УДК 517.53

Л. О. Чернецька

УЗАГАЛЬНЕНІ МОМЕНТНІ ЗОБРАЖЕННЯ ТА АПРОКСИМАНТИ ПАДЕ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДВОХ ЗМІННИХ

L. O. Chernetska. *Generalized moment representations and Padé approximants of analytic two-variable functions*, Mat. Stud. **41** (2014), 201–213.

The theorems on construction of rational approximation by means of the method of generalized moment representations are generalized. Under conditions of the generalized theorems the formulas for the errors of approximation are established. The two–dimensional Padé approximants for some analytic two–variable functions are constructed.

Л. А. Чернецкая. *Обобщенные моментные представления и аппроксиманты Паде аналитических функций двух переменных* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №2. – С.201–213.

Обобщены теоремы о построении рациональной аппроксимации с помощью метода обобщенных моментных представлений, установлено формулы для погрешностей аппроксимации в условиях обобщенных теорем. Построены двумерные аппроксиманты Паде для некоторых аналитических функций двух переменных.

У статтях [1], [2] метод узагальнених моментних зображень В. К. Дзядика ([3]) поширено на випадок двовимірних (двопараметричних) числових послідовностей і побудовано апроксиманти Паде для деяких гіпергеометричних рядів Аппеля та Гумберта.

Зауважимо, що різноманітні модифікації багатовимірних і, зокрема, двовимірних апроксимацій Паде досліджувалися у статтях [4]–[11].

Говоритимемо, що двовимірна числова послідовність $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має *узагальнене моментне зображення* на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle\cdot,\cdot\rangle$, якщо в просторі $\mathscr{X}$ вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а в просторі $\mathscr{Y}$ — двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n}\rangle, \quad k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Наступна теорема узагальнює встановлене в [1, теорема 1] твердження.

Теорема 1. *Нехай формальний подвійний степеневий ряд має вигляд*

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m, \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 41A21.
Keywords: Padé approximation; biorthogonal polynomial; Appell series.

а двовимірна послідовність $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ *має узагальнене моментне зображення вигляду* (1). *Якщо для деяких* $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *та* $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$ *існує нетривіальний узагальнений многочлен*

$$Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} y_{j,n} \tag{3}$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} \rangle = 0 \tag{4}$$

при $(k,m) \in ([M_1, M_1+N_1] \times [M_2, M_2+N_2]) \setminus \{(M_1+N_1, M_2+N_2)\}$ *і* $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} \neq 0$, *то раціональна функція*

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m-n} +$$
$$+ z^{N_1} \sum_{k=0}^{M_1+N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m-n} +$$
$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{M_2+N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m+n} +$$
$$+ z^{N_1} w^{N_2} \sum_{(k,m)\in\Gamma_{M_1,M_2}} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m+n} \Bigg\},$$

де $\Gamma_{M_1,M_2} = ([0, M_1+N_1] \times [0, M_2-1]) \cup ([0, M_1-1] \times [M_2, M_2+N_2])$,

$$Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^j w^n,$$

має розвинення у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігаються з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх* $(j,n) \in ([0, 2N_1+M_1] \times [0, 2N_2+M_2]) \setminus \{(2N_1+M_1, 2N_2+M_2)\}$.

Доведення. Домножимо рівність $s_{k+j+M_1,m+n+M_2} = \langle x_{k+M_1,m+M_2}, y_{j,n} \rangle$, $k,j,m,n \in \mathbb{Z}_+$, на $z^k w^m$ і просумуємо по k та m від 0 до досить великих чисел $\tilde{k}$ та $\tilde{m}$, відповідно. Отримаємо рівність, права частина якої має вигляд

$$\Bigg\langle \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m x_{k+M_1,m+M_2}, y_{j,n} \Bigg\rangle,$$

а ліва частина

$$\sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{\tilde{m}} s_{k+j+M_1,m+n+M_2} z^k w^m = \frac{1}{z^{j+M_1} w^{n+M_2}} \Bigg\{ f(z,w) - \sum_{k=j+M_1}^{\tilde{k}+j+M_1} \sum_{m=0}^{n+M_2-1} s_{k,m} z^k w^m -$$
$$- \sum_{k=0}^{j+M_1-1} \sum_{m=n+M_2}^{\tilde{m}+n+M_2} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=0}^{j+M_1-1} \sum_{m=0}^{n+M_2-1} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=\tilde{k}+j+M_1+1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\tilde{m}+n+M_2} s_{k,m} z^k w^m -$$
$$- \sum_{k=0}^{\tilde{k}+j+M_1} \sum_{m=\tilde{m}+n+M_2+1}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m - \sum_{k=\tilde{k}+j+M_1+1}^{\infty} \sum_{m=\tilde{m}+n+M_2+1}^{\infty} s_{k,m} z^k \Bigg\}.$$

Домножимо тепер отримані рівності на коефіцієнти $c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)}$ і підсумуємо по j від 0 до N_1 і по n від 0 до N_2. Права частина отриманої рівності матиме вигляд

$$\left\langle \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m x_{k+M_1,m+M_2}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} \right\rangle.$$

Враховуючи співвідношення біортогональності (4), розвинення отриманої у правій частині рівності функції в ряд за степенями z та w матиме нульові коефіцієнти при $z^k w^m$ для всіх пар $(k,m) \in ([M_1, M_1+N_1] \times [M_2, M_2+N_2]) \setminus \{(M_1+N_1, M_2+N_2)\}$.

При цьому ліва сторона нашої рівності має вигляд

$$\frac{1}{z^{N_1+M_1} w^{N_2+M_2}} \left\{ f(z,w) Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w) - \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{(k,m)\in D^*} s_{k,m} z^k w^m \right\},$$

де $D^* = D_{0,0} \cup D_{0,1} \cup D_{1,0} \cup D_{0,2} \cup D_{2,0} \cup D_{1,2} \cup D_{2,1} \cup D_{2,2}$, а

$$D_{0,0} = [0, j+M_1-1] \times [0, n+M_2-1], D_{0,1} = [0, j+M_1-1] \times [n+M_2, \tilde{m}+n+M_2],$$

$$D_{1,0} = [j+M_1, \tilde{k}+j+M_1] \times [0, n+M_2-1], D_{0,2} = [0, j+M_1-1] \times [\tilde{m}+n+M_2+1, \infty],$$
$$D_{2,0} = [\tilde{k}+j+M_1+1, \infty] \times [0, n+M_2-1], D_{1,2} = [j+M_1, \tilde{k}+j+M_1] \times [\tilde{m}+n+M_2+1, \infty],$$
$$D_{2,1} = [\tilde{k}+j+M_1+1, \infty] \times [n+M_2, \tilde{m}+n+M_2], D_{2,2} = [\tilde{k}+j+M_1+1, \infty] \times [\tilde{m}+n+M_2+1, \infty].$$

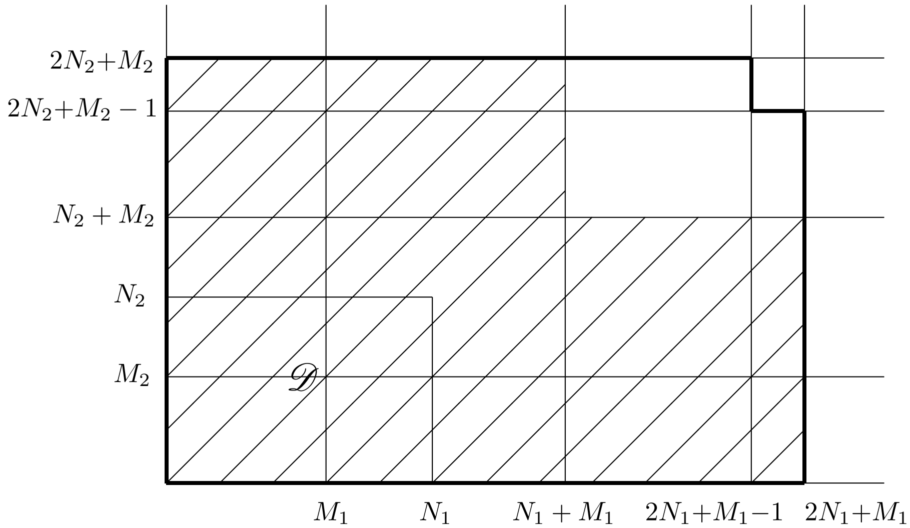
Звідки,

$$\begin{aligned} f(z,w) Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w) - \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j+M_1-1} \sum_{m=0}^{n+M_2-1} s_{k,m} z^k w^m - \\ - \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=0}^{j+M_1-1} \sum_{m=n+M_2}^{\tilde{m}+n+M_2} s_{k,m} z^k w^m - \\ - \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=1}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^{N_1-j} w^{N_2-n} \sum_{k=j+M_1}^{\tilde{k}+j+M_1} \sum_{m=0}^{n+M_2-1} s_{k,m} z^k w^m = \\ = O\left(w^{\tilde{m}}\right) + O\left(z^{\tilde{k}}\right) + z^{N_1+M_1} w^{N_2+M_2} \left\langle \sum_{k=0}^{\tilde{k}} \sum_{m=0}^{\tilde{m}} z^k w^m x_{k+M_1,m+M_2}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} \right\rangle. \end{aligned}$$

Звідси, з огляду на довільність вибору досить великих $\tilde{k}$ та $\tilde{m}$, отримуємо твердження теореми 1. □

Зауваження 1. В [12, с. 323] двовимірні апроксиманти Паде визначаються множинами $\mathscr{N}$, $\mathscr{D}$ та $\mathscr{E}$ двовимірної цілочислової гратки $\mathbb{Z}_+^2$ такими, що індекси коефіцієнтів чисельника належать до множини $\mathscr{N}$, індекси коефіцієнтів знаменника — до $\mathscr{D}$, а індекси коефіцієнтів різниці $f(z,w) - \frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q_{\mathscr{D}}(z,w)}$, що перетворюються в 0, належать до множини $\mathscr{E}$. Отже, для побудованої в теоремі 1 апроксиманти Паде маємо

$$\begin{gathered} \mathscr{D} = [0, N_1] \times [0, N_2], \\ \mathscr{N} = ([0, 2N_1+M_1] \times [0, 2N_2+M_2]) \setminus ([N_1+M_1, 2N_1+M_1] \times [N_2+M_2, 2N_2+M_2]), \\ \mathscr{E} = ([0, 2N_1+M_1] \times [0, 2N_2+M_2]) \setminus \{(2N_1+M_1, 2N_2+M_2)\}. \end{gathered}$$



(заштрихована частина — це множина $\mathscr{N}$, а обмежена жирним контуром — $\mathscr{E}$).

Подібно можна узагальнити твердження доведеної в [1] теореми $1'$.

Теорема 2. *Якщо за умов теореми 1 для деяких $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ та $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$ існує нетривіальний узагальнений многочлен*

$$Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} y_{j,n}$$

такий, що при $(k,m) \in \{(k,m)\colon (k,m) = (M_1,M_2)+(k_0,m_0), (k_0,m_0) \in \mathscr{H}\}$ виконуються умови біортогональності $\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}\rangle = 0$, де множина $\mathscr{H} \subset \mathbb{Z}_+^2$ обмежена графіком деякої функції $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}])$ і містить точно $(N_1{+}1)\,(N_2{+}1)\,{-}1$ точок, і при цьому $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} \neq 0$, то раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m-n} +$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{M_1+y(m)-N_1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m-n} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{M_2+x(k)-N_2} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m+n} +$$

$$+ z^{N_1} w^{N_2} \sum_{(k,m)\in\Gamma_{x,y}} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m+n} \Bigg\}, \tag{5}$$

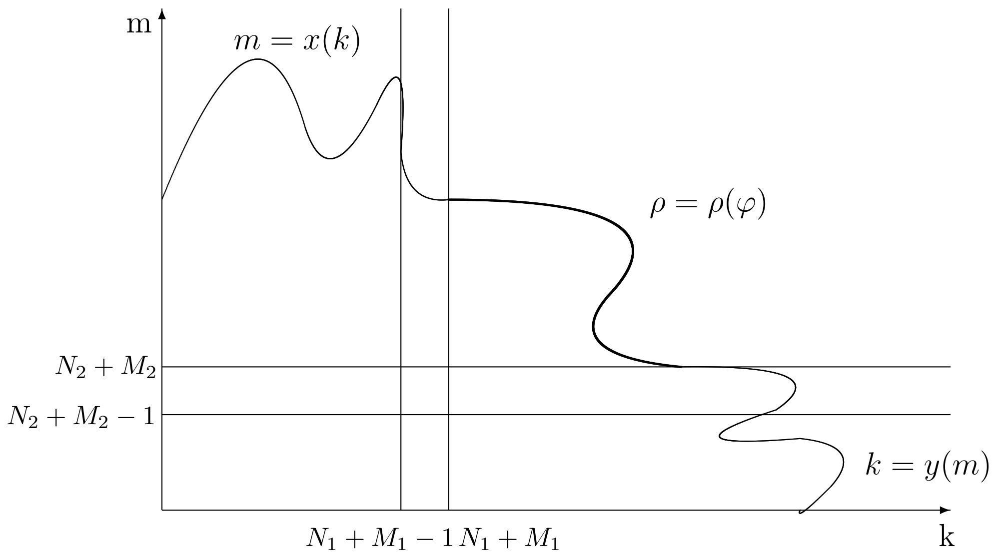
де $\Gamma_{x,y} = \{(k,m)\colon k \in [0, M_1{-}1], m \in [0, M_2{+}x(k){-}N_2]\} \cup \{(k,m)\colon k \in [0, M_1{+}y(m){-}N_1], m \in [0, M_2{-}1]\}$, $x(k), y(m)$ — деякі функції з $\mathbb{Z}_+$ в $\mathbb{Z}_+$: $x(k){\geqslant}N_2$, $y(m){\geqslant}N_1$ для всіх значень k та m, а знаменник апроксиманти має вигляд

$$Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} z^j w^n,$$

матиме розвинення у подвійний степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (2) *для всіх*

$$(k,m)\in\mathscr{E}=([0,N_1+M_1-1]\ \times\ [0,N_2+M_2-1])\cup$$
$$\cup\{(k,m)\colon k\in[0,N_1+M_1-1], m\in[N_2+M_2,x(k)]\}\cup$$
$$\cup\{(k,m)\colon m\in[0,N_2+M_2-1], k\in[N_1+M_1,y(m)]\}\cup$$
$$\cup\{(k,m)\colon k\geqslant N_1+M_1, m\geqslant N_2+M_2, (k-N_1-M_1, m-N_2-M_2)\in\mathscr{H}\}\,.$$

Тобто, раціональна функція (5) є апроксимантою Паде ряду (2) зі знаменником, коефіцієнти якого мають індекси з множини $\mathscr{D}=[0,N_1]\times[0,N_2]$, а коефіцієнти чисельника — з множини $\mathscr{N}=([0,N_1+M_1-1]\ \times\ [0,N_2+M_2-1])\cup\{(k,m)\colon k\in[0,N_1+M_1-1], m\in[N_2+M_2,x(k)]\}\cup\{(k,m)\colon m\in[0,N_2+M_2-1], k\in[N_1+M_1,y(m)]\}\,.$



У випадку, якщо простори $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є нормованими, білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ є нарізно неперервною ([13, с. 63]) і в просторі $\mathscr{X}$ задано обмежені лінійні оператори $A,B\colon\mathscr{X}\to\mathscr{X}$, що комутують між собою, і такі, що $(\forall(k,m)\in\mathbb{Z}_+^2)\colon\ Ax_{k,m}=x_{k+1,m}, Bx_{k,m}=x_{k,m+1}$, а в просторі $\mathscr{Y}$ існують обмежені лінійні оператори $A^\star,B^\star\colon\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}$, спряжені, відповідно, до операторів A та B відносно білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то за умов теореми 1 справджується така формула для похибки апроксимації

$$f(z,w)-\frac{P_{\mathscr{N}}(z,w)}{Q^{(M_1,M_2)}_{N_1,N_2}(z,w)}=\frac{1}{Q^{(M_1,M_2)}_{N_1,N_2}(z,w)}\Bigg\{z^{N_1+M_1}w^{N_2+M_2}\langle\widehat{R_z}(A)\widehat{R_w}(B)x_{M_1,M_2},Y^{(M_1,M_2)}_{N_1,N_2}\rangle+$$
$$+z^{N_1}w^{N_2}\sum_{k=N_1+M_1+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{M_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)}_{j,n}s_{k+j,m+n}+$$
$$+z^{N_1}\sum_{k=N_1+M_1+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{N_2-1}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m}c^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)}_{j,N_2-n}s_{k+j,m-n}+$$
$$+z^{N_1}w^{N_2}\sum_{k=0}^{M_1-1}\sum_{m=N_2+M_2+1}^{\infty}z^kw^m\sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2}c^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)}_{j,n}s_{k+j,m+n}+$$
$$+w^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=N_2+M_2+1}^{\infty}z^kw^m\sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2}c^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)}_{N_1-j,n}s_{k-j,m+n}\Bigg\},$$

де $\widehat{R_s}(F) = (I - sF)^{-1}$ позначає резольвентну функцію оператора $F \in \{A, B\}$.

За умов теореми 2 ця формула набуває вигляду

$$f(z,w) - \frac{P_{\mathcal{N}}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)} = \frac{1}{Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)} \Big\{ z^{N_1+M_1} w^{N_2+M_2} \langle \widehat{R_z}(A) \widehat{R_w}(B) x_{M_1,M_2}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)} \rangle +$$
$$+ z^{N_1} w^{N_2} \sum_{m=0}^{M_2-1} \sum_{k=M_1+y(m)-N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m+n} +$$
$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=M_1+y(m)-N_1+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m-n} +$$
$$+ z^{N_1} w^{N_2} \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{m=M_2+x(k)-N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k+j,m+n} +$$
$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=M_2+x(k)-N_2+1}^{\infty} z^k w^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} s_{k-j,m+n} \Big\}.$$

Нехай на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{Y}_1$ маємо узагальнене моментне зображення вигляду $s_{k+j}^{(1)} = \langle x_k^{(1)}, y_j^{(1)} \rangle_1,\ k, j \in \mathbb{Z}_+$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ — білінійна форма на $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{Y}_1$. На добутку лінійних просторів $\mathscr{X}_2 \times \mathscr{Y}_2$ також маємо узагальнене моментне зображення вигляду $s_{k+j}^{(2)} = \langle x_k^{(2)}, y_j^{(2)} \rangle_2,\ k, j \in \mathbb{Z}_+$, де $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ — білінійна форма на $\mathscr{X}_2 \times \mathscr{Y}_2$.

Нехай на добутку просторів $\mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ задано лінійну операцію, яка кожній парі $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathscr{X}_1 \times \mathscr{X}_2$ ставить у відповідність певний елемент x деякого лінійного простору $\mathscr{X}$. Позначимо цю операцію символом $\circ$: $x^{(1)} \circ x^{(2)} = x \in \mathscr{X}$.

Нехай на добутку просторів $\mathscr{Y}_1 \times \mathscr{Y}_2$ задано таку лінійну операцію, яка кожній парі $(y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathscr{Y}_1 \times \mathscr{Y}_2$ ставить у відповідність певний елемент y деякого лінійного простору $\mathscr{Y}$. Позначимо цю операцію символом $\diamond$: $y^{(1)} \diamond y^{(2)} = y \in \mathscr{Y}$.

На декартовому добутку $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ визначимо білінійну форму $\langle ., . \rangle$ таку, що якщо $x = x^{(1)} \circ x^{(2)}$, а $y = y^{(1)} \diamond y^{(2)}$, то $\langle x, y \rangle = \langle x^{(1)}, y^{(1)} \rangle_1 \cdot \langle x^{(2)}, y^{(2)} \rangle_2$.

Тоді, на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ отримаємо двовимірне узагальнене моментне зображення $s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle = \langle x_k^{(1)}, y_j^{(1)} \rangle_1 \cdot \langle x_m^{(2)}, y_n^{(2)} \rangle_2 = s_{k+j}^{(1)} \cdot s_{m+n}^{(2)}$.

Відповідна функція від двох змінних матиме вигляд

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k w^m = f^{(1)}(z) \cdot f^{(2)}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k^{(1)} z^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} s_m^{(2)} w^m.$$

Для того, щоб побудувати апроксиманти Паде функції $f(z,w)$, за теоремою 1 нам потрібно побудувати узагальнені многочлени (3), що мають властивості біортогональності (4) при $(k,m) \in ([M_1, M_1+N_1] \times [M_2, M_2+N_2]) \setminus \{(M_1+N_1, M_2+N_2)\}$.

Умови біортогональності запишуться у вигляді

$$\sum_{j=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} \langle x_k^{(1)}, y_j^{(1)} \rangle \cdot \langle x_m^{(2)}, y_n^{(2)} \rangle = 0.$$

Очевидно, що коефіцієнти $c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)}$ можна вибрати у вигляді

$$c_{j,n}^{(N_1,N_2),(M_1,M_2)} = c_j^{(1),(N_1)} \cdot c_n^{(2),(N_2)},$$

де $c_j^{(1),(N_1)}$ і $c_n^{(2),(N_2)}$ — коефіцієнти біортогональних многочленів $Y_{N_1}^{(1)} = \sum_{j=0}^{N_1} c_j^{(1),(N_1)} y_j^{(1)}$ та $Y_{N_2}^{(2)} = \sum_{n=0}^{N_2} c_n^{(2),(N_2)} y_n^{(2)}$, відповідно, що мають властивості біортогональності

$$\langle x_k^{(1)}, Y_{N_1}^{(1)} \rangle = 0,\ k \in \{M_1, \dots, M_1 + N_1 - 1\},\ \langle x_m^{(2)}, Y_{N_2}^{(2)} \rangle = 0,\ m \in \{M_2, M_2 + N_2 - 1\}.$$

Тому, за схемою теореми 1 отримаємо знаменник апроксиманти Паде $Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)$ у вигляді $Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w) = Q_{N_1}^{(1)}(z) \cdot Q_{N_2}^{(2)}(w)$, де $Q_{N_1}^{(1)}(z), Q_{N_2}^{(2)}(w)$ — знаменники апроксимант Паде функцій $f^{(1)}(z)$, $f^{(2)}(w)$, відповідно.

Отже, використовуючи теорему 1 для побудови двовимірних апроксимант Паде функцій вигляду $f(z,w) = f^{(1)}(z) \cdot f^{(2)}(w)$, ми отримаємо апроксиманти вигляду

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w) = [N_1 + M_1 - 1/N_1]_{f^{(1)}}(z)[N_2 + M_2 - 1/N_2]_{f^{(2)}}(w).$$

Нехай тепер $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$ — простори функцій, інтегровних з квадратом за мірою (з вагою) $d\mu(t,u) = u^\nu t^\sigma (1-t)^\rho du dt$ на трикутнику $\Delta = \{(t,u)\colon 0 \leqslant t \leqslant 1-u, 0 \leqslant u \leqslant 1\}$, де $\nu, \sigma, \rho > -1$. Введемо на декартовому добутку $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ нарізно неперервну білінійну форму

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 \int_0^{1-t} x(t,u) y(t,u) u^\nu t^\sigma (1-t)^\rho du dt. \tag{6}$$

У просторі $\mathscr{X}$ розглянемо оператори множення на незалежні змінні $(A\varphi)(t,u) = t\varphi(t,u), (B\varphi)(t,u) = u\varphi(t,u)$. Тоді, якщо покласти $x_{0,0}(t,u) = y_{0,0}(t,u) \equiv 1$, то

$$x_{k,m}(t,u) = (A^k B^m x_{0,0})(t,u) = t^k u^m. \tag{7}$$

Тому,

$$s_{k,m} = \langle x_{k,m}, y_{0,0} \rangle = \int_0^1 \int_0^{1-t} t^k u^m u^\nu t^\sigma (1-t)^\rho du dt = \int_0^1 t^{k+\sigma} (1-t)^\rho \int_0^{1-t} u^{m+\nu} du dt =$$
$$= \int_0^1 t^{k+\sigma} (1-t)^\rho \frac{(1-t)^{m+\nu+1}}{m+\nu+1} dt = \frac{\Gamma(k+\sigma+1)\Gamma(\rho+m+\nu+2)}{(m+\nu+1)\Gamma(k+m+\sigma+\rho+\nu+3)}.$$

Побудована функція

$$f(z,w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\sigma+1)\Gamma(\rho+m+\nu+2)}{(m+\nu+1)\Gamma(k+m+\sigma+\rho+\nu+3)} z^k w^m \tag{8}$$

при $\rho = 0$ є частинним випадком гіпергеометричного ряду Аппеля

$$F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, z, w) = \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\alpha')_m (\beta)_k (\beta')_m}{(\gamma)_{k+m} k! m!} z^k w^m$$

(див. [14], с. 220, формула (8)) при $\alpha = \sigma + 1$, $\alpha' = \nu + 1$, $\beta = \beta' = 1$, $\gamma = \sigma + \nu + 3$.

Задача побудови апроксимант Паде функції (8) зводиться до задачі побудови біортогональних многочленів вигляду (3), що мають властивості біортогональності (4) при $(k,m) \in ([M_1, M_1 + N_1] \times [M_2, M_2 + N_2]) \setminus \{(M_1 + N_1, M_2 + N_2)\}$.

Лема 1. *Нехай Δ — компактна множина з $\mathbb{R}^2$, що має непорожню внутрішність, а $d\mu$ — строго додатна міра на $\mathcal{D}$. Тоді, для будь-яких $N_1, N_2 \in \mathbb{Z}_+$ існує єдиний з точністю до сталого множника нетривіальний многочлен від двох змінних*

$$Y_{N_1,N_2}(t,u) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} t^j u^n$$

такий, що $\iint_\Delta t^k u^m Y_{N_1,N_2}(t,u)d\mu(t,u) = 0$ для всіх $(k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2]) \setminus \{(N_1,N_2)\}$, і при цьому $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$.

Доведення. Розглянемо простір $L_2[\Delta, d\mu]$ дійснозначних функцій від двох змінних, інтегровних з квадратом на компакті Δ за мірою $d\mu$

$$L_2[\Delta, d\mu] = \Big\{\varphi(t,u) \colon \int_\Delta |\varphi(t,u)|^2 d\mu(t,u) < +\infty\Big\}.$$

Зрозуміло, що $L_2[\Delta, d\mu]$ є дійсним гільбертовим простором зі скалярним добутком $(\varphi,\psi) = \int_\Delta \varphi(t,u)\psi(t,u)d\mu(t,u)$. Система функцій $\{t^k u^m, (k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2])\}$, очевидно, є лінійно незалежною у цьому просторі. Тому, за теоремою про ортогоналізацію за Шмідтом ([15, с. 168–169]) отримуємо всі твердження леми. $\square$

Сформулюємо допоміжну лему про побудову згаданих вище многочленів.

Лема 2. *Біортогональний многочлен $Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(t,u)$, для якого виконуються умови біортогональності*

$$\langle x_{k+M_1,m+M_2}, Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}\rangle = 0, \quad (k,m)\in([0,N_1]\times[0,N_2])\setminus\{(N_1,N_2)\}, \tag{9}$$

де білінійна форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ визначається рівністю (6), має вигляд

$$Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(t,u) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n} t^j u^n, \tag{10}$$

$$\text{де } c_{j,n} = \sum_{m=0}^{N_2}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum_{r=1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}\sum_{k=0}^{N_1-j}(-1)^{N_1+r-j-k}\binom{N_1+r}{N_1+r-j-k-n}\binom{n-1+k}{k}\times$$
$$\times\frac{(N_1+r+m+M_2+\rho+\nu+j+k+n+2)!}{(M_1+\sigma+j+k+n+1)!} + \widetilde{\omega}_{N_2,n}\alpha_0^{(N_2)}\sum_{k=0}^{N_1-j}(-1)^{N_1-j-k}\times$$
$$\times\binom{N_1}{N_1-j-k-n}\binom{n-1+k}{k}\frac{(N_1+N_2+M_2+\rho+\nu+j+k+n+2)!}{(M_1+\sigma+j+k+n+1)!}, \tag{11}$$
$$\widetilde{\omega}_{m,n} = (-1)^{m+n}\frac{(M_2+n+\nu+1)_{N_2+1}(M_2+m+\nu+1)_{N_2+1}}{(M_2+m+n+\nu+1)m!(N_2-m)!n!(N_2-n)!},$$

а коефіцієнти $\alpha_r^{(m)}$ $(m \in \{0,\ldots,N_2\}, r \in \{1,\ldots,N_2\})$ є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{N_2}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum\limits_{r=n+1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}(-1)^{r-n-1}\binom{N_1+r}{r-n-1}\frac{(2N_1+M_1+M_2+r+m+\sigma+\rho+\nu+n+3)!}{(N_1+M_1+\sigma+n+2)!} = 0,\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 0 \leqslant n \leqslant N_2-1;\\ \sum\limits_{m=0}^{N_2}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum\limits_{r=1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}\gamma_m\binom{N_1+r}{N_1+r-k}\frac{(N_1+r+m+M_1+M_2+\sigma+\rho+\nu+k+2)!k!}{(m+M_2+\rho+\nu+k+2)!} =\\ = -\widetilde{\omega}_{N_2,n}\alpha_0^{(N_2)}\gamma_{N_2}\binom{N_1}{N_1-k}\frac{(N_1+N_2+M_1+M_2+\sigma+\rho+\nu+k+2)!k!}{(N_2+M_2+\rho+\nu+k+2)!}, \text{ при } 1 \le n \le N_2, 0 \le k \le n-1,\end{cases}$$

$\alpha_0^{(N_2)}$ — *деяке фіксоване число*, $\gamma_m = \frac{(N_1+r+m+M_2+\rho+\nu+1)!}{(N_1+r+M_1+\sigma)!}$.

Доведення. Многочлен (10) запишемо у вигляді $Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(t,u) = \sum_{n=0}^{N_2} u^n Y_{N_1}^{(n)}(t)$, де

$$Y_{N_1}^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{N_1} c_{j,n} t^j. \tag{12}$$

Зафіксуємо $m \in [0, N_2 - 1]$. Тоді, умова біортогональності (9) справджується для $k \in [0, N_1]$ і на основі (6) та (7) набуває вигляду

$$\int_0^1 \int_0^{1-t} t^{k+M_1} u^{m+M_2} Y_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(t,u) u^\nu t^\sigma (1-t)^\rho du dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{N_2} \int_0^1 Y_{N_1}^{(n)}(t) t^{k+M_1+\sigma}(1-t)^\rho \frac{(1-t)^{n+m+M_2+\nu+1}}{n+m+M_2+\nu+1} dt =$$
$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{N_2} \frac{(1-t)^n}{n+m+M_2+\nu+1} Y_{N_1}^{(n)}(t) \right) t^k t^{M_1+\sigma}(1-t)^{m+M_2+\rho+\nu+1} dt = 0.$$

Отже, алгебраїчний многочлен $\sum_{n=0}^{N_2} \frac{(1-t)^n}{n+m+M_2+\nu+1} Y_{N_1}^{(n)}(t)$ степеня $N_1 + N_2$ є ортогональним до кожного алгебраїчного многочлена степеня, що не перевищує N_1 з вагою $t^{M_1+\sigma}(1-t)^{m+M_2+\rho+\nu+1}$. Тому, його можна зобразити у вигляді лінійної комбінації алгебраїчних многочленів степенів $N_1+1, N_1+2, \ldots, N_1+N_2$, ортогональних на $[0,1]$ з відповідною вагою. Отже, отримуємо рівність

$$\sum_{n=0}^{N_2} \frac{(1-t)^n}{n+m+M_2+\nu+1} Y_{N_1}^{(n)}(t) = \sum_{r=1}^{N_2} \alpha_r^{(m)} P_{N_1+r}^{(M_1+\sigma, m+M_2+\rho+\nu+1)}(t), \tag{13}$$

де $P_N^{(\alpha,\beta)}(t)$ — ортогональний зсунутий на $[0,1]$ многочлен Якобі з вагою $t^\alpha(1-t)^\beta$, явний вигляд якого (див. [16], с. 581)

$$P_N^{(\alpha,\beta)}(t) = \gamma_N \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \binom{N}{j} \frac{(2N+\alpha+\beta+1-j)!}{(N+\alpha+1-j)!} t^{N-j}, \tag{14}$$

де γ_N — деяка стала. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $\gamma_N = 1$.

При $m = N_2$ умова біортогональності виконуватиметься тільки до x_{k,N_2} при $k \in \{0, \ldots, N_1 - 1\}$, тому, отримаємо, що

$$\sum_{n=0}^{N_2} \frac{(1-t)^n}{n+N_2+M_2+\nu+1} Y_{N_1}^{(n)}(t) = \sum_{r=0}^{N_2} \alpha_r^{(N_2)} P_{N_1+r}^{(M_1+\sigma, N_2+M_2+\rho+\nu+1)}(t). \tag{15}$$

Запишемо рівняння (13) та (15) у векторному вигляді. Для цього позначимо

$$\widetilde{Y}_{N_1}^{(n)}(t) = (1-t)^n Y_{N_1}^{(n)}(t), \ \overrightarrow{Y}(t) = \left(\widetilde{Y}_{N_1}^{(0)}(t), \widetilde{Y}_{N_1}^{(1)}(t), \ldots, \widetilde{Y}_{N_1}^{(N_2)}(t) \right)^T,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{1}{M_2+\nu+1} & \frac{1}{M_2+\nu+2} & \cdots & \frac{1}{M_2+N_2+\nu+1} \\ \frac{1}{M_2+\nu+2} & \frac{1}{M_2+\nu+3} & \cdots & \frac{1}{M_2+N_2+\nu+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{M_2+N_2+\nu+1} & \frac{1}{M_2+N_2+\nu+2} & \cdots & \frac{1}{M_2+2N_2+\nu+1} \end{pmatrix}.$$

Праву частину кожного з рівнянь (13) та (15) позначимо через $\widetilde{P}_m(t)$ і $\overrightarrow{P}(t) = (\widetilde{P}_0(t), \widetilde{P}_1(t), \ldots, \widetilde{P}_{N_2}(t))^T$. Тоді, система рівнянь (13) та (15) набуде вигляду $\Omega\overrightarrow{Y}(t) = \overrightarrow{P}(t)$. Отже,

$$\overrightarrow{Y}(t) = \Omega^{-1}\overrightarrow{P}(t). \tag{16}$$

Елементи оберненої матриці Ω^{-1} матимуть вигляд

$$\widetilde{\omega}_{m,n} = \frac{\Omega_{m,n}}{\Delta\Omega}, \tag{17}$$

де $\Omega_{m,n}$ — алгебраїчне доповнення елемента $\omega_{m,n} = \frac{1}{M_2+m+n+\nu+1}$ матриці Ω.

Оскільки матриця Ω породжена ядром Коші $K(s,t) = \frac{1}{s+t}$ і її елементи $\omega_{m,n} = \frac{1}{M_2+m+n+\nu+1} = \frac{1}{s_m+t_n}$, де $s_m = M_2 + m + \frac{\nu+1}{2}, t_n = n + \frac{\nu+1}{2}$, то визначник матриці обчислюється за формулою (див. [17], с. 22)

$$\Delta\Omega = \frac{\prod_{m>n}(s_m - s_n)(t_m - t_n)}{\prod_{m,n=0}^{N_2}(s_m + t_n)} = \frac{\prod_{m>n}(m-n)^2}{\prod_{m,n=0}^{N_2}(M_2 + m + n + \nu + 1)} =$$

$$= \frac{\prod_{m=1}^{N_2}(m!)^2}{\prod_{k=0}^{2N_2}(M_2 + k + \nu + 1)^{N_2+1-|N_2-k|}}.$$

Алгебраїчне доповнення $\Omega_{m,n}$ за тією ж формулою дорівнюватиме

$$\Omega_{m,n} = (-1)^{m+n}\frac{\prod_{\substack{j>i\\ i,j\neq m}}(s_j - s_i)\prod_{\substack{j>i\\ i,j\neq n}}(t_j - t_i)}{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq m}}^{N_2}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{N_2}(s_i + t_j)}.$$

Чисельник та знаменник алгебраїчного доповнення $\Omega_{m,n}$ можна записати, відповідно, у вигляді

$$\prod_{\substack{j>i\\ i,j\neq m}}(s_j - s_i)\prod_{\substack{j>i\\ i,j\neq n}}(t_j - t_i) =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{i=0}^{j-1}(s_j - s_i)}{\sum_{i=0}^{m-1}(s_m - s_i)\sum_{j=m+1}^{N_2}(s_j - s_m)}\frac{\sum_{j=1}^{N_2}\sum_{i=0}^{j-1}(t_j - t_i)}{\sum_{i=0}^{n-1}(t_n - t_i)\sum_{j=n+1}^{N_2}(t_j - t_n)} = \frac{\prod_{j=1}^{N_2}(j!)^2}{m!(N_2-m)!n!(N_2-n)!},$$

$$\prod_{\substack{i=0\\ i\neq m}}^{N_2}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{N_2}(s_i + t_j) = \frac{(s_m + t_n)\cdot\sum_{i,j=0}^{N_2}(s_i + t_j)}{\sum_{i=0}^{N_2}(s_i + t_n)\sum_{j=0}^{N_2}(s_m + t_j)} =$$

$$= \frac{\prod_{k=0}^{2N_2}(M_2 + k + \nu + 1)^{N_2+1-|N_2-k|}(M_2 + m + n + \nu + 1)}{\prod_{i=0}^{N_2}(M_2 + i + n + \nu + 1)\prod_{j=0}^{N_2}(M_2 + j + m + \nu + 1)}.$$

Отже, елементи оберненої матриці (17) дорівнюють

$$\widetilde{\omega}_{m,n} = (-1)^{m+n}\frac{(M_2 + n + \nu + 1)_{N_2+1}(M_2 + m + \nu + 1)_{N_2+1}}{(M_2 + m + n + \nu + 1)m!(N_2-m)!n!(N_2-n)!}.$$

Тому, рівність (16) переписується у вигляді

$$(1-t)^n Y_{N_1}^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{N_2}\widetilde{\omega}_{m,n}\widetilde{P}_m(t) = \sum_{m=0}^{N_2-1}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum_{r=1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}P_{N_1+r}^{(M_1+\sigma, m+M_2+\rho+\nu+1)}(t) +$$

$$+\widetilde{\omega}_{N_2,n}\sum_{r=0}^{N_2}\alpha_r^{(N_2)}P_{N_1+r}^{(M_1+\sigma, N_2+M_2+\rho+\nu+1)}(t). \tag{18}$$

Якщо тепер поділити обидві частини рівності (18) на $(1-t)^n$ і врахувати (12) та (14), то отримаємо коефіцієнти $c_{j,n}$ у вигляді (11).

Залишається обчислити коефіцієнти $\alpha_r^{(m)}$. Для цього треба врахувати дві умови:

1. Зліва в рівності (18) степінь многочлена дорівнює N_1+n, $n\in\{0,\ldots,N_2\}$. Тому і справа степінь многочлена не може перевищувати N_1+n, $n\in\{0,\ldots,N_2\}$.

Отже, при $0\leqslant n\leqslant N_2-1$

$$\sum_{m=0}^{N_2}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum_{r=n+1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}(-1)^{r-n-1}\binom{N_1+r}{r-n-1}\frac{(2N_1+M_1+M_2+r+m+\sigma+\rho+\nu+n+3)!}{(N_1+M_1+\sigma+n+2)!}=0. \tag{19}$$

Кількість рівнянь вигляду (19) дорівнює $N_2+(N_2-1)+\ldots+1=\frac{N_2(N_2+1)}{2}$.

2. Оскільки ліва частина (18) ділиться на $(1-t)^n$, $n\in\{1,\ldots,N_2\}$, то

$$\frac{d^k}{dt^k}\Bigg\{\sum_{m=0}^{N_2-1}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum_{r=1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}P_{N_1+r}^{(M_1+\sigma,m+M_2+\rho+\nu+1)}(t)+ \tag{20}$$
$$+\widetilde{\omega}_{N_2,n}\sum_{r=0}^{N_2}\alpha_r^{(N_2)}\ P_{N_1+r}^{(M_1+\sigma,N_2+M_2+\rho+\nu+1)}(t)\Bigg\}\Bigg|_{t=1}=0$$

при $k\in\{0,\ldots,n-1\}$. Враховуючи, що $P_N^{(\alpha,\beta)}(1)=(-1)^N\frac{(N+\beta)!}{(N+\alpha)!}P_N^{(\beta,\alpha)}(0)$, рівність (20) запишемо у вигляді

$$\frac{d^k}{dt^k}\Bigg\{\sum_{m=0}^{N_2-1}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum_{r=1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}\frac{(N_1+r+m+M_2+\rho+\nu+1)!}{(N_1+r+M_1+\sigma)!}P_{N_1+r}^{(m+M_2+\rho+\nu+1,M_1+\sigma)}(t)+ \tag{21}$$
$$+\widetilde{\omega}_{N_2,n}\sum_{r=0}^{N_2}\alpha_r^{(N_2)}\ \frac{(N_1+N_2+r+M_2+\rho+\nu+1)!}{(N_1+r+M_1+\sigma)!}P_{N_1+r}^{(N_2+M_2+\rho+\nu+1,M_1+\sigma)}(t)\Bigg\}\Bigg|_{t=0}=0$$

при $k\in\{0,\ldots,n-1\}$. Отже, отримуємо систему з $N_2^2+N_2$ рівнянь.

Кількість невідомих $\alpha_r^{(m)}, r\in\{1,\ldots,N_2\}$ при $0\leqslant m\leqslant N_2-1$ і $\alpha_r^{(N_2)}, r\in\{0,\ldots,N_2\}$ складає: $N_2\cdot N_2+N_2+1=N_2^2+N_2+1$.

Продиференціювавши (21) і зафіксувавши $\alpha_0^{(N_2)}$, отримаємо

$$\sum_{m=0}^{N_2}\widetilde{\omega}_{m,n}\sum_{r=1}^{N_2}\alpha_r^{(m)}\gamma_m\binom{N_1+r}{N_1+r-k}\frac{(N_1+r+m+M_1+M_2+\sigma+\rho+\nu+k+2)!k!}{(m+M_2+\rho+\nu+k+2)!}=$$
$$=-\widetilde{\omega}_{N_2,n}\alpha_0^{(N_2)}\gamma_{N_2}\binom{N_1}{N_1-k}\frac{(N_1+N_2+M_1+M_2+\sigma+\rho+\nu+k+2)!k!}{(N_2+M_2+\rho+\nu+k+2)!}, \tag{22}$$

де $\gamma_m=\frac{(N_1+r+m+M_2+\rho+\nu+1)!}{(N_1+r+M_1+\sigma)!}$. Отже, з (19) та (22) знаходимо коефіцієнти $\alpha_r^{(m)}$. □

За теоремою 2, поклавши $x(k)=4N_2+2M_2-\frac{4N_2+2M_2-1}{4N_1+2M_1-1}k-1, y=4N_1+2M_1-\frac{4N_1+2M_1-1}{4N_2+2M_2-1}m-1$, побудуємо для функції вигляду (8) раціональні апроксиманти. Отримаємо наступний результат.

Теорема 3. *Для ряду вигляду* (8)

$$f(z,w)=\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\sigma+1)\Gamma(\rho+m+\nu+2)}{(m+\nu+1)\Gamma(k+m+\sigma+\rho+\nu+3)}z^kw^m$$

при довільних $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ *та* $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$ *раціональна функція*

$$[\mathscr{N}/\mathscr{D}]_f(z,w) = \frac{P_{\mathscr{N}}^{(M_1,M_2)}(z,w)}{Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w)},$$

де

$$Q_{N_1,N_2}^{(M_1,M_2)}(z,w) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n} z^j w^n, \quad P_{\mathscr{N}}^{(M_1,M_2)}(z,w) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n} \frac{\Gamma(k-j+\sigma+1)\Gamma(m-n+\rho+\nu+2)}{(m-n+\nu+1)\Gamma(k+m-j-n+\sigma+\rho+\nu+3)} +$$

$$+ z^{N_1} \sum_{m=0}^{N_2-1} \sum_{k=0}^{3N_1+3M_1-\frac{4N_1+2M_1-1}{4N_2+2M_2-1}m-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n} \frac{\Gamma(k+j+\sigma+1)\Gamma(m-n+\rho+\nu+2)}{(m-n+\nu+1)\Gamma(k+m+j-n+\sigma+\rho+\nu+3)} +$$

$$+ w^{N_2} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{m=0}^{3N_2+3M_2-\frac{4N_2+2M_2-1}{4N_1+2M_1-1}k-1} z^k w^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n} \frac{\Gamma(k-j+\sigma+1)\Gamma(m+n+\rho+\nu+2)}{(m+n+\nu+1)\Gamma(k+m+n-j+\sigma+\rho+\nu+3)} +$$

$$+ z^{N_1} w^{N_2} \sum_{(k,m)\in\Omega_{x,y}} z^k w^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n} \frac{\Gamma(k+j+\sigma+1)\Gamma(m+n+\rho+\nu+2)}{(m+n+\nu+1)\Gamma(k+m+j+n+\sigma+\rho+\nu+3)},$$

коефіцієнти $c_{j,n}$ *обчислюються за формулами* (11),

$$\Omega_{x,y} = \left\{(k,m)\colon k \in [0, M_1-1], m \in \left[0, 3N_2+3M_2 - \frac{4N_2+2M_2-1}{4N_1+2M_1-1}k - 1\right]\right\} \cup$$
$$\cup \left\{(k,m)\colon k \in \left[0, 3N_1+3M_1 - \frac{4N_1+2M_1-1}{4N_2+2M_2-1}m - 1\right], m \in [0, M_2-1]\right\},$$

матиме розвинення у подвійний степеневий ряд, коефіцієнти якого дорівнюватимуть коефіцієнтам ряду (8) *для всіх* $(j,n) \in \mathscr{E} = \{(j,n) \in Z_+^2\colon j = 3N_1+2M_1-1-\frac{4N_1+2M_1-1}{4N_2+2M_2-1}n\}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Golub A.P., Chernetska L.O. *Two-dimensional generalized moment representations and rational approximants of two-variable functions*// Ukr. Mat. Zh. – 2013. – V.65, №8. – P. 1035–1058. (in Ukrainian)
2. Golub A.P., Chernetska L.O. *Two-dimensional generalized moment representations and Padé approximants for some Humbert series*// Ukr. Mat. Zh. – 2013. – V.65, №10. – P. 1315–1331. (in Ukrainian)
3. Dzjadyk V.K. *On a generalization of the moment problem*// Dokl. Akad. Nauk Ukrain. – 1981. – V.6. – P. 8–12. (in Ukrainian)
4. Alabiso C., Butera P. *N-variable rational approximants and method of moments*// J. Math. Phys. – 1975. – V.16, №4. – P. 840–845.
5. Cuyt A. *How well can the concept of Padé approximant be generalized to the multivariate case?*// J. Comput. Appl. Math. – 1999. – V.105, №1,2. – P. 25–50.
6. Hughes Jones R. *General rational approximants in N variables*// J. Approx. Theory. – 1976. – V.16. – P. 201 – 233.

7. Lutterodt C. *A two-dimensional analogue of Padé approximant theory*// J. Phys. A.: Math. – 1974. – V.7. – P. 1027–1037.
8. Zhou P. *Explicit construction for multivariate Padé approximants*// J. Comput. Appl. Math. – 1997. – V.79. – P. 1–17.
9. Cuyt A., Driver K., Tan J., Verdonk B. *Exploring multivariate Padé approximants for multiple hypergeometric series*// Adv. Comput. Math. – 1999. – V.10, №1. – P. 29–49.
10. Cuyt A., Tan J., Zhou P. *General order multivariate Padé approximants for pseudo-multivariate functions*// Math. Comput. – 2006. – V.75, №254. – P. 727–741.
11. Borwein P.B., Cuyt A., Zhou P. *Explicit construction of general multivariate Padé approximants to an Appell function*// Adv. Comput. Math. – 2005. – V.22, №3. – P. 249–273.
12. Baker G.A., Graves–Morris P.R. Padé approximants. – M.: Mir, 1986. – 502 p. (in Russian)
13. Rudin W. Functional analysis. – M.: Mir, 1975. – 444 p. (in Russian)
14. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions. – M.: Nauka, 1973, V.1. – 296 p. (in Russian)
15. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis. – M.: Nauka, 1977. – 744 p. (in Russian)
16. Abramowitz M., Stegun I. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. – M.: Nauka, 1979. – 832 p. (in Russian)
17. Karlin S., Studden W.J. Tchebycheff systems: with applications in analysis and statistics. – M.: Nauka, 1976. – 568 p. (in Russian)

Institute of Mathematics NASU
chernets.liliya@yandex.ua

Надійшло 22.06.2013
Після переробки 14.04.2014