УДК 517.51

В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук

НОВІ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ СЕРПІНСЬКОГО

V. K. Maslyuchenko, O. I. Filipchuk. *New generalizations of Sierpiński theorem*, Mat. Stud. **47** (2017), 91–99.

We introduce the notion of equi-feeblycontinuity which ressembles S. Kempisty's equi-quasicontinuity. Using this fresh notion and weak horizontal quasicontinuity, we obtain new generalizations of Sierpinski theorem on separately continuous functions.

1. Вступ. В. Серпінський [1] встановив, що коли дві нарізно неперервні функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ і $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ збігаються на деякій всюди щільній в $\mathbb{R}^2$ множині E, то $f = g$. Іншими словами, нарізно неперервні функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, як і неперервні, визначаються своїми значеннями на довільній всюди щільній множині в $\mathbb{R}^2$. Відомі також узагальнення цієї теореми Серпінського. Так, З. Пьотровський і Е. Вінґлер [2] помітили, що коли кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \to Z$, що задана на добутку $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ топологічних просторів і набуває значень у цілком регулярному просторі Z, є ледь неперервною, то кожна така функція визначається своїми значеннями на всюди щільній підмножині добутку X. У цій статті згадуються й інші результати на цю тему (див. праці [3–7]). Наскільки нам відомо, останнім у списку узагальнень теореми Серпінського був результат В. Михайлюка [8]: якщо X — берівський простір, Y — топологічний простір з не більш, ніж зліченним π-характером і Z — топологічний простір, у якому дві різні точки можуть бути відокремлені замкненими околами, то кожна нарізно неперервна функція $f\colon X \times Y \to Z$ однозначно визначається своїми значеннями на всюди щільній підмножині добутку $X \times Y$.

У праці [9] був анонсований результат про сталість нарізно неперервного відображення, з якого випливало певне узагальнення теореми Серпінського, отримане незалежно від усіх попередніх її узагальнень в результаті дослідження нарізно неперервних функцій з не більш, ніж зліченною множиною значень. Пізніше під впливом результату В. Михайлюка, який виступав у ролі каталізатора, була отримана така загальна теорема [10]: якщо X — берівський простір, Y — топологічний простір, який у кожній точці y з Y має не більш, ніж зліченну локальну псевдобазу, Z — гаусдорфовий топологічний простір, $f\colon X \times Y \to Z$ — слабко горизонтально квазінеперервне відображення, яке ледь неперервне відносно першої і неперервне відносно другої змінної, $c \in Z$ і прообраз $f^{-1}(c)$ всюди щільний у добутку $X \times Y$, то $f(p) = c$ на $X \times Y$. Те узагальнення теореми Серпінського, яке безпосередньо випливало з цієї теореми, було слабшим, ніж результат В. Михайлюка, та автори зазначили, що, застосувавши метод доведення їх теореми про

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54A10, 54B10, 54C05, 54C30, 54D10, 54D30.
Keywords: Sierpinski theorem; separately continuous functions; equi-feeblycontinuity; weak horizontal quasicontinuity.
doi:10.15330/ms.47.1.91-99

© В. К. Маслюченко, О. І. Філіпчук, 2017

сталість, можна довести і результат В. Михайлюка. У самій роботі [8] метод доведення був інакшим: він використовував властивості топології нарізної неперервності. При подальшому аналізі виявилось, що нашим методом можна отримати значно загальніші результати на цю тему, які використовують поняття одностайної ледь неперервності, що споріднене з поняттям одностайної квазінеперервності, введеним у праці С. Кемпістого [11]. Доведенню цих результатів і буде присвячена дана стаття.

2. Квазінеперервність і споріднені з нею поняття. Нехай X і Y — топологічні простори. Нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Y$ називається *квазінеперервним* у точці x_0 з X, якщо для довільних околів U і V точок x_0 і $y = f(x_0)$ в X та Y відповідно існує така відкрита в X непорожня множина G, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V$, і просто *квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці з простору X. Відомо, що квазінеперервність відображення $f\colon X \to Y$ рівносильна такій властивості: *для довільної відкритої в X множини G і довільної підмножини A в X з умови $G \subseteq \overline{A}$ випливає, що $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$.*

Відображення $f\colon X \times Y \to Z$, де Z — ще один топологічний простір називається *горизонтально квазінеперервним* у точці $p_0 = (x_0, y_0)$ з добутку $X \times Y$, якщо для довільних околів U, V і W точок x_0, y_0 і $z_0 = f(p_0)$ в просторах X, Y і Z відповідно існують відкрита в X непорожня множина G і точка $b \in V$, такі, що $G \subseteq U$ і $f(G \times \{b\}) \subseteq W$, і просто *горизонтально квазінеперервним*, якщо воно є таким у кожній точці з добутку $X \times Y$. Горизонтально квазінеперервні відображення мають таку властивість: *для довільних відкритих множин G і H у просторах X і Y відповідно і будь-якої підмножини A простору X, такої що $G \subseteq \overline{A}$ виконується включення $f(G \times H) \subseteq \overline{f(A \times H)}$.* На відміну від квазінеперервності, ця властивість не є характеристичною для горизонтальної квазінеперервності. Відображення $f\colon X \times Y \to Z$, які мають таку властивість, називаються *слабко горизонтально квазінеперервними* (див. [12] і вказану там літературу).

Нагадаємо, що *псевдобаза* топологічного простору X — це така система $\mathcal{B}$ відкритих непорожніх множин простору X, що для кожної відкритої непорожньої множини G в X існує така множина $B \in \mathcal{B}$, що $B \subseteq G$.

Нам буде потрібний такий результат [13], [14].

Теорема A. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір, що має не більш, ніж зліченну псевдобазу, Z — регулярний топологічний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — горизонтально квазінеперервне відображення, яке квазінеперервне відносно другої змінної. Тоді f — це квазінеперервне відображення.*

Нарешті, відображення $f\colon X \to Y$ називається *ледь неперервним у точці* x_0 з X, якщо для кожного околу V точки $f(x_0)$ в Y існує така відкрита непорожня множина G в X, що $f(G) \subseteq V$, і просто *ледь неперервним*, якщо воно є таким у кожній точці з X.

Ясно, що з квазінеперервності відображення випливає його ледь неперервність, але не навпаки.

3. Одностайно квазінеперервні і ледь неперервні функції. Нехай X і Y — топологічні простори, $x_0 \in X$ і $f, g\colon X \to Y$ — два відображення. Кажуть, що вони *одностайно квазінеперервні* у точці x_0, якщо для довільних околів V_1 і V_2 точок $f(x_0)$ і $g(x_0)$ у просторі Y відповідно і довільного околу U точки x_0 в X існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V_1$, а $g(G) \subseteq V_2$. Відображення f і g називаються *одностайно ледь неперервними* в точці x_0, якщо для довільних околів V_1 і V_2 точок $f(x_0)$ і $g(x_0)$ відповідно існує така відкрита непорожня множина G в X, що $f(G) \subseteq V_1$ і $g(G) \subseteq V_2$. Кажуть, що f і g *одностайно квазінеперервні* чи *одностайно ледь неперервні*, якщо вони є такими у кожній точці з простору X.

Нагадаємо, що *діагональ* $h = f\Delta g$ двох відображень $f, g\colon X \to Y$ — це відображення, яке задається правилом $h(x) = (f(x), g(x))$. Легко перевірити, що відображення f і g будуть одностайно квазінеперервними /одностайно ледь неперервними/ у точці x_0 тоді і тільки тоді, коли їх діагональ $h = f\Delta g$ є квазінеперервною /ледь неперервною/ в точці x_0.

Очевидно, що з одностайної квазінеперервності функцій f і g випливає їх одностайна ледь неперервність. Найпростішими прикладами пари двох одностайно квазінеперервних функцій служить пара двох неперервних функцій f і g. Більше того, якщо f неперервна, а g квазінеперервна у точці x_0, то f і g будуть одностайно квазінеперервними у точці x_0. Справді, нехай V_1 і V_2 — околи точок $f(x_0)$ і $g(x_0)$ відповідно і U — довільний окіл точки x_0. З неперервності функції f у точці x_0 випливає, що існує такий окіл U_1 точки x_0 в X, що $f(U_1) \subseteq V_1$. З квазінеперервності функції g у точці x_0 випливає, що існує така відкрита непорожня множина G в X, що $G \subseteq U_1 \cap U$ і $g(G) \subseteq V_2$. В такому разі $G \subseteq U$ і $f(G) \subseteq V_1$, а $g(G) \subseteq V_2$, що і дає нам одностайну квазінеперервність функцій f і g у точці x_0. Одностайно квазінеперервними в точці x_0 будуть і функції $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які неперервні справа чи неперервні зліва у точці x_0. Характеристичні функції $f = \chi_{(-\infty;0]}$ та $g = \chi_{[0;+\infty)}$ служать прикладом квазінеперервних функцій, які не є ні одностайно квазінеперервними, ні навіть одностайно ледь неперервними у точці $x_0 = 0$.

Можна запропонувати і таке узагальнення. Нехай O — відкрита множина у топологічному просторі X і x_0 — точка із замикання $\overline{O}$ в X. Відображення $f\colon X \to Y$ ми будемо називати *O-неперервним у точці* x_0, якщо для кожного околу V точки $f(x_0)$ існує такий окіл U точки x_0, що $f(U \cap O) \subseteq V$. Легко перевірити, що два O-неперервних у точці x_0 відображення f і g будуть одностайно квазінеперервними в цій точці.

Наведемо приклад двох квазінеперервних функцій $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які одностайно ледь неперервні, але не є одностайно квазінеперервними. Для цього досить покласти $f = \chi_{(-\infty;0)}$ та $g = \chi_{(-\infty;0]\cup[1;+\infty)}$.

Наведені приклади можна розмножити з допомогою наступних загальних теорем. Як це прийнято, для відображення $f\colon X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ ми покладаємо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$.

Теорема 1. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір з не більш, ніж зліченною псевдобазою, Z — регулярний простір, і $f, g\colon X \times Y \to Z$ — слабко горизонтально квазінеперервні відображення, такі, що для кожного $x \in X$ відображення $f^x, g^x\colon Y \to Z$ та для кожного $y \in Y$ відображення $f_y, g_y\colon X \to Z$ є одностайно ледь неперервними. Тоді і f та g є одностайно ледь неперервними.*

Доведення. Нехай

$$p_0 = (x_0, y_0) \in P = X \times Y,\ z_1 = f(p_0),\ z_2 = g(p_0)$$

і $\widetilde{W}_i$ — довільний окіл точки z_i у Z, де $i = 1, 2$. З регулярності простору Z випливає, що існують такі відкриті околи W_i $(i = 1, 2)$ точок z_i в Z, що $\overline{W}_i \subseteq \widetilde{W}_i$ при $i = 1, 2$.

Відображення f_{y_0} та g_{y_0} одностайно ледь неперервні. Тому існує така відкрита непорожня множина G в X, що $f_{y_0}(G) \subseteq W_1$ і $g_{y_0}(G) \subseteq W_2$.

Нехай $\mathcal{B} = \{B_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — псевдобаза в Y, що складається з відкритих непорожніх множин. Для кожного номера n розглянемо множину

$$A_n = \{x \in G\colon f^x(B_n) \subseteq W_1 \text{ і } g^x(B_n) \subseteq W_2\}.$$

Доведемо, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = G$. Нехай $x \in G$. Оскільки $f^x(y_0) = f_{y_0}(x) \in W_1$ і $g^x(y_0) = g_{y_0}(x) \in W_2$, а множини W_1 і W_2 відкриті в Z, то вони є околами точок $f^x(y_0)$ та $g^x(y_0)$ відповідно. Але за умовою відображення f^x та g^x одностайно ледь неперервні у точці y_0. Тому існує така відкрита непорожня множина H в Y, що $f^x(H) \subseteq W_1$ і $g^x(H) \subseteq W_2$. Але $\mathcal{B}$ — псевдобаза в Y, отже, існує такий номер n, що $B_n \subseteq H$. В такому разі $f^x(B_n) \subseteq W_1$ і $g^x(B_n) \subseteq W_2$, а тому $x \in A_n$.

З беровості простору X випливає, що G — це множина другої категорії, отже, існує такий номер n, що множина A_n десь щільна, тобто відкрита множина $U_0 = \operatorname{int}\overline{A}_n$ непорожня. Розглянемо множину $A = U_0 \cap A_n$. Оскільки $U_0 \subseteq \overline{A}_n$ і множина U_0 відкрита, то $U_0 \subseteq \overline{A}$, звідки випливає, що $A \neq \varnothing$. Покладемо $U = U_0 \cap G$. Множина U відкрита і $U \subseteq \overline{A}$. Крім того, $A \subseteq U_0$ і $A \subseteq A_n \subseteq G$, отже, $\varnothing \neq A \subseteq U \subseteq \overline{A}$, зокрема, $U \neq \varnothing$.

Розглянемо відкриту непорожню множину $V = B_n$. Оскільки $A \subseteq A_n$, то для кожного $x \in A$

$$f(\{x\} \times V) = f^x(B_n) \subseteq W_1 \ \text{ і } \ g(\{x\} \times V) = g^x(B_n) \subseteq W_2,$$

отже, $f(A \times V) \subseteq W_1$ і $g(A \times V) \subseteq W_2$. Тепер зі слабкої горизонтальної квазінеперервності відображень f і g ми отримуємо, що

$$f(U \times V) \subseteq \overline{f(A \times V)} \subseteq \overline{W}_1 \subseteq \widetilde{W}_1 \ \text{ і } \ g(U \times V) \subseteq \overline{g(A \times V)} \subseteq \overline{W}_2 \subseteq \widetilde{W}_2.$$

Оскільки $U \times V$ — це відкрита непорожня множина в добутку P, то встановлені включення показують, що f і g одностайно ледь неперервні у точці p_0. □

Аналогічне до теореми 1 твердження для одностайно квазінеперервних функцій можна довести подібними міркуваннями, але простіше його вивести з теореми A.

Теорема 2. *Нехай X — берівський простір, Y — топологічний простір, що має не більш, ніж зліченну псевдобазу, Z — регулярний простір, і $f, g\colon X \times Y \to Z$ — такі, що для кожного $x \in X$ відображення f^x і g^x та для кожного $y \in Y$ відображення f_y і g_y є одностайно квазінеперервні. Тоді і f та g є одностайно квазінеперервними.*

Доведення. Розглянемо діагональ $h = f \Delta g$ відображень f і g. Оскільки $h^x = f^x \Delta g^x$ і $h_y = f_y \Delta g_y$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$, то відображення $h\colon X \times Y \to Z^2$ нарізно квазінеперервне. Топологічний добуток $Z^2 = Z \times Z$ буде регулярним як і простір Z. Тому за теоремою A відображення h квазінеперервне. Звідси негайно випливає, що функції f і g одностайно квазінеперервні. □

4. Одностайна ледь неперервність і квазінеперервність функцій багатьох змінних. Тут ми перенесемо теореми 1 і 2 на випадок функцій багатьох змінних. Для цього нам буде потрібний один результат про беровість добутку ([15, с. 56] або [16]).

Теорема B. *Нехай X і Y — берівські простори, причому Y має не більш, ніж зліченну псевдобазу. Тоді і їх добуток $X \times Y$ буде берівським.*

З теорем A і B індукцією відносно n легко виводяться такі результати.

Наслідок 1. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ — берівські простори, причому простори $X_2, \ldots, X_n$ мають не більш, ніж зліченну псевдобазу. Тоді і добуток $X_1 \times \ldots \times X_n$ — це берівський простір.*

Наслідок 2. *Нехай* $X_1, \dots, X_{n-1}$ *— берівські простори, простори* $X_2, \dots, X_n$ *— мають не більш, ніж зліченну псевдобазу,* Z *— регулярний топологічний простір і* $f\colon X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ *— нарізно квазінеперервне відображення. Тоді* f *— це квазінеперервне відображення за сукупністю змінних.*

Нехай $X_1, \dots, X_n$ та Z — топологічні простори і $f\colon X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ — відображення. Для довільного $k = 2, \dots, n$ і фіксованих значень $a_{k+1} \in X_{k+1}, \dots, a_n \in X_n$ розглянемо відображення

$$f_{a_{k+1},\dots,a_n}(x_1, \dots x_k) = f(x_1, \dots x_k, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

При $k = n$ отримуємо вихідне відображення f. Відображення f називається *слабко горизонтально квазінеперервним відносно останньої змінної*, якщо воно буде слабко горизонтально квазінеперервним як відображення $f\colon X \times Y \to Z$, де $X = X_1 \times \dots \times X_{n-1}$, $Y = X_n$ і $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ для $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in X$ і $y = x_n \in Y$. Ми будемо говорити, що f *фінально слабко горизонтально квазінеперервне*, якщо для довільних фіксованих точок $a_3 \in X_3, \dots, a_n \in X_n$ всі відображення $f_{a_{k+1},\dots,a_n}\colon X_1 \times \dots \times X_k \to Z$ при $k = 2, \dots, n$, є слабко горизонтально квазінеперервними відносно останньої змінної.

Для відображення $f\colon X_1 \times \dots \times X_n \to Z$, точки $(a_1, \dots, a_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ і номера $k = 1, \dots, n$ розглянемо відображення $f_{\widehat{a}_k}\colon X_k \to Z$, яке визначається формулою $f_{\widehat{a}_k}(x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$. Зрозуміло, що для фінально слабко горизонтально квазінеперервного відображення f і довільної точки $a_n \in X_n$ відображення $f_{a_n}\colon X_1 \times \dots \times X_{n-1} \to Z$ теж буде фінально слабко горизонтально квазінеперервним.

З допомогою теореми B і теореми 1 індукцією відносно кількості змінних ми встановимо такий результат.

Теорема 3. *Нехай* $X_1, \dots, X_{n-1}$ *— берівські простори,* X_n *— топологічний простір, причому простори* $X_2, \dots, X_n$ *мають не більш, ніж зліченні псевдобази,* Z *— регулярний простір, і* $f, g\colon X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ *— такі фінально слабко горизонтально квазінеперервні відображення, що для кожного набору* $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ *і довільного* $k = 1, \dots, n$ *відображення* $f_{\widehat{x}_k}\colon X_k \to Z$ *та* $g_{\widehat{x}_k}\colon X_k \to Z$ *одностайно ледь неперервні. Тоді і* f *та* g *є одностайно ледь неперервними функціями.*

Теорема 4. *Для* $n = 2$ *ця теорема збігається з теоремою 1. Припустимо, що* $n > 2$ *і твердження теореми справджується, коли число просторів дорівнює* $n - 1$*. Доведемо, що воно справджується і коли число просторів дорівнює* n*, як у формулюванні теореми.*

За наслідком 1 добуток $X = X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ є берівським. За індуктивним припущенням для кожного $y = x_n \in Y = X_n$ функції $f_y\colon X \to Z$ і $g_y\colon X \to Z$, для яких

$$f_y(x) = f(x, y) = f(x_1, \dots, x_n) \ \text{ і } \ g_y(x) = g(x, y) = g(x_1, \dots, x_n),$$

де $x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in X$, будуть одностайно ледь неперервними. Оскільки функції $f, g\colon X \times Y \to Z$ слабко горизонтально квазінеперервні, адже f і g слабко горизонтально квазінеперервні відносно останньої змінної, то за теоремою 1 вони будуть і одностайно ледь неперервними як функції від двох змінних $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ і $y = x_n$, а значить, і як функції від n зімнних $x_1, \dots, x_n$. $\square$

Так само доводиться і теорема про одностайну квазінеперервність функцій багатьох змінних.

Теорема 5. *Нехай* $X_1, \dots, X_{n-1}$ *і* Z *— простори, такі ж як в теоремі 3, і* $f, g\colon X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ *— такі відображення, що для кожного набору* $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ *і довільного* $k = 1, \dots, n$ *відображення* $f_{\widehat{x}_k}$ *та* $g_{\widehat{x}_k}$ *одностайно квазінеперервні. Тоді і* f *та* g *будуть одностайно квазінеперервними.*

Доведення. Для $n = 2$ це наше твердження збігається з теоремою 2. Припустимо, що $n > 2$ і для $n-1$ простору твердження теореми справджується. Доведемо, що воно має місце і для n просторів.

За наслідком 1 добуток $X = X_1 \times \dots \times X_{n-1}$ буде берівським. Покладемо

$$Y = X_n,\ f(x,y) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n),\ g(x,y) = g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n),$$

де $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ і $y = x_n$. Для кожного $y \in Y$ відображення $f_y\colon X \to Z$ і $g_y\colon X \to Z$ будуть одностайно квазінеперервними за індуктивним припущенням. За умовою відображення f^x і g^x теж одностайно квазінеперервні для кожного $x \in X$. Тому за теоремою 2 відображення будуть одностайно квазінеперервними як функції змінної (x,y), так і сукупної змінної $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$. □

5. Узагальнення теореми Серпінського для функцій двох змінних. Нагадаємо, що простір Z називається *урисоновим*, якщо для кожних його різних точок z_1 і z_2 існують такі їх замкнені околи W_1 і W_2 відповідно, що $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Зрозуміло, що кожний регулярний простір є урисоновим, але обернене не вірно.

Система $\mathcal{B}$ відкритих непорожніх підмножин простору Y називається його *локальною псевдобазою у точці* y якщо для кожного її околу V існує така множина $B \in \mathcal{B}$, що $B \subseteq V$.

Наступний результат є найкращим у серії узагальнень теореми Серпінського.

Теорема 6. *Нехай* X *— берівський простір,* Y *— топологічний простір, який у кожній точці має не більш, ніж зліченну локальну псевдобазу,* Z *— урисоновий простір,* $f, g\colon X \times Y \to Z$ *— слабко горизонтально квазінеперервні відображення, які неперервні відносно другої змінної і такі, що для кожного* $y \in Y$ *відображення* f_y *та* g_y *одностайно ледь неперервні,* E *— всюди щільна підмножина добутку* $X \times Y$ *і* $f|_E = g|_E$*. Тоді* $f = g$.

Доведення. Розглянемо довільну точку $p_0 = (x_0, y_0) \in P = X \times Y$ і доведемо, що $f(p_0) = g(p_0)$. Нехай це не так, тобто точки $z_1 = f(p_0)$ і $z_2 = g(p_0)$ різні. З урисоновості простору Z випливає, що існують такі відкриті околи W_1 і W_2 точок z_1 і z_2 відповідно, що $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \varnothing$. Оскільки функції f_{y_0} та g_{y_0} одностайно ледь неперервні в точці x_0, то існує така відкрита непорожня множина U в просторі X, що $f_{y_0}(U) \subseteq W_1$ і $g_{y_0}(U) \subseteq W_2$.

Нехай $\mathcal{V} = \{V_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — локальна псевдобаза у точці y_0 простору Y. Розглянемо множини $A_n = \{x \in U\colon f^x(V_n) \subseteq W_1 \text{ і } g^x(V_n) \subseteq W_2\}$.

Легко зрозуміти, що $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = U$. Справді, нехай $x \in U$. Оскільки відображення $f^x\colon Y \to Z$ і $g^x\colon Y \to Z$ неперервні в точці y_0, $f^x(y_0) = f_{y_0}(x) \in W_1$ і $g^x(y_0) = g_{y_0}(x) \in W_2$ і множини W_1 та W_2 відкриті в Z, то існує такий окіл V точки y_0 у просторі Y, що $f^x(V) \subseteq W_1$ і $g^x(V) \subseteq W_2$. Але $\mathcal{V}$ — це локальна псевдобаза у точці y_0, тому існує такий номер n, що $V_n \subseteq V$. В такому разі $f^x(V_n) \subseteq W_1$ і $g^x(V_n) \subseteq W_2$, отже, $x \in A_n$.

З беровості простору X випливає, що U — це множина другої категорії в X, отже, існує такий номер m, що множина A_m десь щільна в X, тобто відкрита множина $U_m = \operatorname{int}\overline{A}_m \neq \varnothing$. Розглянемо відкриту в X множину $G = U \cap U_m$. Оскільки $U_m \subseteq \overline{A}_m$ і множина U_m відкрита, то $U_m \subseteq \overline{A_m \cap U_m}$, зокрема, множина $A = A_m \cap U_m$ непорожня.

Але $G \subseteq U_m$, тому і $G \subseteq \overline{A}$. Крім того, $A \subseteq U_m \cap U = G$. Таким чином, $\varnothing \neq A \subseteq G \subseteq \overline{A}$, $A \subseteq A_m$ і $G \neq \varnothing$.

Множина $H = V_m$ непорожня і відкрита в Y. Оскільки $A \subseteq A_m$, то для кожного $x \in A$

$$f(\{x\} \times H) = f^x(V_m) \subseteq W_1 \text{ і } g(\{x\} \times H) = g^x(V_m) \subseteq W_2,$$

а значить, $f(A \times H) \subseteq W_1$ і $g(A \times H) \subseteq W_2$. Оскільки $G \subseteq \overline{A}$, то зі слабкої горизонтальної квазінеперервності відображень f і g випливає, що

$$f(G \times H) \subseteq \overline{f(A \times H)} \subseteq \overline{W}_1 \text{ і } g(G \times H) \subseteq \overline{g(A \times H)} \subseteq \overline{W}_2.$$

Множина E всюди щільна в добутку P, а множина $O = G \times H$ відкрита і непорожня в P, тому $E \cap O \neq \varnothing$, отже, існує точка $p \in P \cap O$. Для цієї точки з одного боку $f(p) = g(p)$, бо $p \in E$, а з другого $f(p) \neq g(p)$, бо $f(p) \in \overline{W}_1$, $g(p) \in \overline{W}_2$, адже $p \in O$, і $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \varnothing$. Отримана суперечність показує, що $f(p_0) = g(p_0)$. Оскільки p_0 — це довільна точка з добутку P, то $f = g$. □

Теорема 7. *Нехай простори X, Y, Z і множина E — такі ж як у теоремі 5, $f\colon X \times Y \to Z$ — нарізно неперервне відображення, $g\colon X \times Y \to Z$ — відображення, у якого всі x-розрізи $g^x\colon Y \to Z$ неперервні і всі y-розрізи $g_y\colon X \to Z$ квазінеперервні, причому $f|_E = g|_E$. Тоді $f = g$.*

Доведення. Для кожного $y \in Y$ відображення f_y неперервне, а відображення g_y квазінеперервне, тому f_y і g_y будуть одностайно квазінеперервними, а значить, і одностайно ледь неперервними. Крім того, функції f і g будуть, очевидно, горизонтально квазінеперервними, а значить, і слабко горизонтально квазінеперервними. Тому $f = g$ за теоремою 5. □

6. Узагальнення теореми Серпінського для функцій багатьох змінних. Розглянемо тепер випадок функцій від n змінних, де $n \geq 3$.

Теорема 8. *Нехай $X_1, \dots, X_{n-1}$ — берівські простори, причому простори $X_2, \dots, X_{n-1}$ мають не більш, ніж зліченну псевдобазу, X_n — топологічний простір, який у кожній точці має не більш, ніж зліченні локальні псевдобази, Z — регулярний простір, $f, g\colon X_1 \times \ldots \times X_n \to Z$ — такі фінально слабко горизонтально квазінеперервні відображення, що для довільного $k = 1, \dots, n-1$ відображення $f_{\widehat{x}_k}$ і $g_{\widehat{x}_k}$ одностайно ледь неперервні, а відображення $f_{\widehat{x}_n}$ і $g_{\widehat{x}_n}$ неперервні, E — всюди щільна підмножина добутку $X_1 \times \ldots \times X_n$ і $f|_E = g|_E$. Тоді $f = g$.*

Доведення. Нехай $X = X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$ і $Y = X_n$. Функції f і g ми будемо інтерпретувати як функції від двох змінних $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ та $y = x_n$. За наслідком 1 простір X буде берівським. Для кожного фіксованого $y \in Y = X_n$ функції f_y та g_y будуть одностайно ледь неперервними за теоремою 3. Для кожного $x \in X$ відображення f^x і g^x будуть неперервними за умовою. Крім того, самі відображення $f, g\colon X \times Y \to Z$ є слабко горизонтально квазінеперервними, що випливає з їх фінальної слабкої горизонтальної квазінеперервності як відображень з $X_1 \times \ldots \times X_n$ у Z. Оскільки множина E буде всюди щільною в добутку $X \times Y$ і $f|_E = g|_E$, то за теоремою 5 маємо, що $f = g$. □

З теореми 4 легко вивести і такий результат.

Теорема 9. *Нехай простори $X_1, \dots X_n$, Z і множина E — такі ж як у теоремі 6, $f, g\colon X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ — такі відображення, що для кожного набору $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ відображення $f_{\widehat{x}_k}$ та $g_{\widehat{x}_k}$ одностайно квазінеперервні при $k = 1, \dots, n-1$, а $f_{\widehat{x}_n}$ і $g_{\widehat{x}_n}$ неперервні, причому $f|_E = g|_E$. Тоді $f = g$.*

Доведення. У позначеннях доведення теореми 6 на основі теореми 4 ми можемо зробити висновок, що для кожного $y \in Y$ відображення f_y та g_y одностайно квазінеперервні, а значить, і одностайно ледь неперервні. Тоді рівність $f = g$ випливає з теореми 5. □

7. Прикінцеві зауваження. Теорема Михайлюка з [8] є частинним випадком теореми 5, чи навіть її наслідку 3, адже неперервні функції є квазінеперервними.

У праці [7] доведено такий результат: якщо X_1 берівський простір, $X_2, \dots, X_n$ берівські простори з не більш, ніж зліченними псевдобазами, то довільні нарізно неперервні функції $f, g\colon X_1 \times \dots \times X_n \to \mathbb{R}$, які збігаються на деякій всюди щільній підмножині добутку $X_1 \times \dots \times X_n$, будуть рівними. Ясно, що і цей результат випливає як з теореми 6, так і з теореми 7.

У праці [2] вперше застосовується ледь неперервність, але простір значень там цілком регулярний, а для наших результатів досить його регулярності.

Автори вдячні Рецензенту за слушні зауваження і поради, щодо використання діагоналі відображень, які дозволили покращити виклад матеріалу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Sierpiński W. *Sur une propriété de fonctions de deux variables réelles, continues par rapport à chacune de variables*// Publ. Math. Univ. Belgrade. – 1932. – V.1. – P. 125–128.
2. Piotrowski Z., Wingler E.Y. *On Sierpiński's theorem on the determination of separately continuous functions*// Q&A in General Topology. – 1997. – V.15. – P. 15–19.
3. Tolstov G. *On partial derivatives*// Amer. Math. Soc. Transl., No. 69, Izv. Akad. Nauk SSSR Mat. – 1949. – V.13. – P. 425–449.
4. Marcus S. *On functions continuous in each variable*// Doklady Akad. Nauk SSSR. – 1957. – V.112. – P. 812–814.
5. Neugebauer C.J. *A class of functions determined by dense sets*// Archiv der Mathematik. – 1961. – V.12. – P. 206–209.
6. Goffman C., Neugebauer C.J. *Linearly continuous functions*// Proc. Amer. Math. Soc. – 1961. – V.12. – P. 997–998.
7. Comfort W.W. *Functions linearly continuous on a product of Baire spaces*// Boll. Un. Mat. Ital. – 1965. – V.20. – P. 128–134.
8. Mykhaylyuk V.V. *Separate continuity topology and a generalization of Sierpinski's theorem*// Math. Stud. – 2000. – V.14, №2. – P. 193–196. (in Ukrainian)
9. Maslyuchenko V.K., Filipchuk O.I. Discontinuity points of at most countable valued separately continuous mappings// Proc. of Int. Sci. Conf. "Differential-functional equations and their applications", dedicated to the 80-th anniversary of M.P. Lenyuk (October, 28–30, 2016). – 2016. – P. 168–169. (in Ukrainian)
10. Maslyuchenko V.K., Filipchuk O.I. *Discontinuity points of at most countable valued separately continuous mappings* (to appear) (in Ukrainian)
11. Kempisty S. *Sur les fonctions quasi-continues*// Fund. Math. – 1932. – V.19. – P. 184–197.
12. Nesterenko V.V. *Weak horizontal quasicontinuity*// Math. Visn. NTSh. – 2008. – V.5. – P. 177–182. (in Ukrainian)

13. Maslyuchenko V.K. *On separate and joint modifications of continuity*// Mat. Stud. – 2006. – V.25, №2. – P. 213–218. (in Ukrainian)
14. Nesterenko V.V. *On one characterization of joint quasicontinuity*// Nauk. Visn. Cherniv. Univ., Mat. – 2007. – V.336–337. – P. 137–141. (in Ukrainian)
15. Haworth R.C., McCoy R.A. *Baire spaces*// Dis. Math. – 1977. – V.141. – P. 1–77.
16. Maslyuchenko V.K. Separately continuous mappings and Köthe spaces. Doctoral-Degree Thesis (Physics and Mathematics), Chernivtsi, 1999. – 345 p. (in Ukrainian)

Chernivtsi National University
v.maslyuchenko@gmail.com
o.filipchuk@chnu.edu.ua

Надійшло 20.01.2017