta}},$$

якщо $1 \leqslant \theta < \infty$, та

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B(\mathbb{R}^d)}{:=}\|f\|_p + \sum_{e\subset e_d}\sup_{t^e>0}\frac{\Omega_{l^e}(f,t^e)_p}{\Omega(\overline{t}^e)},$$

$$\Omega_{l^e}(f,t^e)_q{:=}\sup_{|h^e|\leqslant t^e}\|\Delta^{l^e}_{h^e}f(\cdot)\|_q, \quad h^e{:=}(h_{j_1},\dots,h_{j_m}), \quad \Delta^{l^e}_{h^e}f(x){:=}\Delta^l_{h_{j_m}}\big(\Delta^l_{h_{j_{m-1}}}...(\Delta^l_{h_{j_1}}f(x))\big).$$

Зауважимо, що простори функцій $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ є узагальненням відомих просторів $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$. У випадку, якщо $\Omega(t) = t_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot t_d^{r_d}$, $r = (r_1,\dots,r_d)$, $0 < r_j < l$, $j \in \{1,\dots,d\}$, простори $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ збігаються. Нагадаємо, що простори $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ введені Т. І. Амановим ([4]) і у випадку $\theta = \infty$ збігаються з просторами $S^r_pH(\mathbb{R}^d)$, які вперше були розглянуті С. М. Нікольським ([5]). Надалі, для спрощення записів, використовуватимемо замість $S^{\Omega}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$, а також $S^r_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ та $S^r_pH(\mathbb{R}^d)$ позначення $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $S^r_{p,\theta}B$ і S^r_pH, відповідно.

Сформулюємо результат про еквівалентне зображення норми функцій з просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ([1]). Це зображення істотно використовується при доведенні одержаних результатів і базується на понятті *перетворення Фур'є.*

Отже, нехай $S = S(\mathbb{R}^d)$ — простір Шварца основних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^d$ комплекснозначних функцій φ, що спадають на нескінченності разом зі своїми похідними швидше за будь-який степінь функції $(x_1^2 + \ldots + x_d^2)^{-1/2}$ (див., наприклад, [6, 7, гл. 2]). Через S' позначимо простір лінійних неперервних функціоналів на S. Зазначимо, що елементами простору S' є узагальнені функції. Якщо $f \in S'$ і $\varphi \in S$, то $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення f на φ.

Перетворення Фур'є $\mathfrak{F}\varphi\colon S \to S$ визначається за формулою

$$(\mathfrak{F}\varphi)(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(t)e^{-i(\lambda,t)}dt \equiv \widetilde{\varphi}(\lambda),$$

де $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $t = (t_1,\dots,t_d) \in \mathbb{R}^d$.
Обернене перетворення Фур'є $\mathfrak{F}^{-1}\varphi\colon S \to S$ задається так

$$(\mathfrak{F}^{-1}\varphi)(t) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\lambda)e^{i(\lambda,t)}d\lambda \equiv \widehat{\varphi}(t).$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ (для нього ми зберігаємо те ж позначення) визначається формулою

$$\langle \mathfrak{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}\varphi\rangle, \quad (\langle \widetilde{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widetilde{\varphi}\rangle), \quad \text{де } \varphi \in S.$$

Обернене перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in S'$ також позначимо $\mathfrak{F}^{-1}f$, і визначається воно подібно до прямого перетворення Фур'є за правилом

$$\langle \mathfrak{F}^{-1}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathfrak{F}^{-1}\varphi\rangle, \quad (\langle \widehat{f}, \varphi\rangle = \langle f, \widehat{\varphi}\rangle).$$

Зазначимо, що для $1 < p < \infty$, існує природне неперервне вкладення $L_p(\mathbb{R}^d)$ в S' і в цьому сенсі функції з $L_p(\mathbb{R}^d)$ ототожнюються з елементами з S'.

Далі для кожного вектора $s = (s_1, ..., s_d)$, $s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j \in \{1, \dots, d\}$, розглянемо множину $P_{2^s}{:=}\big\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)\colon \eta(s_j)2^{s_j-1} \leqslant |\lambda_j| < 2^{s_j},\ \lambda_j \in \mathbb{R},\ j \in \{1, \dots, d\}\big\}$, де $\eta(0) = 0$ і $\eta(t) = 1$, $t > 0$, і покладемо $\rho_+(s){:=}P_{2^s} \cap \mathbb{Z}^d_+$.

Скрізь нижче у тексті вживається запис $A \asymp B$, який означає, що для невід'ємних величин A та B, залежних від деякої сукупності параметрів, існує додатна стала C така, що $C^{-1}A \leqslant B \leqslant CA$. Якщо $B \leqslant CA$ ($B \geqslant C^{-1}A$), то пишемо $B \ll A$ ($B \gg A$).

Нехай $A \subset \mathbb{R}^d$ — деяка множина. Позначимо через χ_A характеристичну функцію множини A і для $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ покладемо $\delta^*_s(f, x) = \mathfrak{F}^{-1}\big(\chi_{P_{2^s}}\mathfrak{F}f\big)$.

Теорема A ([1])**.** *Нехай $1 < p < \infty$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$. Функція f належить до простору $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1 \leqslant \theta < \infty$, тоді і тільки тоді, коли*

$$\Big\{\sum\nolimits_{s\geqslant 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\delta^*_s(f, \cdot)\|^{\theta}_p\Big\}^{\frac{1}{\theta}} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \Big\{\sum\nolimits_{s\geqslant 0} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\delta^*_s(f, \cdot)\|^{\theta}_p\Big\}^{\frac{1}{\theta}},$$

де $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$.

Функція f належить до простору $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ тоді і тільки тоді, коли

$$\sup_{s\geqslant 0} \frac{\|\delta^*_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})} < \infty,$$

до того ж

$$\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{s\geqslant 0} \frac{\|\delta^*_s(f, \cdot)\|_p}{\Omega(2^{-s})}.$$

Зауважимо, що твердження подібне до теореми A для просторів $S^r_{p,\theta}B$ доведене П. І. Лізоркіним та С. М. Нікольським ([8]). Надалі під класом $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ розумітимемо множину функцій $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, для яких $\|f\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \leqslant 1$ і при цьому збережемо для класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ті ж позначення, що й для просторів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$.

2. Означення апроксимативних характеристик. Перш ніж безпосередньо перейти до означення досліджуваної апроксимативної характеристики наведемо необхідні позначення та означення.

Носієм узагальненої функції f називатимемо замикання $\overline{\mathfrak{N}}$ такої множини точок $\mathfrak{N} \subset \mathbb{R}^d$, що для довільної $\varphi \in S$, яка дорівнює нулю на $\overline{\mathfrak{N}}$, виконується рівність $\langle f, \varphi\rangle = 0$. Носій узагальненої функції f позначатимемо через $\operatorname{supp} f$.

Нехай Θ — деяка множина в $\mathbb{Z}^d_+$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\Theta) = \bigcup_{s\in\Theta} P_{2^s}$. Тоді, для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, покладемо

$$S_{\mathfrak{M}}(f, x) = \sum_{s\in\Theta} \delta^*_s(f, x). \tag{1}$$

Зауважимо, що $S_{\mathfrak{M}}(f, x)$ є цілою функцією, яка належить до простору $L_q(\mathbb{R}^d)$ (див., наприклад, [6]) і $\operatorname{supp} S_{\mathfrak{M}}(f, x) \subseteq \mathfrak{M}$.

Далі, для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ розглянемо апроксимативну характеристику

$$e^{\mathfrak{F}}_M\big(f\big)_q = \inf_{\Theta\colon\ \operatorname{meas}\mathfrak{M}(\Theta)\leqslant M} \|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f, \cdot)\|_q\,,$$

де $\operatorname{meas} A$ позначає лебегову міру множини A.

Якщо $K \subset L_q(\mathbb{R}^d)$ — деякий клас функцій, то покладемо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(K\big)_q = \sup_{f\in K} e_M^{\mathfrak{F}}\big(f\big)_q. \tag{2}$$

Наведемо означення ще однієї апроксимативної характеристики, яку ми використовуватимемо у подальших міркуваннях.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$, $1 < q < \infty$, позначимо $S_{Q_n}(f,x) = \sum_{s\in\Delta_n} \delta_s^*(f,x)$, де $\Delta_n = \big\{s \in \mathbb{Z}_+^d \colon \|s\|_1 \leqslant n\big\}$, $\|s\|_1 = s_1 + \ldots + s_d$, $Q_n = \bigcup_{s\in\Delta_n} P_{2^s}$. Відзначимо, що якщо $\Theta = \Delta_n$, то $S_{\mathfrak{M}}(f,x)$ збігається з $S_{Q_n}(f,x)$. Множина Q_n називається східчастим гіперболічним хрестом.

Для $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$ покладемо $\mathcal{E}_{Q_n}\big(f\big)_q = \big\|f(\cdot) - S_{Q_n}(f,\cdot)\big\|_q$ і, відповідно, для функціонального класу $K \subset L_q(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{E}_{Q_n}\big(K\big)_q = \sup_{f\in K} \mathcal{E}_{Q_n}\big(f\big)_q. \tag{3}$$

Зауважимо, що знаходженню точних за порядком оцінок величин (3) у класах функцій $S^r_{p,\theta}B$ за певних співвідношень між параметрами p, q і θ присвячена стаття [9], а на класах $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ — статті [1, 2].

Дослідження величини (2) на класах $S^r_{p,\theta}B$ проводилося у статті [10]. Відзначимо також статті [11, 12], в яких досліджувалися аналоги величин (2) для класів Нікольського-Бєсова періодичних функцій від багатьох змінних та їх узагальнень.

3. Допоміжні твердження. Наведемо ще декілька тверджень, які ми використаємо у подальших доведеннях.

Теорема Б (Літтлвуда–Пелі, див., наприклад, [13, с. 81])**.** *Нехай $1 < p < \infty$. Існують додатні числа C_3, C_4 такі, що для кожної функції $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ виконуються співвідношення*

$$C_3\|f\|_p \leqslant \left\|\left(\sum_{s\geqslant 0} |\delta_s^*(f,\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant C_4\|f\|_p.$$

Теорема В ([2])**.** *Нехай $1 < p < q < \infty$ і $\Omega(t) = \omega\left(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d\right)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Тоді для $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ виконується порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{Q_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Теорема Г ([1])**.** *Нехай $1 < p < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\Omega(t) = \omega\left(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d\right)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > 0$. Тоді виконується порядкове співвідношення*

$$\mathcal{E}_{Q_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_p \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p^*}-\frac{1}{\theta}\right)_+},$$

де $a_+ = \max\{a, 0\}$, $p^* = \min\{p, 2\}$.

Додатково сформулюємо два твердження, які для періодичних функцій встановлені в [14, с. 25–28] і справджуються також для функцій $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$.

Лема А ([9])**.** *Нехай* $1 < p < q < \infty$ *і* $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$*. Тоді*

$$\|f\|_q \ll \left(\sum_{s \geqslant 0} \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p^q 2^{q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4}$$

Лема Б. *Нехай* $1 < q < p < \infty$ *і* $f \in L_q(\mathbb{R}^d)$*. Тоді*

$$\|f\|_q \gg \left(\sum_{s \geqslant 0} \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p^q 2^{q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{5}$$

4. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$*, де* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}; \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}\right\}$*. Тоді для будь-яких натуральних* n *та* $M = M(n)$ *таких, що* $M \asymp 2^n n^{d-1}$*, справджується порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\left(S_{p,\theta}^{\Omega} B\right)_q \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{6}$$

Доведення. У доведенні використовуватимемо відповідно модифіковані міркування зі статей [10, 11].

Отримаємо спочатку оцінку зверху. У випадку $\theta \geqslant q$ маємо $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, тому потрібна оцінка випливає з оцінки наближення класів $S_{p,\theta}^{\Omega} B$ цілими функціями $S_{Q_n}(f, \cdot)$ за умови, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ (див. теорему В).

Залишається отримати оцінку зверху у випадку $1 \leqslant \theta < q$. Нехай $f \in S_{p,\theta}^{\Omega} B$, $1 \leqslant \theta < q$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо числа $M = M(n)$ так, щоб виконувалось співвідношення $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і покладемо $n_0 = [n + (d-1)\log n]$, де $[a]$ — ціла частина числа a.

Побудуємо множину $\Theta \subset \mathbb{Z}_+^d$ і відповідно цілу функцію $S_{\mathfrak{M}}(f, x)$, за допомогою якої будемо здійснювати наближення функції $f \in S_{p,\theta}^{\Omega} B$. З цією метою спочатку включимо в Θ множину Δ_n, а далі будемо розширювати її за рахунок включення необхідної кількості векторів s з множин $\Theta(l) = \{s \in \mathbb{Z}_+^d \colon \|s\|_1 = l\}$, де $l \in \mathbb{N}$ і $n < l \leqslant n_0$.

Кожному $l \in \mathbb{N}$, $n < l \leqslant n_0$, поставимо у відповідність величину

$$B_l = \left(\sum_{s \in \Theta(l)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta}} \tag{7}$$

і виберемо число m_l, яке не перевищує кількості елементів множини $\Theta(l)$, при цьому $m_l \asymp \left[2^n n^{d-1} 2^{-l} B_l^{\theta}\right] + 1$. Далі для довільного $l \in \mathbb{N}$, $l \in (n, n_0]$, через $a_i(f, l)$, $i \in \{1, 2, \ldots\}$, позначимо члени спадної перестановки чисел $\|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p$, $s \in \Theta(l)$, а через $\widetilde{\Theta}(l)$ — набір з m_l векторів $s \in \Theta(l)$, яким відповідають найбільші значення $\|\delta_s^*(f, \cdot)\|_p$. Тепер покладемо $\Theta = \Delta_n \cup \bigcup_{l=n+1}^{n_0} \widetilde{\Theta}(l)$. Так ми побудували множину векторів $\Theta \subset \mathbb{Z}_+^d$ і разом з нею функцію

$$S_{\mathfrak{M}}(f, x) = \sum_{s \in \Theta} \delta_s^*(f, x), \quad \mathfrak{M} = \bigcup_{s \in \Theta} P_{2^s},$$

за допомогою якої здійснюватимемо наближення функції $f \in S_{p,\theta}^{\Omega} B$.

Доведемо, що meas $\mathfrak{M} \ll M$. Скориставшись тим, що

$$\sum_{s\in\Delta_n} 2^{\|s\|_1} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{s\in\Theta(j)} 2^{\|s\|_1} = \sum_{j=1}^{n} 2^j \sum_{s\in\Theta(j)} 1 \asymp \sum_{j=1}^{n} 2^j j^{d-1} \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{8}$$

і врахувавши вибір чисел m_l, можемо записати

$$\text{meas}\,\mathfrak{M} \ll \sum_{s\in\Delta_n} 2^{\|s\|_1} + \sum_{l=n+1}^{n_0} 2^l m_l \asymp 2^n n^{d-1} + \sum_{l=n+1}^{n_0} 2^l m_l \ll 2^n n^{d-1} +$$

$$+ 2^n n^{d-1} \sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{s\in\Theta(l)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta \ll 2^n n^{d-1} + 2^n n^{d-1} \|f\|^\theta_{S^\Omega_{p,\theta}B} \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Перейдемо тепер до встановлення оцінки наближення. Для $f \in S^\Omega_{p,\theta}B$ маємо

$$\big\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\big\|_q = \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{s\in\Delta_{n_0}} \delta_s^*(f,\cdot) + \sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \delta_s^*(f,\cdot) \Bigg\|_q \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg\| f(\cdot) - \sum_{s\in\Delta_{n_0}} \delta_s^*(f,\cdot) \Bigg\|_q + \Bigg\| \sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \delta_s^*(f,\cdot) \Bigg\|_q = I_1 + I_2. \tag{9}$$

Використавши теорему B при $1 \leqslant \theta < q$, а також врахувавши вибір числа n_0 і те, що ω задовольняє умову (S) з $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{2}{q} + \frac{1}{\theta}$, отримаємо

$$I_1 \ll \omega(2^{-n_0}) 2^{n_0\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} = \frac{\omega(2^{-n_0})}{2^{-\alpha n_0}} 2^{-n_0\left(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} \ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)} =$$

$$= \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{-(d-1)\left(\alpha - \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{\theta}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{10}$$

Для оцінки I_2, використавши співвідношення (4), а також врахувавши значення чисел $a_i(f,l)$, можемо записати

$$I_2 = \Bigg\| \sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \delta_s^*(f,\cdot) \Bigg\|_q \ll \left(\sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^q 2^{q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\|s\|_1} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{i>m_l} a_i^q(f,l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{i>m_l} a_i^\theta(f,l) a_i^{q-\theta}(f,l) 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{i>m_l} a_i^\theta(f,l) i^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \omega^{q-\theta}(2^{-l}) B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \omega^{q-\theta}(2^{-l}) B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \sum_{i>m_l} a_i^\theta(f,l) \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \omega^{q-\theta}(2^{-l}) B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \sum_{s\in\Theta(l)} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} \omega^{q-\theta}(2^{-l}) B_l^{q-\theta} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \omega^{\theta}(2^{-l}) \sum_{s\in\Theta(l)} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \omega^q(2^{-l}) B_l^{q-\theta} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} m_l^{-\frac{q-\theta}{\theta}} 2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)q} \omega^q(2^{-l}) B_l^{q} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (11)$$

Далі, підставивши в останню суму з (11) замість m_l їхні значення, отримаємо

$$I_2 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} 2^{lq\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\right)} \omega^q(2^{-l}) B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (12)$$

Враховуючи, що ω задовольняє умову (S) з $\alpha > \frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}$, а також співвідношення (7), продовжимо оцінку (12)

$$I_2 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} 2^{-lq\left(\alpha-\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\right)\right)} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \times$$

$$\times \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} B_l^{\theta} \right)^{\frac{1}{q}} = \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \left(\left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{s\in\Theta(l)} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^{\theta} \Omega^{-\theta}(2^{-s}) \right)^{\frac{1}{\theta}} \right)^{\frac{\theta}{q}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)} \|f\|_{S_{p,\theta}^{\Omega}B}^{\frac{\theta}{q}} \leqslant \omega(2^{-n}) 2^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}. \quad (13)$$

З (9), враховуючи (10), (13), а також те, що $\operatorname{meas}\mathfrak{M} \ll M$, отримаємо оцінку зверху в (6) у випадку $1 \leqslant \theta < q$.

Тепер встановимо в (6) оцінку знизу. Для цього побудуємо екстремальні функції $f \in S_{p,\theta}^{\Omega}B$, які її реалізують. Покладемо

$$D_k(x) = \prod_{j=1}^{d} D_{k_j}(x_j), \quad k=(k_1,\dots,k_d)\in\mathbb{Z}_+^d,\ D_{k_j}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(2\sin\frac{x_j}{2} \cos\frac{2k_j+1}{2} x_j \right) \cdot x_j^{-1}.$$

У статті [9] для перетворення Фур'є функції D_k доведено рівність

$$\mathfrak{F} D_k(x) = \chi_k(x) = \prod_{j=1}^{d} \chi_{k_j}(x_j),$$

де $\chi_{k_j}(x_j) = \begin{cases} 1, & k_j < |x_j| < k_j+1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = k_j \text{ або } |x_j| = k_j+1; \\ 0 & \text{— в інших випадках,} \end{cases} \quad \chi_0(x_j) = \begin{cases} 1, & |x_j| < 1; \\ \frac{1}{2}, & |x_j| = 1; \\ 0, & |x_j| > 1. \end{cases}$

Відповідно для оберненого перетворення маємо $\mathfrak{F}^{-1}\chi_k(x) = D_k(x)$.

Нехай M і $l = l(M) \in \mathbb{N}$ — числа пов'язані співвідношеннями $2^l l^{d-1} \asymp M$ і $2^l l^{d-1} \geqslant 2M$. Розглянемо функцію

$$F(x) = \sum_{s\in\Delta_l} \sum_{k\in\rho_+(s)} D_k(x).$$

Використавши відому оцінку ([9])

$$\|\delta_s^*(F,\cdot)\|_p = \Big\| \sum_{k\in\rho_+(s)} D_k(\cdot)\Big\|_p \asymp 2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad 1<p<\infty, \tag{14}$$

та співвідношення (8), при $1 \leqslant \theta < \infty$ за теоремою А отримаємо

$$\|F\|_{S^{\Omega}_{p,\theta}B} \asymp \left(\sum_{s\in\Delta_l} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\|\delta_s^*(F,\cdot)\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} = \left(\sum_{s\in\Delta_l} \Omega^{-\theta}(2^{-s})\Big\|\sum_{k\in\rho_+(s)} D_k(\cdot)\Big\|_p^{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \asymp$$

$$\asymp \left(\sum_{s\in\Delta_l} \Omega^{-\theta}(2^{-s})2^{\|s\|_1\left(1-\frac{1}{p}\right)\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}} \ll \omega^{-1}(2^{-l})2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)}l^{\frac{d-1}{\theta}}.$$

Отже, функція $f_1(x) = C_5\omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{\theta}}F(x)$ з деякою сталою $C_5>0$ належить до класу $S^{\Omega}_{p,\theta}B$, $1\leqslant\theta<\infty$.

Якщо ж $\theta=\infty$, то, використавши (14), отримаємо

$$\|F\|_{S^{\Omega}_{p,\infty}B} \asymp \sup_{s\in\Delta_l} \Omega^{-1}(2^{-s})\|\delta_s^*(F,\cdot)\|_p \ll \omega^{-1}(2^{-l})2^{l\left(1-\frac{1}{p}\right)},$$

тобто функція $f_2(x) = C_6\omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}F(x)$, належить до класу $S^{\Omega}_{p,\infty}B$ з деякою сталою $C_6>0$.

Доведемо, що побудовані вище функції f_1 та f_2 реалізують оцінку знизу в (6). Для цього скористаємось відомим співвідношенням (див., наприклад, [15, с. 22]), яке для функцій $f\in L_q(\mathbb{R}^d)$ і $g\in L_{q'}(\mathbb{R}^d)$ має вигляд

$$\|f\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)g(x)|dx, \quad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1.$$

Нехай $f\in S^{\Omega}_{p,\theta}B$ і $S_{\mathfrak{M}}(f,x)$ — ціла функція вигляду (1), носій перетворення Фур'є якої міститься у множині $\mathfrak{M} = \bigcup_{s\in\Theta} P_{2^s}$, $\operatorname{meas}\mathfrak{M}\leqslant M$. Тоді, за наведеним вище співвідношенням, можемо записати

$$\|f(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_q = \sup_{\|g\|_{q'}\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\big(f(x)-S_{\mathfrak{M}}(f,x)\big)g(x)\right|dx. \tag{15}$$

Покладемо $g(x) = C_7 2^{-\frac{l}{q}}l^{-\frac{d-1}{q'}}F(x)$, $C_7>0$, і зауважимо, що, як доведено у статті [10], при деякому $C_7>0$ виконується нерівність $\|g\|_{q'}\leqslant 1$.

Нехай $1\leqslant\theta<\infty$. Підставивши в (15) функції f_1 та g та врахувавши, що $M\asymp 2^l l^{d-1}$ і $\|g\|_{q'}\leqslant 1$, отримаємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}(f_1)_q = \inf_{\Theta:\ \operatorname{meas}\mathfrak{M}\leqslant M}\|f_1(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f_1,\cdot)\|_q \geqslant$$

$$\geqslant \inf_{\Theta:\ \operatorname{meas}\mathfrak{M}\leqslant M}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\big(f_1(x)-S_{\mathfrak{M}}(f_1,x)\big)g(x)\right|dx \gg$$

$$\gg \inf_{\Theta:\ \operatorname{meas}\mathfrak{M}\leqslant M}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-1\right)}l^{-\frac{d-1}{\theta}}\big(F(x)-S_{\mathfrak{M}}(F,x)\big)2^{-\frac{l}{q}}l^{-\frac{d-1}{q'}}F(x)\right|dx \geqslant$$

$$\geqslant \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'}\right)}\inf_{\Theta:\ \operatorname{meas}\mathfrak{M}\leqslant M}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|F(x)|^2dx - \int_{\mathbb{R}^d}|S_{\mathfrak{M}}(F,x)F(x)|dx\right). \tag{16}$$

У статті [10] доведено, що $\int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 dx = \|F\|_2^2 \asymp 2^l l^{d-1}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \left|S_{\mathfrak{M}}(F,x)F(x)\right| dx \leqslant M$. Врахувавши ці співвідношення, оцінку (16) можемо продовжити так

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_1\big)_q \gg \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'}\right)}(2^l l^{d-1} - M) \gg$$
$$\gg \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-1\right)}l^{-(d-1)\left(\frac{1}{\theta}+\frac{1}{q'}\right)}2^l l^{d-1} \asymp \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}l^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Повністю подібно у випадку $\theta = \infty$, підставивши у (15) функції f_2 та g, отримуємо

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \geqslant e_M^{\mathfrak{F}}\big(f_2\big)_q = \inf_{\Theta:\ \mathrm{meas}\,\mathfrak{M}\leqslant M} \|f_2(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f_2,\cdot)\|_q \gg \omega(2^{-l})2^{l\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}l^{\frac{d-1}{q}}.$$

Оцінку знизу встановлено. □

Наслідок 1. *Нехай $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_1}$ і $\Omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha = r_1 > \max\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}; \frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}\right\}$, то виконується співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{r}_{p,\theta}B\big)_q \asymp M^{-\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}(\log^{d-1} M)^{\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{\theta}\right)}$$

(останнє співвідношення встановлене у статті [10]).

Наслідок 2. *Порівнюючи результати теореми 1 і теореми B приходимо до висновку, що у випадку $1 < p < q < \infty$, $q \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}-\frac{1}{q}$, величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q$ і $\mathcal{E}_{Q_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q$, $M \asymp 2^n n^{d-1}$, однакові за порядком. Якщо ж $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta < q$ і $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \frac{1}{p}-\frac{2}{q}+\frac{1}{\theta}$, то виконується порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q \asymp \mathcal{E}_{Q_n}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q n^{(d-1)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta}\right)},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$.

Наведемо твердження, яке дає оцінку величини $e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_q$ у випадку $1 < p = q \leqslant 2$.

Теорема 2. *Нехай $1 < p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ і $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot \ldots \cdot t_d)$, де $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ з $\alpha > \max\left\{0; \frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right\}$. Тоді для будь-яких натуральних n та $M = M(n)$, таких що $M \asymp 2^n n^{d-1}$, виконується порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\big(S^{\Omega}_{p,\theta}B\big)_p \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{17}$$

Доведення. Спочатку встановимо в (17) оцінку зверху. Оскільки у випадку $\theta \geqslant p$ маємо $\alpha > 0$, то потрібна оцінка випливає з оцінки наближення класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ цілими функціями $S_{Q_n}(f,\cdot)$ за умови, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ (див. теорему Г).

Залишається отримати оцінку зверху у випадку $1 \leqslant \theta < p$. При цьому використовуватимемо міркування подібні до тих, що проводилися при встановленні оцінки зверху в теоремі 1.

Нехай $f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B$. Наближатимемо її функцією

$$S_{\mathfrak{M}}(f,x) = \sum_{s\in\Theta} \delta_s^*(f,x), \quad \mathfrak{M} = \bigcup_{s\in\Theta} P_{2^s},$$

де множина Θ будується подібно, як у доведенні теореми 1. Тоді

$$\left\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\right\|_p = \left\|f(\cdot) - \sum_{s\in\Delta_{n_0}} \delta_s^*(f,\cdot) + \sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \delta_s^*(f,\cdot)\right\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left\|f(\cdot) - \sum_{s\in\Delta_{n_0}} \delta_s^*(f,\cdot)\right\|_p + \left\|\sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \delta_s^*(f,\cdot)\right\|_p = I_3 + I_4. \tag{18}$$

Використавши теорему Г при $1 \leqslant \theta < p$, а також врахувавши вибір числа n_0 і те, що ω задовольняє умову (S) з $\alpha > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, можемо записати

$$I_3 \ll \omega(2^{-n_0}) = \frac{\omega(2^{-n_0})}{2^{-\alpha n_0}} 2^{-\alpha n_0} \ll \omega(2^{-n}) 2^{-\alpha(n_0-n)} \asymp \omega(2^{-n}) n^{-\alpha(d-1)} \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{19}$$

Для оцінки величини I_4, скориставшись теоремою Б і нерівністю $|a+b|^c \leqslant |a|^c + |b|^c$, де $0 < c \leqslant 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, отримаємо

$$I_4 = \left\|\sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \delta_s^*(f,\cdot)\right\|_p \ll \left\|\left(\sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} |\delta_s^*(f,\cdot)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant \left(\sum_{s\in\Delta_{n_0}\setminus\Theta} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{20}$$

Далі, міркуючи подібно, як і при встановленні оцінки величини I_2 (див., (11) і (12)), з (20) отримаємо

$$I_4 \ll (2^n n^{d-1})^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \omega^p(2^{-l}) 2^{lp\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)} B_l^\theta\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{21}$$

Враховуючи, що ω задовольняє умову (S) з $\alpha > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, продовжимо оцінку (21)

$$I_4 \ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} 2^{-lp\left(\alpha-\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{p}\right)\right)} B_l^\theta\right)^{\frac{1}{p}} \ll$$

$$\ll (2^n n^{d-1})^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}} \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} 2^{-n\left(\alpha-\frac{1}{\theta}+\frac{1}{p}\right)} \left(\sum_{l=n+1}^{n_0} B_l^\theta\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} \left(\left(\sum_{l=n+1}^{n_0} \sum_{s\in\Theta(l)} \|\delta_s^*(f,\cdot)\|_p^\theta \Omega^{-\theta}(2^{-s})\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\frac{\theta}{p}} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)} \|f\|_{S^\Omega_{p,\theta}B}^{\frac{\theta}{p}} \leqslant \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}. \tag{22}$$

Застосовуючи тепер нерівності (19) і (22), з (18) отримаємо $\|f(\cdot) - S_{\mathfrak{M}}(f,\cdot)\|_p \ll \omega(2^{-n}) n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}$.

Отже, оцінку зверху в теоремі 2 встановлено.

Перейдемо до встановлення оцінки знизу. Нехай натуральні числа n і $M = M(n)$ такі, що $M \asymp 2^n n^{d-1}$ і кількість точок з цілочисельними координатами у множині $F_n = \bigcup_{s\in\Theta(n)} \rho_+(s)$ більша за $4M$.

У залежності від значення параметра θ розглянемо такі функції

$$f_3(x) = C_8\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}n^{-\frac{d-1}{\theta}}\sum_{k\in F_n} D_k(x),\ C_8>0,\ 1\leqslant\theta<\infty,$$
$$f_4(x) = C_9\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac{1}{p}-1\right)}\sum_{k\in F_n} D_k(x),\quad C_9>0,\ \text{якщо } \theta=\infty.$$

Подібно до того, як це робилося у доведенні теореми 1, можна довести, що функції f_3 і f_4 належать до класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ і $S^{\Omega}_{p,\infty}B$, відповідно.

Нехай Θ — довільна множина в $\mathbb{Z}^d_+$ така, що для множини $\mathfrak{M}=\bigcup_{s\in\Theta}P_{2^s}$ виконується $\operatorname{meas}\mathfrak{M}\leqslant M$. Тоді для кількості елементів множини $\Theta(n)\setminus\Theta$ маємо $|\Theta(n)\setminus\Theta|\asymp n^{d-1}$. Враховуючи це, в залежності від того, які значення набуває параметр p, розглянемо два випадки.

Нехай спочатку $1<p<2$, $1\leqslant\theta<\infty$. Для функцій f_3 і $S_{\mathfrak{M}}(f_3,x)=\sum_{s\in\Theta}\delta^*_s(f_3,x)$ з (5) отримаємо

$$\|f_3(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f_3,\cdot)\|_p \gg \left(\sum_{s\geqslant 0}\|\delta^*_s(f_3(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f_3,\cdot))\|_2^p 2^{\|s\|_1\left(\frac12-\frac1p\right)p}\right)^{\frac1p}=$$
$$=\left(\sum_{s\in\Theta(n)\setminus\Theta}\|\delta^*_s(f_3\cdot)\|_2^p 2^{\|s\|_1\left(\frac12-\frac1p\right)p}\right)^{\frac1p}\gg 2^{n\left(\frac12-\frac1p\right)}\omega(2^{-n})2^{n\left(\frac1p-1\right)}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^{\frac n2}\left(\sum_{s\in\Theta(n)\setminus\Theta}1\right)^{\frac1p}\asymp$$
$$\asymp\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}n^{\frac{d-1}{p}}\asymp\omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac1p-\frac1\theta\right)}.$$

Нехай тепер $p=2$, $1\leqslant\theta<\infty$. Тоді, скориставшись теоремою Б, послідовно одержуємо

$$\|f_3(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f_3,\cdot)\|_2=\left(\sum_{s\geqslant0}\|\delta^*_s(f_3(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f_3,\cdot))\|_2^2\right)^{\frac12}=$$
$$=\left(\sum_{s\in\Theta(n)\setminus\Theta}\|\delta^*_s(f_3\cdot)\|_2^2\right)^{\frac12}\gg\omega(2^{-n})2^{-\frac n2}n^{-\frac{d-1}{\theta}}2^{\frac n2}\left(\sum_{s\in\Theta(n)\setminus\Theta}1\right)^{\frac12}\asymp$$
$$\asymp\omega(2^{-n})n^{-\frac{d-1}{\theta}}n^{\frac{d-1}{2}}\asymp\omega(2^{-n})n^{(d-1)\left(\frac12-\frac1\theta\right)}.$$

Подібно, при $\theta=\infty$ для функції f_4 отримаємо $\|f_4(\cdot)-S_{\mathfrak{M}}(f_4,\cdot)\|_p\gg\omega(2^{-n})n^{\frac{d-1}{p}}$.

Оцінку знизу в (17) встановлено. $\square$

Наслідок 3. *Нехай* $1<p\leqslant2$, $1\leqslant\theta\leqslant\infty$. *Якщо* $\Omega(t)=\prod_{j=1}^d t_j^{r_1}$ *і* $\Omega\in\Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha=r_1>\max\left\{0;\frac1\theta-\frac1p\right\}$, *то виконується співвідношення*

$$e^{\mathfrak{F}}_M\left(S^r_{p,\theta}B\right)_p\asymp M^{-r_1}(\log^{d-1}M)^{\left(r_1+\frac1p-\frac1\theta\right)},$$

яке при $1<p<2$ *встановлено у статті [10], а при* $p=2$ *— у статті [16].*

Наслідок 4. *Порівняння тверджень теореми 2 і теореми Г дає, що у випадку* $1 < p \leqslant 2$, $p \leqslant \theta \leqslant \infty$ *і* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > 0$, *величини* $e_M^{\mathfrak{F}}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B\right)_p$ *і* $\mathcal{E}_{Q_n}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B\right)_p$, $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *однакові за порядком. Якщо ж* $1 < p \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta < p$ *і* $\omega \in \Phi_{\alpha,l}$ *з* $\alpha > \frac{1}{\theta} - \frac{1}{p}$, *то при* $M \asymp 2^n n^{d-1}$ *виконується порядкове співвідношення*

$$e_M^{\mathfrak{F}}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B\right)_p \asymp \mathcal{E}_{Q_n}\left(S^{\Omega}_{p,\theta}B\right)_p n^{(d-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Stasyuk S.A., Yanchenko S.Ya. *The best Approximation of classes* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *of function of many variables in the space* $L_p(\mathbb{R}^d)$// Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. – 2008. – V.5, №1. – P. 367–384. (in Ukrainian)
2. Yanchenko S.Ya. *Approximation of classes* $B^{\Omega}_{p,\theta}$ *of function of many variables by entire functions in the space* $L_q(\mathbb{R}^d)$// Ukr. Mat. Zh. – 2010. – V.62, №1. – P. 123–135. (in Ukrainian)
3. Bari N.K., Stečkin S.B. *Best approximations and differential properties of two conjugate functions*// Trudy Moskov. Mat. Obšč. – 1956. – V.5. – P. 483–522. (in Russian)
4. Amanov T.I. *Representation and embedding theorems for the function spaces* $S^{(r)}_{p,\theta}B(\mathbb{R}_n)$ *and* $S^{(r)*}_{p,\theta}B$ $(0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi, j = 1, ..., n)$// Trudy Mat. Inst. Steklov. – 1965. – V.77. – P. 5–34. (in Russian)
5. Nikol'skii S.M. *Functions with dominant mixed derivative, satisfying a multiple Holder condition*// Sibirsk. Mat. Zh. – 1963. – V.4, №6. – P. 1342–1364. (in Russian)
6. Lizorkin P.I. *Generalized Liouville differentiation and the multiplier method in the theory of embeddings of classes of differentiable functions*// Trudy Mat. Inst. Steklov. – 1969. – V.105. – P. 89–167. (in Russian)
7. Vladimirov V.S. The equations of mathematical physics. – M.: Nauka, 1967, 436 p. (in Russian)
8. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. *Function spaces of mixed smoothness from the decomposition point of view*// Trudy Mat. Inst. Steklov. – 1989. – V.187. – P. 143–161. (in Russian)
9. Heping W., Yongsheng S. *Approximation of multivariate functions with a certain mixed smoothness by entire functions*// Northeast. Math. J. – 1995. – V.11, №4. – P. 454–466.
10. Yanchenko S.Ya. *Approximation of the classes* $S^{r}_{p,\theta}B(\mathbb{R}^d)$ *of functions of many variables by entire functions of a special form*// Ukr. Mat. Zh. – 2010. – V.62, №8. – P. 1124–1138. (in Ukrainian)
11. Romanyuk A.S. *Approximation of classes of periodic functions of several variables*// Mat. Zametki. – 2002. – V.71, №1. – P. 109–121. (in Russian)
12. Stasyuk S.A. *The best orthogonal trigonometric approximations of classes of periodic functions of several variables* $B^{\Omega}_{p,\theta}$// Work Inst. Mat. NAN Ukr. – 2002. – V.35. – P. 195–208. (in Ukrainian)
13. Nikol'skii S.M. Approximation of function of several variables and imbedding theorems. – M.: Nauka, 1969, 480 p. (in Russian)
14. Temlyakov V.N. *Approximation of functions with bounded mixed derivative*// Trudy Mat. Inst. Steklov. – 1986. – V.178. – P. 1–112. (in Russian)
15. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. Integral representations of functions and embedding theorems. – M.: Nauka, 1996, 480 p.
16. Yanchenko S.Ya. *Order estimates of approximation characteristics of classes of functions defined on* $\mathbb{R}^d$// Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr. – 2011. – V.8, №1. – P. 244–262. (in Ukrainian)

Інститут математики НАН України
VetalMyronjuk@ukr.net
Sergiy.Yan@rambler.ru

Надійшло 25.07.2012