УДК 514.7

А. В. Крутоголова, С. М. Покась, Л. Г. Цехмейструк

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ВТОРОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

A. V. Krutogolova, S. M. Pokas, L. G. Tsekhmeystruk. *Induced mappings of the Riemannian spaces of the second-order approximation*, Mat. Stud. **41** (2014), 220–224.

For the Riemannian spaces $\overline{V}_n$ and V_n assuming non-trivial geodesic mapping γ, we have constructed the spaces of the second-order approximation $\widetilde{\overline{V}}{}^2_n$ and $\widetilde{V}^2_n$. We have researched the mapping $\widetilde{\gamma}$, which is induced by the mapping γ. Also we have obtained the deformation tensor of mapping $\widetilde{\gamma}$ in an explicit form.

А. В. Крутоголова, С. М. Покась, Л. Г. Цехмейструк. *Индуцированные отображения римановых пространств второго приближения* // Мат. Студії. – 2014. – Т.41, №2. – С.220–224.

Для римановых пространств $\overline{V}_n$ и V_n, допускающих нетривиальное геодезическое отображение γ, строятся пространства второго приближения $\widetilde{\overline{V}}{}^2_n$ и $\widetilde{V}^2_n$. Исследуется отображение $\widetilde{\gamma}$, которое индуцируется отображением γ. В явном виде получен тензор деформации отображения $\widetilde{\gamma}$.

Для двух римановых пространств $V_n(x;g)$ и $\overline{V}_n(\overline{x},\overline{g})$, где $\overline{V}_n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение γ на V_n ([3], [4]), построим инвариантно связанные с V_n и $\overline{V}_n$ пространства второго приближения $\widetilde{V}^2_n(y;\widetilde{g}_{ij})$ и $\widetilde{\overline{V}}{}^2_n(y;\widetilde{\overline{g}}_{ij})$

$$\widetilde{g}_{ij}(y)=g_{ij}(M_0)+\frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(M_0)y^\alpha y^\beta,\ \widetilde{\overline{g}}_{ij}(y)=\overline{g}_{ij}(M_0)+\frac{1}{3}\overline{R}_{i\alpha\beta j}(M_0)y^\alpha y^\beta. \tag{1}$$

В дальнейшем формулы вида (1) мы будем записывать в виде

$$\widetilde{g}_{ij}(y)=g_{ij}+\frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}y^\alpha y^\beta$$

считая, что объекты исходного пространства V_n вычислены в точке M_0.

Исследуем специфику отображения $\widetilde{\gamma}$ пространства $\widetilde{\overline{V}}{}^2_n$ на пространство $\widetilde{V}^2_n$, которое индуцируется геодезическим отображением γ исходных пространств $\overline{V}_n$ и V_n. Для этого найдем тензор деформации отображения $\widetilde{\gamma}$ ([1], [2])

$$\widetilde{P}^h_{ij}=\widetilde{\overline{\Gamma}}{}^h_{ij}-\widetilde{\Gamma}^h_{ij}. \tag{2}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 53C25.
Keywords: Riemannian space; geodesic mapping; deformation tensor.

Так как пространство $\overline{V}_n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение γ на пространство V_n, то компоненты тензоров Римана этих пространств связаны соотношением ([1], [2])

$$\overline{R}^h_{\cdot ijk} = R^h_{\cdot ijk} + \psi_{ik}\delta^h_j - \psi_{ij}\delta^h_k. \tag{3}$$

Введем следующие обозначения

$$\frac{1}{3}\overline{R}^h_{\cdot l_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2} = \bar{t}^h_k,\ \frac{1}{3} R^h_{\cdot l_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2} = t^h_k, \tag{4}$$

$$\bar{t}^{(p)}{}^h_k = \bar{t}^{(p-1)}{}^h_\alpha\, \bar{t}^\alpha_k,\ t^{(p)}{}^h_k = t^{(p-1)}{}^h_\alpha\, t^\alpha_k,\ (p \in \{2, 3, \ldots\}), \tag{5}$$

$$\frac{1}{3}\psi_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} = A, \quad A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{p}, \tag{6}$$

$$\frac{1}{3}\psi_{il} y^l = \varphi_i, \tag{7}$$

$$\frac{1}{3}\overline{R}^h_{\cdot(ij)l} y^l = \overline{\mu}^h_{ij},\ \frac{1}{3} R^h_{\cdot(ij)l} y^l = \mu^h_{ij}. \tag{8}$$

Имеет место утверждение.

Лемма 1. *Элементы $\widetilde{\overline{g}}^{ij}(y)$ и $\widetilde{g}^{ij}(y)$ обратных матриц для матриц с элементами (1) имеют вид*

$$\widetilde{\overline{g}}^{ij}(y) = \overline{g}^{ij} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \bar{t}^{(k)ij},\ \widetilde{g}^{ij}(y) = g^{ij} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t^{(k)ij}. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем второе из соотношений (9) (первое доказывается аналогично). Элементы $\widetilde{g}_{ij}(y)$ будем искать в виде аналитических функций

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = a^{ij} + a^{ij}_l y^l + a^{ij}_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} + \ldots, \tag{10}$$

где $a^{ij}, a^{ij}_l, a^{ij}_{l_1 l_2}, \ldots$ — неизвестные константы, причем $a^{ij}_{l_1 \ldots l_k}$ симметричны по любой паре нижних индексов. Из условия $\widetilde{g}_{i\alpha}\widetilde{g}^{\alpha j} = \delta^j_i$ находим коэффициенты рядов (10)

$$\begin{gathered} g_{i\alpha} a^{\alpha j} + (g_{i\alpha} a^{\alpha j}{}_l) y^l + \Big(g_{i\alpha} a^{\alpha j}{}_{l_1 l_2} + \frac{1}{3} a^{\alpha j} R_{\alpha l_1 l_2 i}\Big) y^{l_1} y^{l_2} + \\ + \Big(g_{i\alpha} a^{\alpha j}_{l_1 l_2 l_3} + \frac{1}{3} a^{\alpha j}_{l_1} R_{\alpha l_2 l_3 i}\Big) y^{l_1} y^{l_2} y^{l_3} + \ldots + \\ + \Big(g_{i\alpha} a^{\alpha j}_{l_1 \ldots l_{2k}} + \frac{1}{3} a^{\alpha j}_{l_1 \ldots l_{2k-2}} R_{\alpha l_{2k-1} l_{2k} i}\Big) y^{l_1} \ldots y^{l_{2k}} + \\ + \Big(g_{i\alpha} a^{\alpha j}_{l_1 \ldots l_{2k+1}} + \frac{1}{3} a^{\alpha j}_{l_1 \ldots l_{2k-1}} R_{\alpha l_{2k} l_{2k+1} i}\Big) y^{l_1} \ldots y^{l_{2k+1}} + \ldots = \delta^j_i. \end{gathered}$$

Откуда мы получаем

$$\begin{gathered} a^{ij} = g^{ij},\ a^{ij}_{l_1 \ldots l_{2k+1}} y^{l_1} \ldots y^{l_{2k+1}} = 0,\ (k = 0, 1, 2, \ldots), \\ a^{ij}_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} = -t^{ij},\ a^{ij}_{l_1 \ldots l_4} = t^{(2)ij}, \ldots, \end{gathered}$$

что и завершает доказательство леммы. □

Отметим, что ряды (9) сходятся абсолютно и равномерно на множестве

$$\frac{1}{3}\left|R^h_{\cdot l_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2}\right| \leq \frac{c_1}{n} \ (c_1 < 1).$$

Действительно, функции $\varphi_{hk} = \frac{1}{3} R_{hl_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2}$ ограничены на любом компактном множестве, т.е. $|\varphi_{hk}| \leq \frac{c_1}{n}$, где $c_1 = \mathrm{const}$.

Тогда справедливы оценки

$$\left|t^{(2)}{}^h_k\right| \equiv \left|t^h_\alpha t^\alpha_k\right| \leq \left|t^h_\alpha\right| \cdot \left|t^\alpha_k\right| \leq \frac{{c_1}^2}{n}, \quad \left|t^{(3)}{}^h_k\right| \leq \frac{{c_1}^3}{n}, \ldots, \left|t^{(p)h}_k\right| \leq \frac{{c_1}^p}{n}.$$

Следовательно, $\left|\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p t^{(p)}{}^h_k\right| \leq \sum_{p=1}^{\infty} \left|t^{(p)}{}^h_k\right| \leq \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{\infty} {c_1}^p$.

Ряд $\sum_{p=1}^{\infty} {c_1}^p$ сходится при $c_1 < 1$.

Следовательно, ряды (9) мажорируются сходящимся при $c_1 < 1$ числовым рядом, что и завершает доказательство нашего утверждения.

Аналогично доказывается, что ряды $\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \overline{t}^{(p)}{}^h_k$ сходятся абсолютно и равномерно на множестве

$$\frac{1}{3}\left|\overline{R}^h_{\cdot l_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2}\right| \leq \frac{c_2}{n} \ (c_2 < 1).$$

Методом полной математической индукции доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любого натурального $p \geq 2$ справедливо соотношение*

$$\overline{t}^{(p)}{}^h_k = t^{(p)}{}^h_k + \left[\sum_{s=1}^{p-1} C^s_p A^s t^{(p-s)}{}^h_k + (-1)^p A^p \delta^h_k\right] + \varphi_\alpha y^h \left[\sum_{s=1}^{p-2} C^s_{p-1} A^s t^{(p-s)}{}^\alpha_k + (-1)^{(p+1)} A^{p-1} \delta^\alpha_k\right], \tag{11}$$

где C^s_p — биномиальные коэффициенты.

Доказательство. Рассмотрим (3) в точке M_0 и свернем с $y^i y^j$. Принимая во внимание (4), (6) и (7), получаем

$$\overline{t}^h_k = t^h_k + \varphi_k y^h - A\delta^h_k. \tag{12}$$

Поэтому $\overline{t}^{(2)}{}^h_k \equiv \overline{t}^h_\alpha \overline{t}^\alpha_k = t^{(2)}{}^h_k - 2At^h_k + A^2\delta^h_k + \varphi_\alpha y^h \left(t^\alpha_k - A\delta^\alpha_k\right)$.

Аналогично

$$\overline{t}^{(3)}{}^h_k = t^{(3)}{}^h_k - 3At^{(2)} t^h_k + A^2 t^h_k - A^3 \delta^h_k + \varphi_\alpha y^h \left(t^{(2)}{}^\alpha_k - 2At^\alpha_k + A^2\delta^\alpha_k\right).$$

Следовательно, формула (11) справедлива для $p \in \{2, 3\}$. Предположим, что она верна для $p = q$, т.е.

$$\overline{t}^{(q)}{}^h_k = t^{(q)}{}^h_k + \left[\sum_{s=1}^{q-1} (-1)^s C^s_q A^s t^{(q-s)}{}^h_k + (-1)^q A^q \delta^h_k\right] +$$
$$+ \varphi_\alpha y^h \left[\sum_{s=1}^{q-2} (-1)^{(s+1)} C^s_{q-1} A^s t^{(q-s)}{}^\alpha_k + (-1)^{q+1} A^{q-1} \delta^\alpha_k\right]. \tag{13}$$

Докажем справедливость (11) для $p = q + 1$.

Имеем

$$\overline{t}^{(q+1)}{}^h_k = \overline{t}^{(q)}{}^h_\alpha \ \overline{t}^\alpha_k.$$

Подставив в последнее равенство (12), (13), раскрыв скобки, приведем подобные и убедимся в справедливости леммы. □

Из (1) легко получить символы Кристоффеля первого рода для пространств $\widetilde{V}_n^2$ и $\widetilde{\overline{V}}_n^2$

$$\widetilde{\Gamma}_{ij,k}(y) = -\frac{1}{3}R_{k(ij)l}y^l, \ \widetilde{\overline{\Gamma}}_{ij,k}(y) = -\frac{1}{3}\overline{R}_{k(ij)l}y^l. \tag{14}$$

Принимая во внимание (9), из (14) получаем выражения для объектов связностей пространств $\widetilde{V}_n^2$ и $\widetilde{\overline{V}}_n^2$

$$\widetilde{\Gamma}^h_{ij}(y) = -\mu^\alpha_{ij}\left[\delta^h_\alpha + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p t^{(p)h}_{\ \ \alpha}\right], \ \widetilde{\overline{\Gamma}}^h_{ij}(y) = -\overline{\mu}^\alpha_{ij}\left[\delta^h_\alpha + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p \overline{t}^{(p)h}_{\ \ \alpha}\right]. \tag{15}$$

Подставив (11) и (15) в (2), получаем теорему.

Теорема 1. *Если риманово пространство $\overline{V}_n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение γ на риманово пространство V_n, то тензор деформации $\widetilde{P}^h_{ij}$ индуцированного отображения $\widetilde{\gamma}$ пространства второго приближения $\widetilde{\overline{V}}_n^2$ на пространство $\widetilde{V}_n^2$ имеет следующее строение*

$$\begin{aligned}\widetilde{P}^h_{ij}(y) = \Big(1 - \frac{A}{1-A}\Big)\varphi_{(i}\delta^h_{j)} + A\mu^h_{ij} - \varphi_{(i}t^h_{j)} - \frac{2}{3}\Big\{\psi_{ij} + \varphi_\alpha\mu^\alpha_{ij} - 2\varphi_i\varphi_j + \\ + \sum_{m=2}^{\infty}\Big[(-1)^{m+1}\Big(\varphi_\alpha t^{(m-1)\alpha}_{\ \ \ \ \ \ \beta} + \sum_{s=1}^{m-2}C^s_{m-1}A^s\varphi_\alpha t^{(m-s)\alpha}_{\ \ \ \ \ \ \beta} + A^{m-1}\varphi_\beta\Big)\mu^\beta_{ij} - \varphi_\alpha t^{(m-1)\alpha}_{\ \ \ \ \ \ (i}\varphi_{j)} - \\ - \sum_{s=1}^{m-2}C^s_{m-1}A^s\varphi_\alpha t^{(m-s)\alpha}_{\ \ \ \ \ \ (i}\varphi_{j)} - 2A^{m-1}\varphi_i\varphi_j\Big]\Big\}y^h + \\ + \sum_{m=2}^{\infty}\Big\{(-1)^{m+1}\mu^\alpha_{ij}\Big[\sum_{s=1}^{m-1}C^s_m A^s t^{(m-s)h}_{\ \ \ \ \ \ \alpha} + A^m\delta^h_\alpha\Big] - \varphi_{(i}t^{(m)h}_{\ \ \ \ j)} + \sum_{s=1}^{m-1}C^s_m A^s\varphi_{i)}t^{(m-s)h}_{\ \ \ \ \ \ j)}\Big\}.\end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Нетрудно показать, что, как и в случае (9), ряды (16) сходятся абсолютно и равномерно на множнстве

$$\frac{1}{3}\left|R^h_{\cdot l_1 l_2 k}y^{l_1}y^{l_2}\right| \le \frac{c_1}{n} \quad (c_1 < 1), \quad \frac{1}{3}\left|\psi_{l_1 l_2}y^{l_1}y^{l_2}\right| \le \frac{c}{n} \quad (c < 1).$$

Из правой части (16) следует, что отображение $\widetilde{\gamma}$ не является геодезическим, т.к. в противном случае по необходимоти получаем, что $\psi_{ij} = 0$, а тогда из (6) и (7) следует, что

$$A = 0, \quad \varphi_i = 0,$$

вследствие чего $\widetilde{P}^h_{ij}(y) = 0$, т.е. отображение $\widetilde{\gamma}$ будет аффинным.

Рассмотрим случай, когда исходные пространства $\overline{V}_n$ и V_n являются пространствами ненулевой постоянной кривизны $\overline{K}$ и K соответственно. Известно ([1], [2]), что данные пространства допускают нетривиальное геодезическое отображение. В этом случае тензор деформации (16) отображения $\widetilde{\gamma}$ принимает вид

$$\widetilde{P}^h_{ij} = \widetilde{\lambda}_{(i}\delta^h_{j)} + \widetilde{b}_{ij}y^h, \tag{17}$$

где

$$\widetilde{\lambda}_i = -\frac{\left\{\frac{2k}{3}g_{il}\left[1 + \frac{1}{3}\left(Kg_{m_1m_2} + \psi_{m_1m_2}\right)y^{m_1}y^{m_2}\right] - \psi_{il}\left(1 + \frac{k}{3}g_{m_1m_2}y^{m_1}y^{m_2}\right)\right\}y^l}{\left(1 + \frac{k}{3}g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta\right)\left[1 + \frac{1}{3}\left(K^g_{l_1l_2} + \psi_{l_1l_2}\right)y^{l_1}y^{l_2}\right]},$$

$$\widetilde{b}_{ij}=\frac{1}{\Big(1+\frac{k}{3}g_{\alpha\beta}y^{\alpha}y^{\beta}\Big)\Big[1+\frac{1}{3}\Big(Kg_{pq}+\psi_{pq}\Big)y^{l_1}y^{l_2}\Big]}\Big\{\Big(\frac{2k}{3}\Big)^2\Big(g_{ij}g_{l_1l_2}-$$
$$-g_{il_1}g_{jl_2}\Big)\Big[1+\frac{1}{3}\Big(Kg_{m_1m_2}+\psi_{m_1m_2}\Big)y^{m_1}y^{m_2}\Big]+\Big[\frac{k}{3}\Big({}_{l_1l_2}\psi_{\circ}g_{ij}+$$
$$+\psi_{ij}g_{l_1l_2}-g_{l_1(i}\psi_{j)l_2}\Big)+\psi_{ij}\psi_{l_1l_2}-\psi_{il_1}\psi_{jl_2}\Big]\Big(1+\frac{k}{3}g_{m_1m_2}y^{m_1}y^{m_2}\Big)\Big\}y^{l_1}y^{l_2}.$$

Вычисление $\widetilde{\nabla}_k y^h$ в пространстве $\widetilde{V}_n^2$ дает

$$\widetilde{\nabla}_k y^h=\rho\delta_k^h+\sigma_k y^h, \tag{18}$$

где

$$\rho=1+\frac{Kg_{l_1l_2}y^{l_1}y^{l_2}}{3+Kg_{\alpha\beta}y^{\alpha}y^{\beta}},\quad \sigma_k=-\frac{Kg_{k\alpha}y^{\alpha}}{3+Kg_{ij}y^iy^j}.$$

Но условиями (17) и (18) характеризуются почти геодезические отображения третьего типа Π_3 ([1]). □

Теорема 2. *Нетривиальное геодезическое отображение γ риманова пространства ненулевой постоянной кривизны $\overline{V}_n$ на пространство V_n индуцирует почти геодезическое отображение $\widetilde{\gamma}$ третьего типа пространства второго порядка $\widetilde{\overline{V}}{}_n^2$ на пространство второго приближения $\widetilde{V}_n^2$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Sinyukov N.S., Geodesic mappings of Riemannian spaces. – Moscow, Nauka, 1979. – 225 p. (in Russian)
2. Eisenhart L.P., Riemannian geometry. – Moscow, IL., 1948. – 216 p. (in Russian)
3. Pokas S.M. *Groups Li of motions in Riemannian space of second-order approximation*// Izvestiya Penz. gos. ped. univ., physico-mathematical sciences. – 2011. – №26. – P. 173–183. (in Russian)
4. Pokas S.M., Tsekhmeystruk L.G. *The second-order approximation for Riemannian space of non-nil constant curvature*// Proceedings of International Conference "Geometry in Odessa-2012". – 2012. – P. 60. (in Russian)

Odessa I.I.Mechnikov National University

pokas@onu.edu.ua

Поступило 9.02.2014