УДК 517.518

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко

ПРО ЛІНІЙНУ ІНТЕРПОЛЯЦІЮ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko. *On linear interpolation of vector valued functions and its applications*, Mat. Stud. **42** (2014), 129–133.

We prove a theorem on the uniform and point-wise approximation of a mapping $\varphi\colon [a,b] \to Z$ taking values in a topological vector space by its linear interpolations. Using this theorem we prove that if Y is a compact space then every separately continuous function $f\colon [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ with at most countable projection of the discontinuity point set $D(f)$ to $[a,b]$ belongs to the sequential closure of the subspace of all continuous functions $g\colon [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ in the space $S([a,b]\times Y)$ of all separately continuous functions $f\colon [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ with the topology of the layer-wise uniform convergence.

Г. А. Волошин, В. К. Маслюченко. *О линейной интерполяции векторнозначных функций и ее применении* // Мат. Студії. – 2014. – Т.42, №2. – С.129–133.

Установлена теорема о равномерном и поточечном приближении отображения $\varphi\colon [a,b] \to Z$ со значениями в топологическом векторном пространстве с помощью его линейной интеропляции. Используя эту теорему, доказано, что для компактного пространства Y каждая раздельно непрерывная функция $f\colon [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$, имеющая не более чем счетную проекцию множества $D(f)$ точек разрыва на первый сомножитель, принадлежит секвенциальному замыканию подпространства всех совокупно непрерывных функций $g\colon [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ в пространстве $S([a,b]\times Y)$ всех раздельно непрерывных функций $f\colon [a,b]\times Y \to \mathbb{R}$ с топологией послойной равномерной сходимости.

1. Вступ. Метод лінійної інтерполяції при наближенні нарізно неперервних функцій уперше було застосовано в піонерській праці А. Лебеґа ([1]), в якій було встановлено, що нарізно неперервні функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ належать до першого класу Бера. Цей метод застосовний і для нарізно неперервних відображень $f\colon \mathbb{R}\times Y \to Z$ зі значеннями в топологічних векторних просторах ([2]). М. Цудзі ([3]) застосував метод лінійної інтерполяції для отримання певного варіанту теореми Бера про проекцію ([4]). У [5] він був використаний при вивченні секвенціального замикання $\overline{P}^s$ простору P усіх многочленів від двох змінних у просторі $S = CC[0,1]^2$ всіх нарізно неперервних функцій $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ з топологією пошарово рівномірної збіжності, що збігається з секвенціальним замиканням $\overline{C}^s$ простору $C = C[0,1]^2$ всіх сукупно неперервних функцій $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Тут ми розглядаємо лінійну інтерполяцію векторнозначних функцій і з її допомогою узагальнюємо один результат з праці [5]. Отримані тут результати були анонсовані в [6].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 26B05, 41A15, 46E10, 54C30.
Keywords: uniform and point-wise approximation; linear interpolations; separately continuous functions; vector valued functions; sequential closure.

2. Аналог теореми Кантора. Нехай X — метричний простір, відстань між точками x' і x'' якого ми позначаємо символом $|x' - x''|_X$, Y — топологічний векторний простір і $f\colon X \to Y$ — відображення. Воно називається *рівномірно неперервним*, якщо для кожного околу нуля V у просторі Y існує таке число $\delta > 0$, що для будь-яких точок x' і x'' з X таких, що $|x' - x''|_X < \delta$, виконується належність $f(x') - f(x'') \in V$.

Нам буде потрібний такий аналог класичної теореми Кантора про рівномірну неперервність неперервних відображень на метричних компактах зі значеннями в метричних просторах.

Теорема 1. *Нехай X — компактний метричний простір, Y — топологічний векторний простір і $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення. Тоді відображення f рівномірно неперервне.*

Він є наслідком загальної теореми про рівномірну неперервність неперервного відображення $f\colon X \to Y$ компактного рівномірного простору X у рівномірний простір Y ([9, с. 261]).

3. Наближення векторнозначних функцій з допомогою їх лінійної інтерполяції. Нехай Z — векторний простір над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ і u та v — вектори з простору Z. Відображення $\omega\colon \mathbb{R} \to Z$, яке задається формулою $\omega(t) = tu + v$, називається *лінійною функцією.* Для точок z_1 і z_2 з простору Z, невиродженого відрізка $[a, b]$ і лінійної функції $\omega(t) = tu + v$ звуження $\omega|_{[a,b]}$, для якого $\omega(a) = z_1$ і $\omega(b) = z_2$ називається *прямолінійним шляхом, що з'єднує точки z_1 і z_2.* Такий шлях завжди існує і єдиний. При $a = 0$ і $b = 1$ він задається формулою $\omega(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, а в загальному випадку формулою

$$\omega(x) = z_1 + \frac{x-a}{b-a}(z_2 - z_1) = \frac{b-x}{b-a}z_1 + \frac{x-a}{b-a}z_2 = \lambda_1(x)z_1 + \lambda_2(x)z_2,$$

де $\lambda_1(x) = \frac{b-x}{b-a}$ і $\lambda_2(x) = \frac{x-a}{b-a}$ — неперервні дійсні функції дійсної змінної x, що пробігає відрізок $[a, b]$, при цьому $\lambda_1(x) \geq 0$, $\lambda_2(x) \geq 0$ і $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1$ на $[a, b]$.

Нехай $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ — скінченна підмножина інтервалу (a, b), причому $a = a_0 < a_1 \ldots < a_n < a_{n+1} = b$, і $z_0, z_1, \dots, z_{n+1}$ — довільні точки з простору Z. *Ламана з вузлами* (a_k, z_k), $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, — це таке відображення $l\colon [a, b] \to Z$, що для кожного $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ звуження $l|_{[a_k, a_{k+1}]}$ — це прямолінійний шлях, що з'єднує точки z_k і z_{k+1}. Детальніше про ламані див. у праці [6]. Для відображення $\varphi\colon [a, b] \to Z$ ламану $\psi\colon [a, b] \to Z$ з вузлами $(a_k, \varphi(a_k))$, $k \in \{0, 1, \dots, n+1\}$, ми позначаємо символом $L_A\varphi$. Кажуть, що векторнозначна функція $\psi = L_A\varphi\colon [a, b] \to Z$ отримана з векторнозначної функції $\varphi\colon [a, b] \to Z$ *методом лінійної інтерполяції* L_A. Зауважимо, що при цьому множина A може бути і порожньою.

Нехай Z — топологічний векторний простір і X — довільна множина. Кажуть, що послідовність відображень $\varphi_n\colon X \to Z$ *рівномірно збігається* до відображення $\varphi\colon X \to Z$ на X, якщо для кожного околу нуля W в Z існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ і довільного $x \in X$ виконується належність $\varphi_n(x) - \varphi(x) \in W$. Коротко це записують так: $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на X.

Теорема 2. *Нехай $A = \{a_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ — підмножина інтервалу (a, b), яка щільна в ньому, при цьому $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $X = [a, b]$, Z — топологічний векторний простір, $\varphi\colon X \to Z$ — відображення і $\varphi_n = L_{A_n}\varphi$. Тоді:*

а) якщо відображення φ неперервне, то і всі відображення φ_n неперервні, причому $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на X;

б) якщо φ неперервне в точці x_0 з X, то $\varphi_n(x_0) \to \varphi(x_0)$ в Z.

Доведення. а) Нехай відображення $\varphi\colon X \to Z$ неперервне. Доведемо, що $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на X.

Розглянемо довільний окіл нуля W у просторі Z. Як добре відомо ([8, с.14]), існує такий заокруглений окіл нуля W_0 в Z, що $W_0+W_0 \subseteq W$. На основі теореми 1 відображення $\varphi\colon X \to Z$ рівномірно неперервне, отже, існує таке число $\delta > 0$, що $\varphi(x') - \varphi(x'') \in W_0$, як тільки $|x' - x''|_X < \delta$.

Згідно з [5, лема 8.1, с. 150] дрібність η_{A_n} розбиття A_n відрізка $X = [a, b]$ прямує до нуля при $n \to \infty$. Тому існує такий номер N, що $\eta_{A_n} < \delta$, як тільки $n \geq N$.

Візьмемо $n \geq N$, довільне $x \in X$ і покажемо, що $\varphi_n(x) - \varphi(x) \in W$. Нехай $\widetilde{A_n} = A_n \cup \{a, b\} = \{b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}\}$, де $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_{n+1} = b$. Тоді $\eta_{A_n} = \max\{b_{k+1} - b_k\colon k \in \{0, 1, \ldots, n\}\} < \delta$, а значить, $\Delta b_k = b_{k+1} - b_k < \delta$ для кожного $k \in \{0, \ldots, n\}$. Існує такий номер $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, що $b_k \leq x \leq b_{k+1}$. В такому разі $|x - b_k| \leq \Delta b_k < \delta$ і $|x - b_{k+1}| < \delta$. Розглянемо числа

$$\lambda = \frac{b_{k+1} - x}{\Delta b_k} \quad \text{і} \quad \mu = \frac{x - b_k}{\Delta b_k},$$

для яких $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ і $\varphi_n(x) = \lambda\varphi(b_k) + \mu\varphi(b_{k+1})$. Оскільки $\varphi(x) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(x)$, $\varphi(b_k) - \varphi(x) \in W_0$ і $\varphi(b_{k+1}) - \varphi(x) \in W_0$, адже $|b_k - x| < \delta$ і $|b_{k+1} - x| < \delta$, то

$$\varphi_n(x) - \varphi(x) = \lambda(\varphi(b_k) - \varphi(x)) + \mu(\varphi(b_{k+1}) - \varphi(x)) \in \lambda W_0 + \mu W_0 \subseteq W_0 + W_0 \subseteq W,$$

адже $\lambda W_0 \subseteq W_0$, $\mu W_0 \subseteq W_0$, бо $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$ і окіл W_0 заокруглений.

Це і доводить, що $\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на X при $n \to \infty$.

б) Нехай відображення φ неперервне в точці x_0. Розглянемо довільний окіл нуля W у просторі Z і знайдемо такий заокруглений окіл нуля W_0, що $W_0 + W_0 \subseteq W$. З неперервності φ у точці x_0 випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $\varphi(x) - \varphi(x_0) \in W_0$, як тільки $|x - x_0| < \delta$. Як і раніше $\eta_{A_n} \to 0$, отже, існує такий номер N, що $\eta_{A_n} < \delta$, як тільки $n \geq N$.

Далі такими ж міркуваннями як і в частині а) легко встановити, що $\varphi_n(x_0) - \varphi(x_0) \in W$ при $n \geq N$. □

4. Простір $S(X \times Y)$ і деякі позначення. Нехай X і Y — компактні простори. Символом $S(X \times Y)$ ми позначимо локально опуклий простір $CC(X \times Y)$ всіх нарізно неперервних функцій $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ з топологією пошарово рівномірної збіжності, що породжується сукупністю передnorm $\mathcal{N}(X, Y) = \{\|\cdot\|^x\colon x \in X\} \cup \{\|\cdot\|_y\colon y \in Y\}$, де $\|f\|^x = \|f^x\|_\infty$, $f^x = f(x, \cdot)$, $f_y = f(\cdot, y)$ і $\|g\|_\infty = \max_{t \in T} |g(t)|$ для неперервної функції $g\colon T \to \mathbb{R}$, заданої на компактному просторі T, а символом $C(X \times Y)$ простір усіх сукупно неперервних функцій $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, що є лінійним підпростором простору $S(X \times Y)$. Для функції $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ символом $C(f)$ позначається множина всіх тих точок $p = (x, y) \in X \times Y$, в яких f сукупно неперервна, $D(f) = (X \times Y) \setminus C(f)$ — це множина точок розриву функції f. Крім того, покладемо $C_Y(f) = \{x \in X\colon \{x\} \times Y \subseteq C(f)\}$. Якщо $\mathrm{pr}_X\colon X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_X(x, y) = x$, — це проекція на вісь X, то $C_Y(f) = X \setminus \mathrm{pr}_X(D(f))$.

5. Апроксимація нарізно неперервних функцій. Приступимо до побудови сукупно неперервних функцій, які добре апроксимують нарізно неперервні функції. Нагадаємо, що для функцій $f\colon X \to \mathbb{R}$ і $g\colon Y \to \mathbb{R}$ символом $f \otimes g$ позначається функція $f \otimes g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$, що визначається формулою $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$.

Лема 1. *Нехай $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ і $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n+1} = b$, $X = [a, b]$, Y — топологічний простір, $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ — функція, яка неперервна відносно другої змінної, $\varphi\colon X \to C(Y)$, $\varphi(x) = f^x$, — асоційоване з f відображення, $\psi = L_A\varphi$ і $g(x, y) = \psi(x)(y)$. Тоді відображення $g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ сукупно неперервне.*

Доведення. Оскільки ψ — це ламана з вузлами $(a_k, \varphi(a_k))$, то для кожного $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ звуження $\psi|_{[a_k, a_{k+1}]}$ — це прямолінійний шлях у просторі $C(Y)$, що з'єднує точки $\varphi(a_k)$ і $\varphi(a_{k+1})$. Використавши формули п. 3, отримаємо, що при $a_k \le x \le a_{k+1}$

$$\psi(x) = \lambda_k(x)\varphi(a_k) + \mu_k(x)\varphi(a_{k+1}),$$

де $\lambda_k(x) = \frac{a_{k+1} - x}{a_{k+1} - a_k}$ і $\mu_k(x) = \frac{x - a_k}{a_{k+1} - a_k}$. Тому для точок $(x, y) \in E_k = [a_k, a_{k+1}] \times Y$ будемо мати $g(x, y) = \psi(x)(y) = \lambda_k(x) f^{a_k}(y) + \mu_k(x) f^{a_{k+1}}(y) = (\lambda_k \otimes f^{a_k} + \mu_k \otimes f^{a_{k+1}})(x, y)$. Оскільки функції $\lambda_k, \mu_k\colon [a_k, a_{k+1}] \to \mathbb{R}$ лінійні, то вони неперервні. Функції f^{a_k}, $f^{a_{k+1}}\colon Y \to \mathbb{R}$ теж неперервні, бо функція f неперервна відносно другої змінної. В такому разі тензорні добутки $\lambda_k \otimes f^{a_k}$ і $\mu_k \otimes f^{a_{k+1}}$ сукупно неперервні, а тому такою буде і їх сума $g|_{E_k} = \lambda_k \otimes f^{a_k} + \mu_k \otimes f^{a_{k+1}}$. Але множини E_k замкнені в $X \times Y$ і $X \times Y = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$. Оскільки всі звуження $g|_{E_k}$ сукупно неперервні, то такою ж буде і функція g. □

Лема 2. *Нехай X — множина, Y — топологічний векторний простір, $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, $f\colon X \to Y$ — відображення такі, що $f_n \rightrightarrows f$ на X, а $g\colon Y \to \mathbb{R}$ — лінійний неперервний функціонал. Тоді $h_n = g \circ f_n \rightrightarrows g \circ f = h$ на X.*

Доведення легко випливає з означень.

Символом $C_u(Y)$ позначимо банаховий простір усіх неперервних функцій $g\colon Y \to \mathbb{R}$, заданих на компактному просторі Y, з рівномірною нормою $\|\cdot\|_\infty$, а символом $C_p(Y)$ — локально опуклий простір неперервних функцій $g\colon Y \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності, що задається сукупністю передноpм $q_y(g) = |g(y)|$, $y \in Y$.

Теорема 3. *Нехай $X = [a, b]$, Y — компактний простір, $f \in S(X \times Y)$, $\varphi(x) = f^x$ на X, множини A і A_n — такі ж, як в теоремі 2, $\varphi_n = L_{A_n}\varphi$ і $f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y)$ на $X \times Y$. Тоді $f_n \in C(X \times Y)$ для кожного n, $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$, $f_n^x \rightrightarrows f^x$ для кожного x з $C_Y(f)$ і $f_n^x = f^x$ для кожного $x \in \widetilde{A} = A \cup \{a, b\}$, починаючи з деякого номера $N = N(x)$.*

Доведення. Згідно з лемою 1 функції $f_n\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ неперервні за сукупністю змінних.

Візьмемо $y \in Y$ і доведемо, що $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X. Оскільки функція $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ нарізно неперервна, то асоційоване з нею відображення $\varphi\colon X \to C_p(Y)$ буде неперервним. Простір $C_p(Y)$ є локально опуклим топологічним векторним простором, тому $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ на X за пунктом а) теореми 2. Функціонал $\delta_y(g) = g(y)$ лінійний і неперервний на $C_p(Y)$ для кожного $y \in Y$. Тому $\delta_y \circ \varphi_n \rightrightarrows \delta_y \circ \varphi$ на X за лемою 2. Але $(\delta_y \circ \varphi_n)(x) = \delta_y(\varphi_n(x)) = \varphi_n(x)(y) = f_n(x, y)$ і так само $(\delta_y \circ \varphi)(x) = f(x, y)$.

Це показує, що $\delta_y \circ \varphi_n = (f_n)_y$ і $\delta_y \circ \varphi = f_y$, отже, $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$.

Візьмемо $x \in C_Y(f)$ і доведемо, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y. Розглянемо асоційоване з f відображення φ як функцію $\varphi\colon X \to C_u(Y)$, що набуває значень у банаховому просторі $C_u(Y)$. Як добре відомо, $C(\varphi) = C_Y(f)$, отже, відображення $\varphi\colon X \to C_u(Y)$ неперервне в точці x. Але тоді $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$ за пунктом б) теореми 2, тобто $f_n^x = \varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x) = f^x$ на Y.

Нарешті, нехай $x \in \widetilde{A}$. Тоді існує такий номер N, що $x \in \widetilde{A_n} = A_n \cup \{a, b\}$, як тільки $n \geq N$. За побудовою $\varphi_n(x) = \varphi(x)$, якщо $x \in \widetilde{A_n}$. Тому $f_n^x = f^x$ при $n \geq N$. □

З теореми 3 легко виводиться

Теорема 4. *Нехай $X = [a, b]$, Y — компактний простір і $f \in S(X \times Y)$, причому проекція $\mathrm{pr}_X(D(f))$ не більш, ніж злічена. Тоді існує така послідовність функцій $f_n \in C(X \times Y)$, що $f_n \to f$ у просторі $S(X \times Y)$.*

Доведення. За умовою проекція $B = \mathrm{pr}_X(D(f))$ не більш ніж злічена. Виберемо зліченну множину C, яка щільна в інтервалі (a, b) і лежить у ньому. Тоді множина $A = (B \cup C) \setminus \{a, b\}$ міститься в інтервалі (a, b) і щільна в ньому. Нехай $A = \{a_k \colon k \in \mathbb{N}\}$, причому $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, і $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Розглянемо функції f_n, побудовані в теоремі 3. Вони неперервні, $(f_n)_y \rightrightarrows f_y$ на X для кожного $y \in Y$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y для кожного $x \in \widetilde{A} = A \cup \{a, b\}$, адже $f_n^x = f^x$ при $n \geq N(x)$. За побудовою $\widetilde{A} = B \cup C \supseteq B$, отже, $X \setminus \widetilde{A} \subseteq X \setminus B = C_Y(f)$. Тому і для кожного $x \in X \setminus \widetilde{A}$ будемо мати, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на Y. Таким чином, $f_n \to f$ у просторі $S(X \times Y)$, що і треба було довести. □

Теореми 3 і 4 були доведені у [5] для $Y = [0, 1]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Lebesgue H. *Sur l'approximation des fonctions*// Bull. Sci. Math. – 1898. – V.22. – P. 278–287.
2. Maslyuchenko V.K., Mykhaylyk V.V., Sobchuk O.V. *Investigation on separately continuous functions*// Mathematical Proceedings of the International Conference dedicated to the memory of Hans Hahn. – Chernivtsi: Ruta, 1995. – P. 192–246. (in Ukrainian)
3. Tsuji M. *On Bair's Theorem concerning a function $f(x, y)$ which is continuous with respect to each variable x and y*// J. Math. Soc. Japan. – 1951. – V.2, №3–4. – P. 210–212.
4. Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles*// Ann. Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – V.3. – P. 1–123.
5. Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V., Voloshyn H.A. *On layer-wise uniform approximation of separately continuous functioins by polynomials*// Math. Bull. of SSS. – 2013. – V.10. – P. 135–158. (in Ukrainian)
6. Maslyuchenko V.K., Voloshyn H.A. *The linear interpolation of vector valued functions and its applications*// IV international Hahn conference dedicated tj the 135 anniversary of Hans Hahn, 2014, Chernivtsi. Abstract. – 2014. – P. 20–23. (in Ukrainian)
7. Maslyuchenko V.K., Nesterenko V.V. *The weak Darboux property and transitional in topological vector spaces*// Carp. Math. Publ. – 2013. – V.5, №1. – P. 79–87. (in Ukrainian)
8. Maslyuchenko V.K., First types of topological vector spaces. – Chernivtsi: Ruta, 2002. – 72 p. (in Ukrainian)
9. Kelly J., General Topology. – M.: Nauka, 1981. – 432 p. (in Russian)

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
vmaslyuchenko@gmail.com
Bukovyna State University of Finance and Economics
galja.vlshin@gmail.com

Надійшло 21.08.2014