УДК 517.5

Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов

О НЕПРЕРЫВНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КЛАССОВ ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА

O. S. Afanasieva, R. R. Salimov. *On continuous extensions of Orlicz-Sobolev classes*, Mat. Stud. **45** (2016), 34–39.

The problem of continuous extension to the boundary of mappings from Orlicz-Sobolev classes between domains is investigated in Euclidean space.

1. Введение. В данной работе изучается граничное поведение пространственных гомеоморфизмов класса Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$, с использованием p-модуля. Ранее граничное поведение отображений с конечным искажением при $p=n$ исследовалось в работах [1]–[5].

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f: D\to\mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением,* если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$ и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J(x,f)$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x)\geqslant 1$, где $f'(x)$ якобиева матрица f, $\|f'(x)\|$ — её операторная норма: $\|f'(x)\|=\sup_{|h|=1}|f'(x)\cdot h|$ и $J(x,f)=\det f'(x)$ — якобиан отображения f.

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [6], см. также [7].

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, обозначим символом L^{φ} пространство всех функций $f\colon D\to\mathbb{R}$, таких что

$$\int_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\,dm(x)<\infty$$

при некотором $\lambda>0$, см., напр., [8]. Пространство L^{φ} называется *пространством Орлича.*

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщёнными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D. Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D, мы пишем $f\in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc}\subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t)=t^p$,

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30C65, 31A15, 32U20.
Keywords: boundary behavior; Orlicz-Sobolev classes; p-modulus; Q-homeomorphism.
doi:10.15330/ms.45.1.34-39

$p \geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т.е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D, см. [9, разд. 1.1.3].

Далее, если f — локально интегрируемая вектор–функция n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, $f_i \in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i = 1, \ldots, m$, и

$$\int_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\, dm(x) < \infty, \quad |\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2},$$

то мы снова пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

2. Предварительные результаты. Следуя [10, разд. 9.2, гл. 9], далее *k-мерной поверхностью* S в $\mathbb{R}^n$ называется произвольное непрерывное отображение $S\colon \omega \to \mathbb{R}^n$, где ω — открытое множество в $\mathbb{R}^k$ и $k = 1, \ldots, n-1$. *Функцией кратности* поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = {\rm card}\, S^{-1}(y) = {\rm card}\{x \in \omega\colon\ S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S. Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k, см., [10, разд. 9.2].

Для борелевской функции $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int_S \rho\, d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y)\, N(S, y) dH^k y.$$

Пусть Γ — семейство k-мерных поверхностей S. Борелева функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ, пишут $\rho \in {\rm adm}\Gamma$, если $\int_S \rho^k d\mathcal{A} \geqslant 1$ для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1, \infty)$ — заданное фиксированное число. Тогда *p-модулем* семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in {\rm adm}\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x).$$

Говорят, см. [10, разд. 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ является *обобщенно p-допустимой* для семейства Γ, состоящего из $(n-1)$–мерных поверхностей S в $\mathbb{R}^n$, пишут $\rho \in {\rm ext}_p{\rm adm}\Gamma$, если $\int_S \rho^{n-1}(x) d\mathcal{A} \geqslant 1$ для p-почти всех $S \in \Gamma$, т.е. за исключением подсемейства Γ нулевого p-модуля.

Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $x_0 \in \overline{D} \setminus \{\infty\}$, $Q\colon \mathbb{R}^n \to (0, \infty)$ — измеримая по Лебегу функция.

Гомеоморфизм $f\colon D \to D'$ будем называть *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке x_0*, если

$$M_p\left(f\left(\Sigma_\varepsilon\right)\right) \geqslant \inf_{\rho \in {\rm ext_p adm}\Sigma_\varepsilon} \int_{D \cap A_\varepsilon} \frac{\rho^p(x)}{Q(x)} dm(x) \tag{1}$$

для каждого кольца

$$A_\varepsilon = A(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}\,,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

$d_0 = \sup_{x\in D} |x - x_0|$, а Σ_ε обозначает семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r)$ с областью D, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| = r\}\,,\ r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$.

Наконец, будем говорить, что гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является *нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в области* D, если f является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$.

Следующее утверждение было получено в работе [11], см. теорему 1.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$, $x_0 \in \overline{D}$, и пусть $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция. Тогда гомеоморфизм $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке x_0 тогда и только тогда, когда*

$$M_p(f\Sigma_\varepsilon)\ \geqslant\ \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{\alpha-1}(x_0, r)} \qquad \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x\in D} |x - x_0|$ и через Σ_ε обозначено семейство всех пересечений D со сферами $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, и

$$\|Q\|_{\alpha-1}(x_0, r)\ =\ \left(\int_{D(x_0,r)} Q^{\alpha-1}(x)d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

есть $L_{\alpha-1}$-норма функции Q по $D(x_0, r) = \{x \in D\colon |x-x_0| = r\} = D\cap S(x_0, r)$. Инфимум выражения из правой части в (1) достигается только на функции

$$\rho_0(x)\ =\left[\frac{Q(x)}{\|Q\|_{\alpha-1}(x_0, |x - x_0|)}\right]^{\frac{1}{p-n+1}}.$$

3. О непрерывном продолжении на границу. Ниже сформулированы условия на функцию Q и границы областей, при которых всякий нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля допускает непрерывное продолжение на границу. При $p = n$ нижние Q-гомеоморфизмы исследовались в работе [12].

Далее для любых множеств A и B в D, D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, через $\triangle(A, B; D)$ обозначаем семейство всех кривых $\gamma\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, соединяющих A и B в D, т.е. $\gamma(a) \in A$, $\gamma(b) \in B$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$.

Лемма 1. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $p > n - 1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$, $x_0 \in \partial D$. Предположим, что $Q\colon D \to (0, \infty)$ — измеримая функция, и пусть $f\colon D \to D'$ — нижний Q-гомеоморфизм относительно p-модуля в точке x_0, область D локально связна в x_0, а $\partial D'$ является α-сильно достижимой из D' хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \Big\{y \in \mathbb{R}^n \colon y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), x_k \to x_0, x_k \in D\Big\}.$$

Если

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{\alpha-1}(x_0, r)}\ =\ \infty, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$ *и*

$$\|Q\|_{\alpha-1}(x_0, r) \ = \ \left(\int_{D \cap S(x_0,r)} Q^{\alpha-1}(x) d\mathcal{A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

то f *продолжается по непрерывности в точку* x_0.

Доказательство. Заметим, что $C(x_0, f) \neq \varnothing$ в силу компактности $\overline{D}$. По условию $\partial D'$ является α-сильно достижимой в некоторой точке $y_0 \in C(x_0, f)$. Допустим, что найдется еще одна точка $z_0 \in C(x_0, f)$, и пусть $U = B(y_0, r_0)$, где $0 < r_0 < |y_0 - z_0|$.

В силу локальной связности D в x_0 найдется последовательность окрестностей V_k точки x_0 со связными пересечениями $D_k = D \cap V_k$ и $\mathrm{diam} V_k \to 0$ при $k \to \infty$. В областях $D'_k = f D_k$ найдутся точки y_k и z_k с $|y_0 - y_k| < r_0$ и $|y_0 - z_k| > r_0$, $y_k \to y_0$ и $z_k \to z_0$ при $k \to \infty$. Пусть C_k — кривые, соединяющие y_k и z_k в D'_k. Заметим, что по построению $\partial U \cap C_k \neq \varnothing$.

По условию α-сильной достижимости точки y_0 из D', найдется континуум $E \subset D'$ и число $\delta > 0$, для которых $M_\alpha(\Delta(E, C_k; D')) \geqslant \delta$ при больших k. Без ограничения общности, можно считать, что последнее условие выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $C = f^{-1}E$ является компактом в D, и потому $\varepsilon_0 = \mathrm{dist}(x_0, C) > 0$.

Пусть Γ_ε — семейство всех кривых в D, соединяющих сферы $S_{\varepsilon_0} = S(x_0, \varepsilon_0)$ и $S_\varepsilon = S(x_0, \varepsilon)$. Заметим, что $C_k \subset f B(x_0, \varepsilon)$ для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ при больших k. Таким образом, $M_\alpha(f\Gamma_\varepsilon) \geqslant \delta$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

С другой стороны, величина $M_\alpha(f\Gamma_\varepsilon)$ равна α-емкости конденсатора в D' с обкладками $\overline{fB(x_0, \varepsilon)}$ и $\overline{f\,(D \setminus B(x_0, \varepsilon_0))}$, см. [13]. Таким образом, по теореме 3.13 в [14]

$$M_\alpha(f\Gamma_\varepsilon) \ \leqslant \ \frac{1}{M_p^\alpha(f\Sigma_\varepsilon)},$$

где $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$, Σ_ε — семейство пересечений с областью D всех сфер $S(x_0, r)$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, поскольку $f\Sigma_\varepsilon \subset \Sigma(fS_\varepsilon, fS_{\varepsilon_0}, D')$, где $\Sigma(fS_\varepsilon, fS_{\varepsilon_0}, D')$ состоит из всех замкнутых множеств в D', отделяющих fS_ε и fS_{ε_0}.

Наконец, по теореме 1 и условию (2) получаем, что $M_\alpha(f\Gamma_\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Полученное противоречие опровергает предположение, что предельное множество $C(x_0, f)$ состоит более чем из одной точки.

4. Приложения к классам Орлича-Соболева. Пусть $p > n - 1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Для отображения $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ определим *α-внутреннюю дилатацию* следующим равенством

$$K_{I,\alpha}(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x,f)|}{l^\alpha(f'(x))}, & \text{если } |J(x, f)| \neq 0, \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0, \\ \infty, & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

где $l(f'(x)) = \min\limits_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$.

Лемма 2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Предположим, что $f\colon D \to D'$ — гомеоморфизм конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, где $\varphi\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ — неубывающая функция, такая что для некоторого $t_* \in (0, \infty)$*

$$\int_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{3}$$

Тогда гомеоморфизм f является нижним Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $Q = K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в работе [15].

Следствие 1. *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W_{\rm loc}^{1,q}$ при $q > n-1$ является нижним $K_{I,\alpha}^{\frac{1}{\alpha-1}}$-гомеоморфизмом относительно p-модуля при $p > n-1$ и $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$.*

Комбинируя теорему 1 и лемму 2, приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть D и D' — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $p > n-1$, $\alpha = \frac{p}{p-n+1}$. Предположим, что $f\colon D \to D'$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W_{\rm loc}^{1,\varphi}$ с условием (3), $x_0 \in \partial D$, и область D локально связна в x_0, а $\partial D'$ α-сильно достижима из D' хотя бы в одной точке предельного множества*

$$C(x_0, f) = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \lim_{k\to\infty} f(x_k), x_k \to x_0, x_k \in D \Big\}.$$

и

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|K_{I,\alpha}\|_{\alpha-1}(x_0, r)} \ = \ \infty,$$

где $0 < \varepsilon_0 < d_0 \ = \sup_{x\in D} |x - x_0|$ *и*

$$\|K_{I,\alpha}\|_{\alpha-1}(x_0, r) \ = \ \left(\int_{D\cap S(x_0,r)} K_{I,\alpha}^{\alpha-1}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

то f продолжается по непрерывности в точку x_0.

Следствие 2. *Заключение теоремы 2 справедливо, в частности, если $f \in W_{\rm loc}^{1,q}$ при $q > n-1$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Afanasieva E.S., Ryazanov V.I., Salimov R.R. *On mappings in the Orlicz–Sobolev classes on Riemannian manifolds*// Ukr. Mat. Visn. – 2011. – V.8, №3. – P. 319–342. (in Russian)
2. Kovtonyuk D.A., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. To the theory of the mappings of Sobolev and Orlicz–Sobolev classes. – Naukova Dumka, Kyiv, 2013. (in Russian)
3. Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A. *Toward the theory of the Orlicz–Sobolev classes*// Algebra i Analiz. – 2013. – V.25, №6. – P. 50–102. (in Russian)
4. Sevost'yanov E.A. *On the boundary behavior of open discrete mappings with unbounded characteristic*// Ukr. Math. J. – 2012. – V.64, №6. – P. 855–859. (in Russian)
5. Il'yutko D.P., Sevost'yanov E.A. *On local properties of one class of mappings on Riemannian manifolds*// Ukr. Mat. Visn. – 2015. – V.12, №2. – P. 210–221. (in Russian)
6. Iwaniec T., Šverák V. *On mappings with integrable dilatation*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – V.118. – P. 181–188.
7. Iwaniec T., Martin G., Geometrical function theory and non-linear analysis, Oxford: Clarendon Press, 2001.
8. Krasnosel'skij M.A., Rutitskij Ja.B., Convex functions and Orlicz spaces. – Moscow: Nauka, 1958. (in Russian)

9. Maz'ya V., Sobolev classes. – Berlin: Springer-Verlag, 1985.
10. Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E., Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
11. Golberg A., Salimov R. *Topological mappings of integrally bounded p–moduli*// Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2012. – V.3(LXI), №1. – P. 49–66.
12. Kovtonyuk D., Ryazanov V. *On the theory of lower Q-homeomorphisms*// Ukr. Mat. Visn. – 2008. – V.5, №2. – P. 159–184. (in Russian); translated in Ukrainian Math. Bull. by AMS.
13. Shlyk V.A. *On the equality between p−capacity and p−modulus*// Sibirsk. Mat. Zh. – 1993. – V.34, №6. – P. 216–221; transl. in Siberian Math. J. – 1993. – V.34, №6. – P. 1196–1200.
14. Ziemer W.P. *Extremal length and p-capacity*// Michigan Math. J. – 1969. – V.16. – P. 43–51.
15. Salimov R.R. *On a new condition of finite Lipschitz of Orlicz-Sobolev class*// Mat. Stud. – 2015. – V.44, №1. – P. 27—35. (in Russian)

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Slavyansk
smolka21@yandex.ru
Institute of Mathematics, Nation Academy of Sciences of Ukraine
ruslan623@yandex.ru

Поступило 13.03.2016
После переработки 20.04.2016