Література

1. *Kichel, W.* Sniping at Strategic Planning / Kichel W.: Planning Reviw,, 1994. — 168
2. *Walker, Orville C., jr.* Marketing strategy: planning and implementation / C. Walker Orville, jr., W. Boyd Harper, jr. — Boston: Massachusetts, 1997.
3. Kelly, Marketing Stategy and Functions, Prentice. — Hall, N.Y., 1965. — 466p.
4. *Волкова Л.* Стратегический анализ // http://m-arket.narod.ru/StrAn.html
5. Стратегический маркетинг / Под ред. А. Н. Берлакова, С. С. Голик, Т.И.Чаюн. — Винница, 1994.
6. *Портер М.* Воздействие конкуренции на форму стратегии / В кн.: Минцберг Г., Куинн Дж. Б., Гошал С. Стратегический процесс: концепции, проблемы, решения. — СПб.: Питер, 2001.
7. *Рудольф Грюниг.* Методы и средства стратегического планирования на фирме // Проблемы теории и практики управления. — 1993. — № 3.
8. Питер Дойль Маркетинг менеджмент и стратегии. — СПб.: Питер, 2007.
9. *Ламбен Ж. Ж.* Стратегический маркетинг. Европейская перспектива — СПб.: Наука. 1996. — 590 с.

Стаття надійшла до редакції 16.04.2013 р.

УДК 519.863:338.3

Ю. П. Тадеєв, к.е.н., доц., докторант,
КНУ імені Тараса Шевченка

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО ЕКОНОМІЧНОГО ЗРОСТАННЯ З ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОГРЕСОМ ТА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИМ КАПІТАЛОМ

АНОТАЦІЯ. У роботі на основі виробничої функції Кобба-Дугласа запропоновано модель економічного зростання, яка враховує капіталоінтенсивний технологічний прогрес та інтелектуальний капітал як адитивну частину людського ресурсу. Знайдено магістральну траєкторію та вивчено перехідну динаміку.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: модель економічного зростання, капіталоінтенсивний технологічний прогрес, інтелектуальний капітал, магістральна траєкторія, перехідна динаміка.

АННОТАЦИЯ. В работе на основании производственной функции Кобба-Дугласа предложена модель экономического роста, которая учитывает капиталоинтенсивный технологический прогресс и интеллектуальный капитал как адитивную часть трудового ресурса. Найдено магистральную траекторию и изучено переходную динамику.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: модель оптимального экономического роста, капиталоинтенсивный технологический прогресс, интеллектуальный капитал, магистральные траектории, переходная динамика.
ABSTRACT. The new model of optimal economic growth based on Cobb-Douglas production function which determines capital-intensive technological progress and intellectual capital as additive part of labor is proposed in the article. Turnpike trajectory is calculated. Transitional dynamics is examined.

KEYWORDS: optimal economic growth model, capital-intensive technological progress, intellectual capital, turnpike trajectories, transitional dynamics.

Вступ. При побудові та дослідженні багатьох актуальних задач економічного зростання широке застосування знайшли динамічні макроекономічні виробничі функції [1]. Зокрема, багато уваги приділяється моделям оптимального керування, що враховують інвестиції як у фізичний, так і в інтелектуальний капітал [2]. При цьому використовується двофакторна виробнича функція Кобба—Дугласа, що володіє властивістю повного заміщення ресурсів (фізичного капіталу K та людського капіталу L):

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},\ 0<\alpha<1,\ A = const. \quad (1)$$

Якщо прологарифмувати вираз (1) і продиференціювати одержане співвідношення за часом, то отримуємо запис виробничої функції (1) в темпах приросту:

$$\frac{Y}{Y} = \alpha\frac{K}{K} + (1-\alpha)\frac{L}{L},\ 0<\alpha<1. \quad (2)$$

Важливим питанням у теорії виробничих функцій є включення у виробничу функцію $Y = F(K, L)$ технологічного прогресу. Найпоширенішою є така класифікація про включення екзогенного технологічного прогресу [2]:

1. технологічна інновація є нейтральною за Хіксом, якщо

$$Y = T(t)F(K, L),$$

де $T(t)$ — індекс стану технологій, $T(t) \geq 0$;

2. технологічна інновація є нейтральною за Харродом, якщо

$$Y = F(K, L\cdot T(T)),$$

(праціеінтенсивний технологічний прогрес);

3. технологічна інновація є нейтральною за Солоу, якщо

$$Y = F(K, T(t), L),$$

(капіталоінтенсивний технологічний прогрес, причому $F(\cdot)$ — капіталоінтенсивна виробнича функція [2]).

Очевидно, що для виробничої функції Кобба—Дугласа будь-який екзогенний технологічний прогрес виявляється нейтральним за Хіксом.

Постановка завдання. Розглядається капіталоінтенсивна виробнича функція Кобба—Дугласа, у якій ресурсами є фізичний капітал із заданим екзогенним технологічним прогресом і людський капітал, що адитивно включає інтелектуальний капітал, який збільшує цей ресурс

$$Y = A(KT(t))^{\alpha}(L + H(t))^{1-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1, \ A = const. \qquad (3)$$

У моделі виробничої функції (3) K — фізичний капітал, $T(t) > 0, T(t) > 0$ — екзогенний технологічний прогрес, $L + H(t)$ — людський капітал, L — праця, $H(t)$ — інтелектуальний капітал, що в даному випадку є ендогенним і вимірюється додатковими одиницями робочої сили. Такий підхід адитивного врахування інтелектуального капіталу є новим і не зустрічається в загальновідомих класичних роботах, де він враховується лише мультиплікативно [2].

Випуск продукції використовується для споживання, для інвестування у фізичний і для інвестування в інтелектуальний капітали. Припускається, що обсяги фізичного та інтелектуального капіталів амортизуються та вибувають із одним і тим же темпом δ. Таке обмеження на перший погляд є дуже суттєвим, але в рівноважній збалансованій економіці заміна та встановлення нового устаткування, як правило, прямо пов'язані з технологічним прогресом і освоєння цієї нової техніки потребує проведення науково-дослідних робіт і відповідного перенавчання персоналу.

Ресурсне обмеження економіки має вигляд

$$Y = C + I_K + I_H, \ C \geq 0, \ I_K \geq 0, \ I_H \geq 0, \qquad (4)$$

де C — споживання, I_K та I_H — валове інвестування у фізичний та інтелектуальний капітали відповідно. Зміни в двох видах капіталів описуються диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} K &= I_K - \delta K, \ K(0) = K_0 \\ K &= I_H - \delta H, \ H(0) = H_0 \end{aligned}. \qquad (5)$$

Праця L зростає з відомим сталим темпом:

$$L(t) = L_0 e^{nt}, \ n > 0 . \tag{6}$$

Індекс стану технології також зростає з відомим сталим темпом

$$T(t) = e^{st}, \ s > 0 . \tag{7}$$

Виробничу функцію (1) запишемо у такій формі

$$Y = e^{st} A K^{\alpha} E^{1-\alpha} , \tag{8}$$

де

$$L^1 = L_0 e^{nt} + H , \tag{9}$$

— ефективний людський капітал.

Очевидно, що для виробничої функції (8) виконуються всі умови неокласичної виробничої функції, зокрема і умови Інади, які в нашому випадку набувають такого вигляду [3]:

$$\lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial \hat{K}} = \lim_{K\to 0}\frac{\partial F}{\partial \hat{L}} = \infty; \ \lim_{K\to \infty}\frac{\partial F}{\partial \hat{K}} = \lim_{K\to \infty}\frac{\partial F}{\partial \hat{L}} = 0 . \tag{10}$$

Вважаємо, що домогосподарства максимізують інтегральну функцію корисності [2]

$$U = \int_0^{\infty} u(C(t)) e^{-\rho t} dt, \ \rho > 0 , \tag{11}$$

де

$$u(C) = \frac{e^{1-\theta} - 1}{1\text{-}\theta}, \ \theta > 0 , \tag{12}$$

— функція корисності зі сталою міжчасовою еластичністю заміщення

$$\sigma = \frac{u'(C)}{u''(C)} = \frac{1}{\theta} . \tag{13}$$

Припускаємо, що числові параметри моделі такі, що забезпечують збіжність невласного інтегралу (11).

Результати дослідження. Задачу оптимального керування (4)—(13) будемо розв'язувати використовуючи принцип максимуму Понтрягіна [4]. Для цього побудуємо гамільтоніан

$$J = u(C) e^{-\rho t} + \mu(I_K - \delta K) + \nu(I_H - \delta H) + \omega(Y(K, \hat{L}) - C - I_K - I_H), \tag{14}$$

де μ і ν — тіньові ціни, пов'язані з K і H відповідно, а ω — множник Лагранжа, пов'язаний з рівнянням (4). Відмітимо насамперед, що обмеження невід'ємності валових інвестицій $I_K \geq 0,\ I_H \geq 0$ ми, поки-що, не враховуємо.

Необхідні умови оптимальності (умови першого порядку) мають вигляд:

$$\frac{\partial J}{\partial C} = 0 \ \Rightarrow\ u'(C)e^{-\rho t} = \omega,$$

$$\frac{\partial J}{\partial_K} = 0 \ \Rightarrow\ \mu = \omega,$$

$$\frac{\partial J}{\partial I_H} = 0 \ \Rightarrow\ \nu = \omega,$$

$$\mu = \frac{\partial J}{\partial K} \ \Rightarrow\ \mu = \mu\delta - \omega\frac{\partial Y}{\partial K},$$

$$\nu = \frac{\partial J}{\partial H} \ \Rightarrow\ \nu = \nu\delta - \omega\frac{\partial Y}{\partial H}.$$

Звідси отримуємо $\mu = \nu = \omega$, звідки випливає, що

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial H}. \tag{15}$$

Із співвідношення (12) та виразу для змінної ω отримуємо

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\theta\frac{\dot{C}}{C} - \rho, \tag{16}$$

звідки одержуємо співвідношення для темпу приросту споживання

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(-\frac{\dot{\omega}}{\omega} - \rho\right) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y}{\partial K} - \delta - \rho\right) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial F}{\partial H} - \delta - \rho\right). \tag{17}$$

Введемо допоміжну змінну (відношення капіталів)

$$z := \frac{\hat{L}}{K} = \frac{L + H}{K} \tag{18}$$

і розглянемо співвідношення (15) як рівняння відносно змінної z.

Маємо

$$\frac{\partial Y}{\partial K}=\alpha e^{\alpha st}AK^{\alpha-1}(L+H)^{1-\alpha},\ \frac{\partial Y}{\partial H}=(1-\alpha)e^{\alpha st}AK^{\alpha}(L+H)^{-\alpha}.$$

Після підстановки цих виразів у (15) одержуємо шуканий корінь

$$z^{*}=\frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{19}$$

Рівність z = z представляє умову рівності чистого граничного продукту фізичного капіталу та чистого граничного продукту інтелектуального капіталу

$$\frac{\partial Y^{*}}{\partial K}-\partial=\frac{\partial Y^{*}}{\partial H}-\delta.$$

З цього випливає, що при $z=z^{*}$ чиста норма дохідності фізичного та інтелектуального капіталів рівні

$$r^{*}=\frac{\partial Y^{*}}{\partial K}-\partial=\frac{\partial Y^{*}}{\partial H}-\delta. \tag{20}$$

Якщо відношення $\frac{L+H}{K}$ є сталим, то з рівняння (17) знаходимо співвідношення для темпу приросту споживання

$$\frac{\dot{C}}{C}=\gamma^{*}\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y^{*}}{\partial K}-\delta-\rho\right)=\frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial Y^{*}}{\partial H}-\delta-\rho\right). \tag{21}$$

При цьому припускається, що параметри моделі такі, що $\gamma^{*}>0$.

Для того, щоб показати як наша модель відповідає загальноприйнятій класифікації моделей [2], підставимо вираз (19) у виробничу функцію (8) та одержимо

$$Y=e^{\alpha st}AK\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1-\alpha}, \tag{22}$$

тобто ми бачимо, що ця модель еквівалентна *AK*-моделі з нейтральним технологічним прогресом. Тому для подальшого аналізу нашої моделі ми можемо застосувати методи аналізу *AK*-моделі. При цьому темп приросту споживання визначається з рівності (21) і набуває вигляду

$$\gamma^* = \frac{1}{\theta}\left(e^{\alpha st} A\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha} - \delta - \rho\right). \qquad (23)$$

Розглянемо тепер питання про врахування в нашій моделі ще додаткового обмеження невід'ємності валового інвестування $I_K \geq 0,\ I_H \geq 0$.

Припустимо, що економіка стартує з двома обсягами капіталів $K(0)$ та $H(0)$ при початковому значенні простої праці $L(0)$. Якщо відношення $\frac{L(0)+H(0)}{K(0)}$ відхиляється від значення $\frac{1-\alpha}{\alpha}$, знайденого з рівняння (19), то оптимальний розв'язок диктує необхідність дискретного стрибка в цих двох обсягах так, щоб миттєво було досягнуто значення *z**. Для цього необхідно, щоб збільшення одного з цих об'ємів супроводжувалося зменшенням іншого рівно на таку ж величину, так щоб сума *K* + *H* миттєво не змінилась.

Таким чином, основні труднощі полягають у тому, що вони залежать від можливості нескінченної додатної норми інвестування в один вид капіталу та нескінченної від'ємної норми інвестування в інший вид. Іншими словами, ми повинні припустити, що інвестиції зворотні, так, що старі одиниці фізичного капіталу можуть бути конвертовані в інтелектуальний капітал і навпаки. Але це припущення не реалістичне. Інвестори можуть вибирати, куди інвестувати: в інтелектуальний капітал чи у фізичний, але якщо рішення прийняте, то воно незворотне. Математично ці умови незворотності набувають вигляду обмежень-нерівностей $I_K \geq 0$ та $I_H \geq 0$. Іншими словами, не можна деінвестувати фізичний чи інтелектуальний капітал. Можна зробити вибір не інвестувати взагалі в один із видів капіталу, тобто можна покласти $I_K = 0$, що приведе до неперервного зниження *K* з темпом $\frac{\dot{K}}{K} = -\delta$, але вивести засоби з *K* неможливо.

Якщо $\frac{L(0)+H(0)}{K(0)} < \frac{\alpha-1}{\alpha}$, тобто якщо *K* на початку є в надлишку відносно *L* + *H*, то оптимальний розв'язок диктує зменшення

K і приріст H у нульовий момент часу. Бажання зменшити K на дискретну величину приводить до того, що нерівність $I_K \geq 0,$ стає зв'язуючою у нульовий момент часу (і протягом деякого скінченного інтервалу часу надалі). Коли ця нерівність зв'язує, домогосподарство обирає $I_K = 0$, отже, темп приросту K задається рівнянням $\frac{\dot{K}}{K} = -\delta$, так, що траєкторія K визначається співвідношенням

$$K(t) = K(0)e^{-\delta t}, \ t \geq 0. \tag{24}$$

Економічні агенти розуміють, що у них у наявності надлишок K відносно $L + H$, але завдяки неможливості від'ємного інвестування в K їм потрібно чекати, доки K скорочується за рахунок вибуття з екзогенно заданим темпом δ.

Якщо $I_K = 0$, то оптимізаційна задача поведінки домогосподарства може бути записана у вигляді спрощеного гамільтоніану

$$J = u(C)e^{-\rho t} + v\left(e^{\alpha(S-\delta)t} AK_0^{\alpha}\left(L_0 e^{nt} + H\right)^{1-\alpha}\right) - C - \delta H. \tag{25}$$

Отже, дана модель еквівалентна стандартній неокласичній моделі зростання, в якій домогосподарства вибирають між споживанням та інвестуванням в один вид капіталу H при наявності екзогенного технологічного прогресу, який збільшує інтенсивність використання іншого ресурсу, в даному випадку K. У стандартній моделі цей інший ресурс, фізичний капітал, зростає зі сталим темпом, у той час, як в нашій моделі ресурс K зростає з від'ємним темпом $-\delta$.

Необхідні умови оптимальності (умови першого порядку) для моделі (25) дають

$$\frac{\partial J}{\partial C} = 0 \ \Rightarrow \ \nu = u'(C)e^{-\rho t},$$

$$\dot{\nu} = -\frac{\partial J}{\partial H} \ \Rightarrow \ \dot{\nu} = -\nu\left(e^{\alpha(s-\delta)t} AK_0^{\alpha}(1-\alpha)\left(L_0 e^{nt} + H\right)^{-\alpha} - \delta\right).$$

Із співвідношення (12) та виразу для змінної ν одержуємо

$$\frac{\dot{\nu}}{\nu} = -\theta\frac{\dot{C}}{C} - \rho.$$

Отже,

$$\frac{\dot{C}}{C}=\frac{1}{\theta}\Big[e^{\alpha(s-\delta)t}AK_0^{\alpha}(1-\alpha)\big(L_0e^{nt}+H\big)^{-\alpha}-\delta-\rho\Big]. \tag{26}$$

Рівняння (26) і бюджетне обмеження

$$\dot{H}=e^{\alpha(s-\delta)t}AK_0^{\alpha}\big(L_0e^{nt}+H\big)^{1-\alpha}-\delta H-C \tag{27}$$

разом з рівнянням (24) визначають перехідні траєкторії *C*, *H* і *K*. Момент виходу перехідних траєкторій на магістраль є моментом часу, коли відношення $\frac{L(t)+H(t)}{K(t)}$ досягає значення $\frac{1-\alpha}{\alpha}$.

Аналогічні результати отримуються і у випадку, коли економіка починає розвиватись в умовах відносного надлишку інтелектуального капіталу

$$\frac{L(0)+H(0)}{K(0)}>\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

У цьому випадку обмеження $I_H\geq 0$ є зв'язуючи. Отже, $I_H=0$ і *H* зростає з від'ємним темпом $-\delta$. Тоді оптимізаційна задача домогосподарства може бути записана у вигляді такого спрощеного гамільтоніану

$$J=u(C)e^{-\rho t}+\mu\Big(e^{\alpha st}AK^{\alpha}\big(L_0e^{nt}+H_0e^{-\delta t}\big)^{1-\alpha}-C-\delta K\Big). \tag{28}$$

Вибір *C* і *K* у такому випадку визначається умовами звичайної неокласичної моделі, за виключенням того, що інвестиції тут направляються в K, а не в *H*. Зменшення *H* з темпом $-\delta$ і зростання K викликають зниження $\frac{L+H}{K}$ з часом.

Необхідні умови оптимальності (умови першого порядку) для моделі (28) дають

$$\frac{\partial J}{\partial C}=0\ \Rightarrow\ \mu=u'(C)e^{-\rho t},$$

$$\mu=-\frac{\partial J}{\partial H}\ \Rightarrow\ \mu=-\mu\Big(e^{\alpha st}AK^{\alpha-1}\big(L_0e^{nt}+H_0e^{nt-\delta t}\big)^{1-\alpha}-\delta\Big).$$

Із співвідношення (12) та виразу для змінної μ одержуємо

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = -\theta\frac{\dot{C}}{C} - \rho .$$

Отже,

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\theta}\left(e^{\alpha st} A K^{\alpha-1} \left(L_0 e^{nt} + H_0 e^{nt-\delta t} \right)^{1-\alpha} - \delta - \rho \right). \tag{29}$$

Рівняння (29) та бюджетне обмеження

$$H = e^{\alpha st} A K^{\alpha} \left(L_0 e^{nt} + H_0 e^{nt-\delta t} \right)^{1-\alpha} - \delta K - C \tag{30}$$

разом з рівнянням $H(t) = H_0 e^{-\delta t}$ визначають перехідні траєкторії C, K і H. Момент виходу перехідних траєкторій на магістраль визначається як час, коли відношення $\frac{L(t)+H(t)}{K(t)}$ стає рівним величині $\frac{1-\alpha}{\alpha}$.

Висновки. Таким чином, у роботі побудовано та досліджено нову модель економічного зростання, яка враховує екзогенний технологічний прогрес та інтелектуальний капітал. Використано виробничу функцію Кобба—Дугласа та функцію корисності зі сталою міжчасовою еластичністю заміщення. Знайдено магістральну траєкторію та проаналізовано перехідну динаміку.

Література

1. *Пономаренко О. І.* Сучасний економічний аналіз: У 2 ч. Ч. 2. Макроекономіка: [навч. посібник] / О. І Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. — К.: Вища школа, 2004. — 207 с.

2. *Барро Дж.* Экономический рост / Р. Дж. Барро, Х. Сала-и-Мартин: [пер. с англ.] — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. — 824 с.

3. *Inada K.* On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization // Review of Economic Studies. — 1963. — Vol. 30. — № 2. — P. 119—127.

4. *Григорків В. С.* Оптимальне керування в економіці: [навч. посібник] / В. С. Григорків. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. — 200 с.

Стаття надійшла до редакції 12.04.2013 р.