

В. Ю. Хохлов, канд. техн. наук,
консультант з корпоративних фінансів
та інвестиційного менеджменту

ВИКОРИСТАННЯ РОЗПОДІЛІВ СТЬЮДЕНТА ТА ЛАПЛАСА ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДОХІДНОСТІ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

АНОТАЦІЯ. Проведено у статті дослідження розподілів щоденної дохідності активів на фондових ринках США та України показало значну відмінність фактичного її розподілу від нормального (проблема «товстих хвостів»). Показано, що для моделювання дохідності та управління ризиками краще застосовувати розподіл Стьюдента з 3—4 ступенями свободи чи розподіл Лапласа. Статистичні тести Пірсона та Колмогорова-Смірнова показали їхню істотну перевагу над нормальним розподілом.

ABSTRACT. Our research shows the significant deviation from normality in the distribution on the daily returns for securities on the U.S. and Ukrainian stock market (so called «fat tails» problem). The Student's t distribution with 3—4 degrees of freedom and the Laplace distribution are much better for modeling stock returns and risk management. Their superiority was confirmed by the Pearson's chi-squared and the Kolmogorov-Smirnov goodness of fit tests.

КЛЮЧОВІ СЛОВА. Розподіл дохідності акцій, управління ризиками, нормальний розподіл, розподіл Стьюдента, розподіл Лапласа, великі хвости.

Постановка проблеми. Використання нормального розподілу для моделювання дохідності активів на фондовому ринку може призвести до значної недооцінки ризиків. Тому актуальним завданням є обґрунтування використання інших розподілів, які краще моделюють ризик значних втрат, але які також є сумісними із положеннями сучасної портфельної теорії.

Аналіз останніх досліджень. У відомій книзі Талеба [1] було вказано на неадекватність нормального розподілу фактичному розподілу дохідності. Це викликало велику дискусію у фінансових виданнях на тему можливості використання сучасної портфельної теорії взагалі. Але, як вказано у працях Чемберлена [2] та Оуена й Рабіновича [3], теорія не вимагає нормального розподілу дохідності, вона так само працюватиме для будь-якого еліптичного розподілу. Серед праць, які досліджують ненормальні еліптичні розподіли, можна виді-

лити статті Апарісіо та Естради [4], Едкока та Міда [5], Кіма та МакКаллоха [6], Ліндена [7]. Більшість цих праць присвячено дослідженню різних варіантів розподілу Стьюдента. Висновки дослідників різні, хоча всі вони вказують на перевагу цього розподілу над нормальним. Але якщо у [5] визначено переваги несиметричного розподілу Стьюдента, то в [6] вказується на те, що симетричний розподіл є адекватним для акцій США та Великої Британії. У [4], окрім розподілу Стьюдента, досліджується логістичний та експоненційний розподіли, які однак є менш прийнятними. Дослідженню розподілу Лапласа присвячено дуже мало праць, серед яких виділяється [7], в якій автор показує прийнятність цього розподілу для моделювання дохідності акцій у Фінляндії.

Мета та завдання дослідження. Метою дослідження є знаходження еліптичних розподілів, які адекватно моделюють ризики великих збитків. Задачею дослідження є перевірка розподілів Стьюдента та Лапласа за допомогою статистичних критеріїв відповідності фактичному розподілу, визначення найкращих розподілів для моделювання дохідності за різні періоди часу.

Неприйнятність нормального розподілу

Найбільш розповсюдженою практикою в інвестиційній професії є використання нормального розподілу для моделювання логарифму дохідності цінних паперів при оптимізації портфелю, управлінні ризиками чи моделюванні динаміки цін. Як вказує Таллеб [1], ймовірність у хвостах нормального розподілу є значно нижчою, ніж фактична ймовірність отримання екстремальних доходів чи збитків.

Порівняння теоретичної та фактичної ймовірності отримання збитків у розмірі 4, 5 і 6 стандартних відхилень від середнього наведено у табл. 1. Для кращого сприймання даних ймовірності переведені у кількість років, яка знадобиться для отримання такого екстремального збитку протягом одного торгового дня (із розрахунку 251 торговий день у році). Наведені дані розраховані для чотирьох різних активів — індексу Dow Jones Industrial Average (DJIA), біржового фонду SPY, що слідкує за індексом Standard & Poor's 500 (S&P 500), акцій корпорації General Electric (GE) та Exxon Mobil (XOM). Розміри вибірок: 23981 спостереження для DJIA, 4510 для SPY, по 5024 для GE та XOM.

Таблиця 1

**КІЛЬКІСТЬ РОКІВ, ЯКА ЗНАДОБИТЬСЯ
ДЛЯ ОТРИМАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ДЕННОГО ЗБИТКУ
ЗА УМОВИ ЗАДАНОГО РОЗПОДІЛУ ЩОДЕННОЇ ДОХІДНОСТІ**

Денний збиток	Кількість років для розподілу			Фактична кількість років
	нормального	Стьюдента ($df = 3$)	Лапласа	
		DJA		
-6,9 %	3,466,480	4,14	73,75	3,41
-5,8 %	15,878	2,50	17,28	2,17
-4,6 %	120	1,28	3,55	0,93
		SPY		
-7,4 %	3,249,506	4,12	57,72	3,59
-6,2 %	13,994	2,46	13,74	2,25
-5,0 %	148	1,33	3,27	1,12
		GE		
-11,3 %	4,141,433	4,20	55,20	10,04
-9,4 %	13,745	2,46	12,54	2,01
-7,5 %	121	1,28	2,85	0,84
		XOM		
-9,3 %	4,646,854	4,24	37,36	6,70
-7,7 %	13,312	2,45	8,79	3,35
-6,2 %	140	1,32	2,26	1,83

З табл. 1 можна зробити висновок про те, що нормальний розподіл недооцінює ризики у хвостах розподілу у приблизно мільйон разів для 6 стандартних відхилень, у тисячі разів для 5 стандартних відхилень, у сотні разів для 4 стандартних відхилень. Така недооцінка є неприйнятною у інвестиційній практиці. Наведені для порівняння розподіли Стьюдента та Лапласа дають набагато кращі результати. Лівий хвіст фактичного розподілу та трьох теоретичних розподілів наведено на рис. 1.

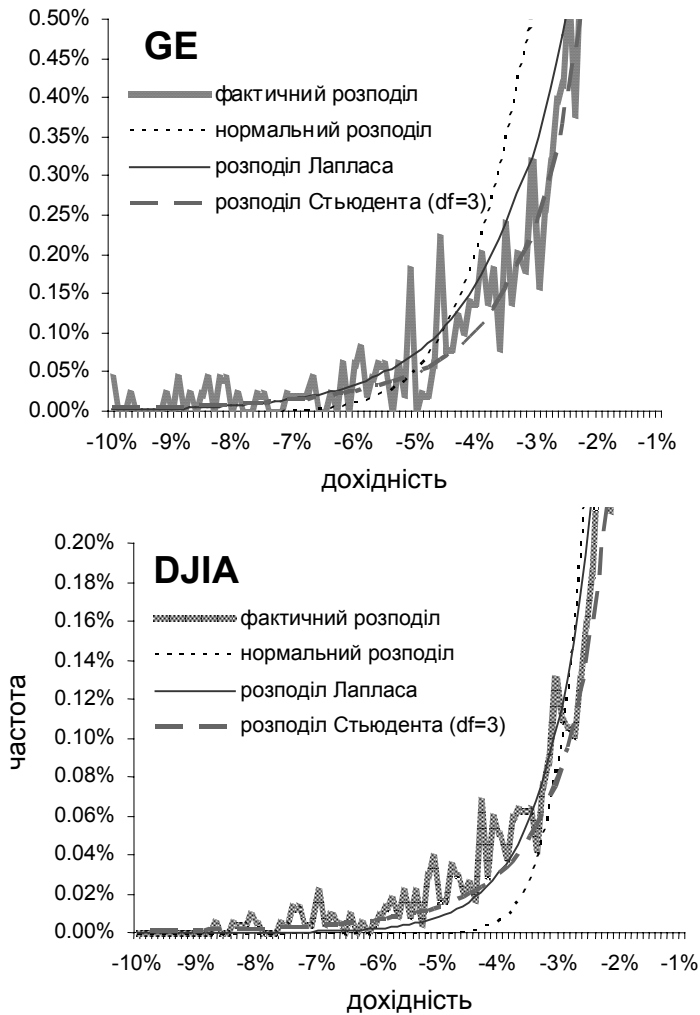


Рис. 1. Лівий хвіст функції щільності розподілу дохідності DJIA та GE

Використані статистичні критерії

Щоб науково обґрунтувати попередні висновки про перевагу розподілів Стьюдента та Лапласа, застосуємо відомі статистичні тести на відповідність розподілів — тест Пірсона (хі-квадрат) та тест Колмогорова-Смірнова (КС). Тест Пірсона порівнює факти-

чну і теоретичну кількість спостережень у заданих інтервалах, тобто перевіряє відповідність теоретичної функції щільності розподілу фактичній щільності. Перевірка розподілів денної дохідності усіх активів здійснювалася у діапазоні від -10% до 10% , розбитому на 200 рівних інтервалів (довжина інтервалу $0,1\%$). Тестова статистика порівнювалася з критичними значеннями для розподілу χ^2 з 200 ступенями свободи: 233,99 (для 5%), 249,56 (для 1%), 267,54 (для $0,1\%$).

Тест Колмогорова—Смірнова (КС-тест), на відміну від попереднього, перевіряє відповідність теоретичної кумулятивної функції розподілу фактичній. Якщо тест Пірсона має чітко виражену залежність від кількості та способу визначення інтервалів, то КС-тест не має такого недоліку. У даному дослідженні використовується двосторонній КС-тест, але у таблицях наведені значення модифікованої тестової статистики $K = D\sqrt{N}$, де D — тестова статистика КС-тесту, N — розмір вибірки. Критичні значення K — 1,22 (5%), 1,36 (1%), 1,63 ($0,1\%$).

Особливості використання розподілів Стьюдента та Лапласа

Першою особливістю використання розподілу Стьюдента є необхідність визначення кількості ступенів свободи. Хоча існує зв'язок між цим параметром та ексцесом, який можна виміряти по вибірці, ми не будемо йти цим шляхом, а перевіримо кілька обраних цілих значень. Найкращі результати отримані для щоденних дохідностей у діапазоні між 3 та 6 ступенями свободи, для періодичних дохідностей ці значення збільшуються.

Другою особливістю є необхідність перейти від стандартного розподілу Стьюдента, яке має нульове середнє та одиничне стандартне відхилення, до конкретного розподілу, яке відповідає вибірковим статистикам. Випадкова змінна, що відповідає такому розподілу:

$$t_v = \frac{\tilde{t}_v - \mu}{\sigma_t}, \quad \sigma_t^2 = \frac{v-2}{v} \sigma^2,$$

де t_v — випадкова змінна, що відповідає стандартному розподілу Стьюдента, \tilde{t}_v — випадкова змінна, що відповідає розподілу Стьюдента з математичним очікуванням μ та стандартним відхиленням σ ; v — кількість ступенів свободи розподілу Стьюдента.

Особливістю використання розподілу Лапласа є необхідність визначення його двох параметрів. Нашою рекомендацією є застосування вибіркової медіани та середнього абсолютного відхилення від неї у якості оцінок параметрів розподілу Лапласа μ та b , відповідно, у формулах:

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right); F(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn}(x-\mu) \left(1 - \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) \right) \right].$$

де f — функція розподілу Лапласа, F — кумулятивна функція розподілу Лапласа, μ — параметр центру, b — параметр масштабу.

Тести розподілу щоденної дохідності на ринку США

Для статистичних тестів розподілів щоденної дохідності на ринку США використана вибірка з 42 активів — 2 індекси, 9 біржових фондів (ETF) і 31 компанія (з них 11 великої, 10 середньої та 10 малої капіталізації). Для індексів Dow Jones (DJI) і Standard & Poor's 500 (S&P500) досліджені вибірки за 41 рік (1970—2010), для інших активів — за 20 років (1991—2010), або за весь період лістингу на біржі, якщо він менший за 20 років. Вибіркові статистики та результати тестів для деяких активів наведено у табл. 2.

Таблиця 2

РЕЗУЛЬТАТИ ТЕСТІВ РОЗПОДІЛІВ ЩОДЕННОЇ ДОХІДНОСТІ НА РИНКУ США

Тікер активу	DJI	S&P500	AAPL	C	GE	PG
Розмір вибірки	10349	10349	5042	5042	5042	5042
Середнє	0,0258 %	0,0253 %	0,0686 %	0,0275 %	0,0371 %	0,0437 %
Ст. відхилення	1,0846%	1,0841 %	3,2283 %	3,1126 %	1,8889 %	1,5545 %
Асиметрія	-1,3059	-1,0540	-2,2021	-0,4429	0,0198	-2,5910
Експес	39,6963	29,9646	59,8910	41,4686	11,0346	63,7430
Розподіл	Значення χ^2 тесту Пірсона					
Нормальний	NaN	NaN	831,41	1921,22	29477,06	8197595,1
Ст'юдент (3)	332,78	322,44	522,20	550,65	454,29	378,95
Ст'юдент (4)	221,47	322,06	438,50	889,69	474,46	343,05

Закінчення табл. 2

Тікер активу	DJI	S&P500	AAPL	C	GE	PG
Лаплас	1296,94	2395,64	446,81	439,50	491,83	491,03
Розподіл	Значення K КС-тесту					
Нормальний	6,4997	7,2474	4,6363	8,4100	5,7089	4,7757
Стюдент (3)	2,7670	2,2412	2,1553	2,4800	2,0563	1,9703
Стюдент (4)	1,6421	2,7205	1,1439	4,9064	2,0086	1,5482
Лаплас	1,6543	1,2038	2,0172	1,9128	1,6336	1,8871

Таблиця 3

Тікер активу	XOM	GLD	TLH	AGG	ORCL	медіана
Розмір вибірки	5042	1540	1001	1828	5042	4748,5
Середнє	0,0459 %	0,0740 %	0,0234 %	0,0185 %	0,1011 %	0,0390 %
Ст. відхилення	1,5521 %	1,3591 %	0,7061 %	0,3761 %	3,2648 %	2,2125 %
Асиметрія	0,0556	-0,1740	0,1881	-2,9648	0,1933	-0,2229
Екссес	12,0052	8,1543	4,9608	81,3198	12,7618	12,9494
Розподіл	Значення χ^2 тесту Пірсона					
Нормальний	4034131,1	378409,49	NaN	NaN	2319,83	3239,95
Стюдент (3)	450,94	253,48	160,94	522,15	1414,23	515,65
Стюдент (4)	280,86	194,10	83,06	1825,56	1527,07	456,48
Лаплас	454,28	207,23	99,31	NaN	1121,71	493,98
Розподіл	Значення K КС-тесту					
Нормальний	3,8070	2,6692	1,0729	3,8981	5,2913	4,9804
Стюдент (3)	3,2526	2,0588	2,1350	0,7771	3,4967	2,2106
Стюдент (4)	1,3364	1,1372	1,0628	1,7202	3,2635	2,7894
Лаплас	2,6437	0,8838	1,3525	1,6131	2,7321	1,8372

Примітка. Тестові статистики, що є значущими на рівні 95 %, виділені жирним.

Результати показали велику перевагу розподілів Стюдента та Лапласа над нормальним. Єдиний актив, для якого можна прийняти нормальний розподіл, — це фонд довгострокових держав-

них облігацій США TLH. Взагалі, фонди облігацій (TLH, AGG, BSV) та цінних металів (GLD, SLV) краще описуються розглянутими розподілами, ніж акції та індекси акцій.

Хоча, у середньому, ми можемо відкинути гіпотезу про те, що фактична дохідність має один з цих розподілів із ймовірністю 95 %, застосування розподілів Стюдента чи Лапласа значно покращує тестові статистики. Розподіли Стюдента з 3 чи 4 ступенями свободи та розподіл Лапласа показують різні результати на різних активах. У середньому, згідно КС-тесту, розподіл Лапласа має деяку перевагу над розподілом Стюдента.

Тести розподілу щомісячної дохідності на ринку США

Найпростішим способом перевірити розподіл щомісячної дохідності є використання відповідних вибірок даних по календарних місяцях. Але інвестори не зобов'язані робити інвестиції 1-го числа місяця. Тому такі вибірки не відповідають реальному розподілу щомісячних дохідностей. Кращим, на нашу думку, способом є розрахунок періодичних дохідностей за період інвестування, який дорівнює середній кількості торгових днів у місяці.

У цьому дослідженні щомісячні дохідності розраховані як дохідності за 21 торговий день по вибірках щоденних дохідностей, розглянутих вище. Оскільки ми використовуємо логарифмічні дохідності, то періодична дохідність дорівнює сумі щоденних. Результати досліджень щомісячної дохідності активів на ринку США представлено у табл. 4.

Таблиця 4

РЕЗУЛЬТАТИ ТЕСТІВ РОЗПОДІЛІВ ЩОМІСЯЧНОЇ ДОХІДНОСТІ НА РИНКУ США

Тікер активу	DJI	SP500	AAPL	C	GE	PG
Розмір вибірки	10329	10329	5022	5022	5022	5022
Середнє, %	0,5452	0,5324	1,3988	0,5610	0,7720	0,9450
Ст. відхилення	4,7415 %	4,7372 %	15,2173 %	13,5095 %	7,9954 %	6,4021 %
Асиметрія	-0,9281	-0,9635	-1,4630	-1,7626	-0,6151	-1,8604
Екссес	7,5174	7,6902	11,5591	21,2360	7,6002	15,3827
Розподіл	Значення χ^2 тесту Пірсона					
Нормальний	1004,04	1091,63	3342,01	3949,41	1716,91	1244,67
Студент (3)	1310,67	1270,67	1783,05	1872,96	912,87	641,45
Студент (4)	793,21	806,62	2250,73	2511,78	1057,06	701,98

Закінчення табл. 2

Тікер активу	DJI	SP500	AAPL	C	GE	PG
Лаплас	1100,88	1088,10	2378,81	1910,26	1222,25	800,27
Розподіл	Значення K КС-тесту					
Нормальний	5,1772	5,6850	3,8820	8,3581	5,1101	5,9599
Ст'юдент (3)	6,9720	7,1383	5,5259	3,8733	3,3316	3,1064
Ст'юдент (4)	4,6214	4,5522	3,3409	5,2364	1,5889	2,5238
Лаплас	3,9046	3,5960	2,6550	2,4476	1,3218	1,4405

Таблиця 5

Тікер активу	XOM	GLD	TLH	AGG	ORCL	медіана
Розмір вибірки	5022	1520	981	1808	5022	5022
Середнє	0,9698 %	1,5402 %	0,5105 %	0,3903 %	2,1880 %	0,7720 %
Ст. відхилення	5,1186 %	5,8305 %	3,1107 %	1,3605 %	13,0753 %	5,8305 %
Асиметрія	-0,2981	-0,5318	0,6700	-0,7231	-0,2473	-0,7231
Екссес	4,1443	4,5701	5,3392	15,5190	5,1809	7,6002
Розподіл	Значення χ^2 тесту Пірсона					
Нормальний	551,23	384,32	175,47	2,54E+09	3437,50	1244,67
Ст'юдент (3)	1162,67	413,20	305,81	420,95	1909,04	1162,67
Ст'юдент (4)	708,95	339,75	204,23	436,01	2343,81	793,21
Лаплас	893,45	450,20	242,74	1071,95	2495,36	1088,10
Розподіл	Значення K КС-тесту					
Нормальний	2,3286	1,6200	1,7226	3,8686	4,0116	4,0116
Ст'юдент (3)	6,2429	3,1716	2,7170	2,8525	3,4381	3,4381
Ст'юдент (4)	3,9037	1,9526	1,6350	2,0939	1,0382	2,5238
Лаплас	3,1722	1,8820	1,8903	2,7183	1,7768	2,4476

Примітка. Тестові статистики, що є значимими на рівні 95 %, виділені жирним.

На відміну від щоденної дохідності, ми не можемо зробити висновок про неприйнятність нормального розподілу для моделювання щомісячної дохідності. Хоча з ймовірністю 95 % ми можемо відкинути гіпотезу про те, що фактична дохідність розподілена по будь-якому з розглянутих розподілів (а також має розподіл Ст'юдента з 6 чи 9 ступенями свободи), такої кричущої невідповідності нормальному розподілу вона не демонструє. Найкращім за тестом Пірсона став розподіл Ст'юдента з 4 ступенями свободи, а за КС-тестом — розподіл Лапласа.

Це пов'язано з тим, що розподіли періодичної дохідності мають менш великі хвости та є ближчими до нормального, навіть якщо щоденна дохідність розподілена по розподілу з великими хвостами. Проілюструємо це за допомогою методу Монте-Карло. Припустимо, що щоденна дохідність активу (точніше, її логарифм) розподілена по Стьюденту з 3 ступенями свободи. Згенеруємо велику вибірку щоденних дохідностей, потім розрахуємо по них щорічні дохідності, які є сумою 252 (за числом торгових днів у році) щоденних дохідностей. Різниця у розподілах щоденної та щорічної дохідності показана на рис. 2. Як можна побачити, розподіл останньої є значно ближчим до нормального. Для щомісячної дохідності різниця між фактичним і нормальним розподілом буде більшою, але тенденція наближення до нормального зберігається.

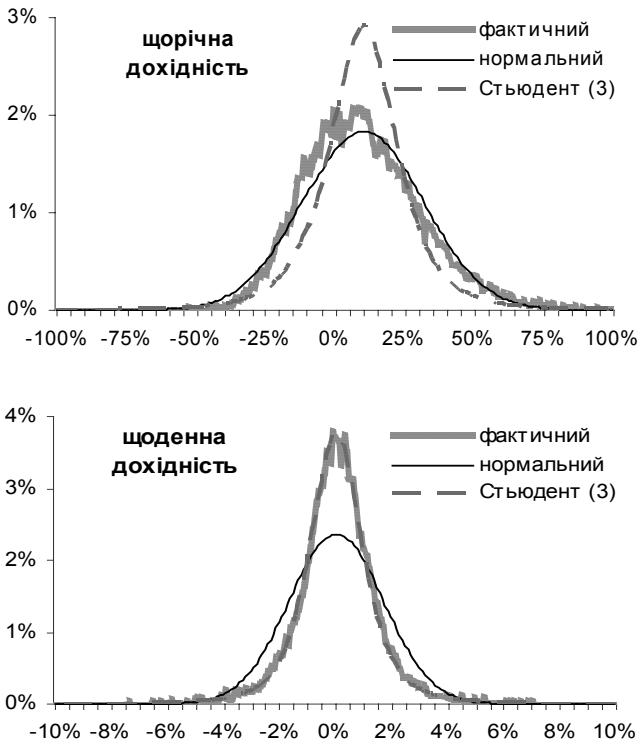


Рис. 2. Порівняння щільності розподілу щоденної та щорічної дохідності

Тести розподілу щоденної дохідності на ринку України

Для статистичних тестів розподілів щоденної дохідності на ринку України використана вибірка з 30 акцій на ринку заявок Української біржі та індексу цієї біржі. По кожному активу використана вибірка щоденної дохідності за період з 5 січня 2010 року по 29 лютого 2012 року. Вибіркові статистики та результати тестів наведені у табл. 4.

Таблиця 6

РЕЗУЛЬТАТИ ТЕСТІВ РОЗПОДІЛІВ ЩОДЕННОЇ ДОХІДНОСТІ НА РИНКУ УКРАЇНИ

Тікер	Індекс УБ	ALMK	BAVL	CEEN	DOEN	MSICH
Розмір вибірки	537	537	537	537	537	537
Середнє, %	-0,0027	-0,0661	-0,1270	-0,0239	-0,1163	0,0693
Ст. відхилення, %	2,3140	3,6538	2,7909	2,7287	3,1448	2,8494
Асиметрія	-0,2075	0,5511	0,0775	0,3253	0,2032	0,1228
Екссес	12,4223	12,4853	10,2336	8,7450	12,4880	11,9731
Розподіл	Значення χ^2 тесту Пірсона					
Нормальний	868,10	276,71	372,66	538,59	201,80	541,63
Ст'юдент (3)	219,07	207,92	225,41	302,19	178,13	248,65
Ст'юдент (4)	200,39	207,87	207,77	259,92	158,60	251,18
Лаплас	199,49	181,40	195,07	234,58	159,86	233,15
Розподіл	Значення K КС-тесту					
Нормальний	2,1962	2,8161	2,2772	1,9739	2,0190	2,8740
Ст'юдент (3)	0,6157	1,2769	0,4759	0,5135	0,6892	1,0990
Ст'юдент (4)	1,1455	1,7718	1,0953	0,7477	0,8558	1,7786
Лаплас	0,5646	0,8453	0,6995	0,4928	1,0253	1,1994

Таблиця 7

Тікер	STIR	UNAF	USCB	UTLM	ZAEN	медіана
Розмір вибірки	537	537	537	537	537	537
Середнє, %	-0,1058	0,1296	-0,1306	-0,0177	-0,0628	-0,0983
Ст. відхилення, %	3,4062	3,2516	3,1561	2,5545	3,8364	3,6538

Тікер	STIR	UNAF	USCB	UTLM	ZAEN	медіана
	Індекс УБ	ALMK	BAVL	CEEN	DOEN	MSICH
Асиметрія	0,1746	0,5217	0,1041	0,1379	1,2557	0,1379
Екссес	6,8379	13,7950	10,9536	10,3061	23,0321	11,9731
Розподіл	Значення χ^2 тесту Пірсона					
Нормальний	336,57	376,11	204,21	655,83	606,23	541,63
Стьюдент (3)	329,83	238,55	181,76	256,45	377,93	302,19
Стьюдент (4)	283,72	258,61	163,98	248,90	435,64	298,29
Лаплас	256,81	198,85	163,82	239,51	295,42	241,47
Розподіл	Значення K КС-тесту					
Нормальний	2,1268	3,2446	2,0778	2,5795	3,6020	2,9712
Стьюдент (3)	0,9831	1,5808	0,6477	0,6812	1,8032	1,4153
Стьюдент (4)	1,3130	2,1216	0,8734	1,3543	2,5110	1,9555
Лаплас	0,5438	1,2574	0,6525	0,9147	1,5408	1,2472

Примітка. Тестові статистики, що є значимими на рівні 95 %, виділені жирним.

На відміну від розподілу щоденної дохідності на ринку США, дохідність на ринку України краще моделюється за допомогою еліптичних розподілів. Також можна відзначити відсутність дуже великих хвостів фактичного розподілу та непогані тестові статистики у нормального розподілу. Хоча, на нашу думку, це є наслідком порівняно невеликих вибірок даних. Ще однією особливістю українського ринку є те, що у середньому ми не можемо з ймовірністю 95 % відкинути гіпотезу про те, що фактична дохідність розподілена за Лапласом. Отже, саме цей розподіл є найбільш прийнятним для моделювання динаміки українських акцій.

Висновки. Дослідження розподілу щоденної дохідності акцій та інших активів на фондовому ринку підтвердили наявність проблеми «товстих хвостів» та неприйнятність використання нормального розподілу для моделювання дохідності чи управління ризиками. Але, як показали статистичні тести Пірсона та Колмогорова-Смірнова, інші еліптичні розподіли, такі як розподіл Стьюдента з 3—4 ступенями свободи чи розподіл Лапласа, не мають таких значних недоліків, як нормальний. Їхнє використання є виправданим при моделюванні цінових

динаміки активів, в моделях оцінки деривативів та при управлінні ризиками.

Для моделювання щоденної дохідності 41 активу на фондовому ринку США, що були досліджені у статті, найкращими виявилися розподіли Стьюдента з 3 ступенями свободи та розподіл Лапласа. На ринку українських акцій розподіл Лапласа показав найліпші статистичні властивості, отже, ми навіть можемо прийняти гіпотезу про те, що фактична дохідність має цей розподіл.

На відміну від щоденної дохідності, періодична дохідність не виявила значних «товстих хвостів». Як показало Монте-Карло моделювання, навіть при наявності «товстих хвостів» у розподілі щоденної дохідності, розподіл періодичної дохідності наближається до нормального при збільшенні періоду. Так, на періоді 1 рік розподіл стає майже нормальним. На періоді 1 місяць краще за все показав себе розподіл Стьюдента з 4 ступенями свободи.

Література

1. *Талєб Н. Н.* Черный лебедь. Под знаком непредсказуемости. — М.: КоЛибри, 2009. — 528 с.
2. *Chamberlain G.* A characterization of the distributions that imply mean-variance utility functions // *Journal of Economic Theory*. — 1983. — Vol. 29, Issue 1. — P. 185—201.
3. *Owen J.* On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice / J. Owen, R. Rabinovitch // *The Journal of Finance*. — 1983. — Vol. 38, No. 3. — P. 745—752.
4. *Aparicio F.* Empirical Distributions of Stock Returns: Scandinavian Securities Markets, 1990-95 / F. Aparicio, J. Estrada // *European Journal of Finance*. — 2001. — No. 7. — P. 1–21.
5. *Adcock C. J.* Characterising Non-Normality In Asset Returns Using The Generalised Skew Student Distribution [Електронний ресурс] / C. J. Adcock, N. Meade // *Proceedings of European Financial Management Association 2007 Annual Meeting*. — Vienna, 2007. — Режим доступу до журн. : http://www.efmaefm.org/0EFMAMEETINGS/EFMA_ANNUAL_MEETINGS/2007-Vienna/Papers/0426.pdf.
6. *Kim Y. I.* The Skew-Student Distribution with Application to U.S. Stock Market Returns and the Equity Premium [Електронний ресурс] / Young Il Kim, J. Huston McCulloch // *17th Annual Meeting of the Midwest Econometrics Group*, St. Louis, MO, October 13, 2007. — Режим доступу до журн. : http://web.econ.ohio-state.edu/~ykim/Skew_t_Equity_premium.pdf.
7. *Linden M.* A model for stock return distribution // *International Journal of Finance & Economics*. — 2001. — No. 6. — P. 159–169.

Стаття надійшла до редакції 25.05.2012 р.