

**Лісовська В.П.**, к.ф.-м.н., професор кафедри вищої математики  
**Островська М.С.**, асистент кафедри вищої математики  
ДВНЗ «КНЕУ ім. Вадима Гетьмана»

**Valentina Lisovska**, Candidate of physics and mathematics, Associate Professor, Faculty of Marketing Faculty Advanced Mathematics Department, Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman  
**Mariya Ostrovska**, assistant of Marketing Faculty Advanced Mathematics Department, Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman

## МОДЕЛЮВАННЯ ЗБУТУ ПІДПРИЄМСТВА ЗАЛЕЖНО ВІД ДІЇ РЕКЛАМИ

## MODELING OF THE ENTERPRISE STOCK IN DEPENDENCE OF ADVERTISING

*АНОТАЦІЯ. У статті розглянуто моделювання збуту підприємства залежно від дії реклами за допомогою рядів Фур'є.*

*КЛЮЧОВІ СЛОВА: ряд Фур'є, функція рекламних відгуків, теорема Діріхле, парна функція, непарна функція.*

*АННОТАЦИЯ. В статье рассмотрено моделирование сбыта предприятия в зависимости от действия рекламы с помощью рядов Фурье.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ряд Фурье, функция рекламных отзывов, теорема Дирихле, чётная функция, нечётная функция.*

*ANNOTATION. The article deals with the modeling of the company's sales, depending on the effect of advertising with the help of Fourier series.*

*KEYWORDS: Fourier series, the function of advertising reviews, the Dirichlet theorem, a pair function, an odd function.*

**Вступ.** Реклама продукції підприємства — форма пропозиції товарів і послуг з метою вплинути певним чином на цільову аудиторію споживачів продукції підприємства. За допомогою реклами формується визначене уявлення покупця про особливості товару чи послуг, тобто реклама доводиться до максимально великої цільової аудиторії або зосереджується на невеликому її сегменті. Таким чином, реклама є ядром процесу рекламної дії на споживача продукції підприємства.

**Мета статті.** У даній роботі розглянуто прикладне значення розкладу ряду Фур'є для функції рекламних відгуків. Надано економічну інтерпретацію періодичної функції рекламних відгуків підприємства з періодом  $T=4$  і досліджено зміну графіків періодичної функції залежно від кількості членів ряду Фур'є. У роботах вітчизняних учених (Гаркавенко С.С., Загорулько В.М., Крилов І.В.,

Лук'янець Т.І., Ромат Є.В., Старостіна А.А., Щелкунов В.І. та ін.), а також зарубіжних учених (Аакер Д., БарнетДж., Котлер Ф., Літл Ж., Ліндон Д., Моріарті С., Персі Л., Уелс У. та ін.) досліджується проблематика реклами та відповідно реакції збуту продукції на неї на підприємстві. У роботі [1] розглядається прибуток підприємства і досліджується вплив реклами на нього з урахуванням збуту, вводиться поняття функції рекламних відгуків. У роботі [2] розглядаються вплив рекламних звернень стосовно великих і малих підприємств, що порівнюються в процесі формалізованої задачі постійного збуту. У роботі [3] представлено модель, де функцію витрат представлено експонентою, в якій враховуються ефекти ціноутворення. У роботі [4] представлено дискретну модель двох підприємств-конкурентів у полі ринкових відносин, моделюється функція відгуку на рекламні звернення.

**Виклад основного матеріалу.** Як правило, концентроване розміщення рекламних звернень є доцільним для реклами виробів, строк реалізації яких обмежений одним сезоном. Неперервне розміщення рекламних звернень є рівномірним їх розміщенням протягом деякого часу й характеризується значними витратами, а також сезонними коливаннями. Таке розміщення характерне для розширення ринку, а також для привернення уваги більшої, ніж цільової аудиторії покупців. Періодичне розміщення рекламних звернень, за яким слідує пауза, а потім звернення повторюється, – використовується при обмеженому рекламному бюджеті, відносно нечастому циклі покупок і в рекламі сезонних виробів. Пульсуюче розміщення рекламних звернень – це комбінована стратегія і містить в собі особливості неперервних і періодичних рекламних звернень, що дозволяє аудиторії повніше сприймати рекламне звернення, що в кінцевому результаті означає економію рекламного бюджету.

Після проведення рекламних звернень вивчається реакція збуту підприємства, яка, як правило, має вигляд періодичної розривної (розрив 1-го роду стрибок) функції. Для моделювання функцій збуту підприємства необхідно розкласти в ряд Фур'є функцію рекламних відгуків підприємства, яка, як правило, має періодичний характер.

Рядом Фур'є періодичної функції  $f(x)$  з періодом  $2\pi$ , визначеної на відрізьку  $[-\pi; \pi]$ , називається ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin x), \quad (1)$$

де

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Якщо ряд (1) збігається, то його сума  $S(x)$  – періодична функція з періодом  $2\pi$ , тобто  $S(x + 2\pi) = S(x)$ .

**Теорема Діріхле.** Нехай функція  $f(x)$  на сегменті  $[-\pi; \pi]$  має кінцеве число екстремумів і є неперервною за винятком кінцевого числа точок розриву 1-го роду (тобто задовольняє так звані умови Діріхле). Тоді ряд Фур'є цієї функції збігається в кожній точці сегмента  $[-\pi; \pi]$  і сума цього ряду обчислюється:

1)  $S(x) = f(x)$  у всіх точках  $f(x)$ , що лежать всередині сегмента;  $[-\pi; \pi]$ ;

2)  $S(x_0) = \frac{1}{2} [f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ , де  $x_0$  – точка розриву 1-го роду функції  $f(x)$ ;

3)  $S(x) = \frac{1}{2} [f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)]$  на кінцях відрізка, тобто при  $x = \pm\pi$ .

У разі, коли  $f(x)$  – парна функція, її ряд Фур'є містить тільки вільний член і косинуси, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (4)$$

де

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5)$$

У разі, коли  $f(x)$  – непарна функція, її ряд містить тільки синуси, тобто

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (6)$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx . \quad (7)$$

Часто доводиться розкласти в тригонометричний ряд функції періоду, відмінного від  $2\pi$ . У цьому випадку, якщо  $f(x)$  – періодична функція з періодом  $2l$ , для якої на сегменті  $[-l; l]$  виконуються умови Діріхле, то зазначена функція може бути представлена у вигляді суми ряду Фур’є:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (8)$$

де

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx , \quad (9)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx . \quad (10)$$

У разі, коли  $f(x)$  – парна функція, як (4) – (5), її ряд Фур’є містить тільки вільний член і косинуси, тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} dx , \quad (11)$$

де

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx . \quad (12)$$

У разі, коли  $f(x)$  – непарна функція, її ряд Фур’є містить тільки синуси, тобто

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} dx , \quad (13)$$

де

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx . \quad (14)$$

На рис. 1 зображено графік періодичної функції рекламних відгуків підприємства з періодом  $T=4$ :

$$f(x) = \begin{cases} 6, & 0 < x < 2, \\ 3x, & 2 < x < 4. \end{cases} \quad (15)$$

Економічну інтерпретацію періодичної функції рекламних відгуків підприємства з періодом  $T=4$  можна представити таким чином: від 0 до 2 збут стоїть на базовому рівні, у цей же час дається рекламне звернення, потім на інтервалі від 2 до 4 проходить реакція збуту на рекламне звернення – рекламний відгук у вигляді зростання збуту, потім збут знову опускається до базового рівня. На рис.1 представлено графік періодичної функції рекламних відгуків підприємства з періодом  $T=4$ , що задається у вигляді формули (8).

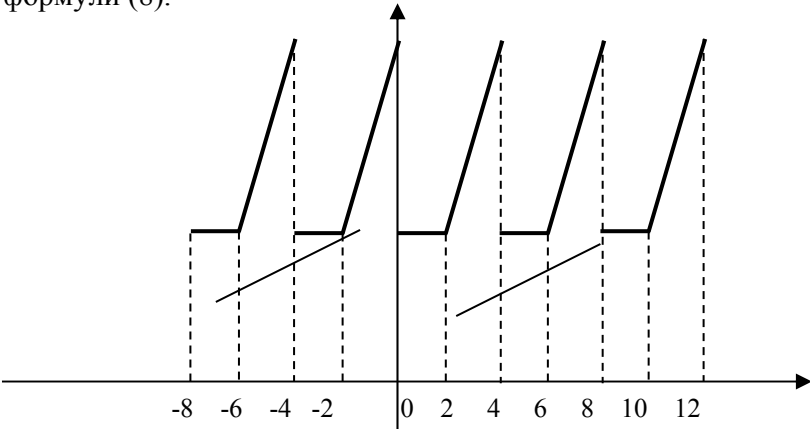


Рис. 1. Графік періодичної функції рекламних відгуків підприємства з періодом  $T=4$

За формулами (1), для  $l = 2$ , розбиваємо інтервал інтегрування точкою  $x = 2$  на дві частини, знаходимо коефіцієнти  $a_n$ :

$$a_n = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^2 6 \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_2^4 3x \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{12}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left( \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] = \frac{6}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi), n \neq 0.$$

При  $n$  – парному  $\cos n\pi = 1$  і  $x_n = 0$ , при  $n$  – непарному  $\cos n\pi = -1$  і  $a_n = \frac{12}{\pi^2 n^2}$ .

При  $n=0$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^2 6 dx + \int_2^4 3x dx \right) = \frac{1}{2} (6x \Big|_0^2 + \frac{3x^2}{2} \Big|_2^4) = 15.$$

Знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є  $b_n$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^2 6 \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_2^4 3x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{12}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + 3 \left( \frac{4}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} - \frac{2x}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \right) \Big|_2^4 \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi n} 12 \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 + \frac{3}{2} \left[ \frac{2x}{\pi n} (-\cos \frac{n\pi x}{2}) \Big|_2^4 + \int_2^4 \frac{2}{\pi n} \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi n} [12(1 - \cos n\pi) - 3(2 \cdot 4 \cos 2\pi n - 4 \cos \pi n)] = \\ &= \frac{1}{2\pi n} [12 - 12 \cos n\pi - 24 + 12 \cos \pi n] = \frac{-12}{2\pi n} = -\frac{6}{\pi n}. \end{aligned}$$

Таким чином розклад у ряд Фур'є заданої функції має вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) - \\ &\quad - \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Цей розклад справедливий у всій області визначення даної функції: в інтервалі  $(0;2)$  сума ряду  $S(x)=6$ , в інтервалі  $(2;4)$  –  $S(x)=3x$ . У точці розриву  $x = 2$ ,

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(2-0) + f(2+0)] = 6.$$

Побудуємо графіки у WolframAlpha, візьмемо по 2 члени ряду.  
 У табл. 1 представлено функцію  $f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} \right) - \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} \right)$  ряду Фур'є для обчислення у WolframAlpha.

Таблиця 1

**ВИГЛЯД ФУНКЦІЇ РЯДУ ФУР'Є**

plot	$\frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left( \cos\left(\pi \times \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{9} \cos\left(3\pi \times \frac{x}{2}\right) \right) - \frac{6}{\pi} \left( \sin\left(\pi \times \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin(\pi x) \right)$	$x = 0 \text{ to } 8$
------	--	-----------------------

На рис. 2 представлено графік функції з табл. 1, який неперервно моделює графік періодичної функції рекламних відгуків підприємства з періодом  $T=4$ .

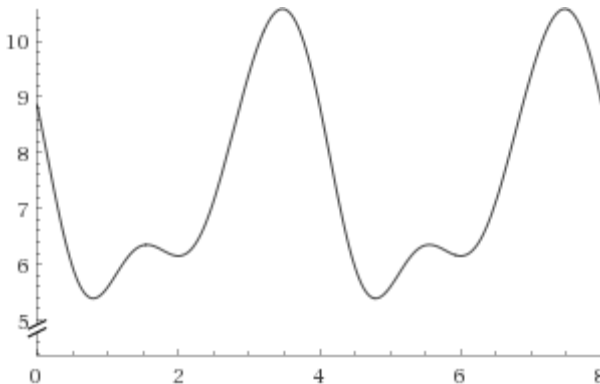


Рис. 2. Графік функції з табл. 1

Можна обчислити довжину дуги кривої, що представлена на рис. 2:

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \frac{\left( 3\pi \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 3\pi \cos(\pi x) + 6\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 2\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right)^2}{\pi^2}} dx \approx 23.982409 \dots$$

Побудуємо графіки у WolframAlpha, візьмемо по 3 члени ряду. У табл. 2 представлено функцію

$$f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \cos \frac{5\pi x}{2} \right) - \frac{6}{\pi} \left( \sin \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{2} \right)$$

ряду Фур'є для обчислення у WolframAlpha.

Таблиця 2

**ВИГЛЯД ФУНКЦІЇ РЯДУ ФУР'Є**

plot	$\frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left( \cos\left(\pi \times \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{9} \cos\left(3\pi \times \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{25} \cos\left(5\pi \times \frac{x}{2}\right) \right) - \frac{6}{\pi} \left( \sin\left(\pi \times \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin(\pi x) + \frac{1}{3} \sin\left(3\pi \times \frac{x}{2}\right) \right)$	x = 0 to 8
------	---	------------

На рис. 3 представлено графік функції з табл. 2, який неперервно моделює графік періодичної функції рекламних відгуків підприємства з періодом  $T=4$  з кращим наближенням.

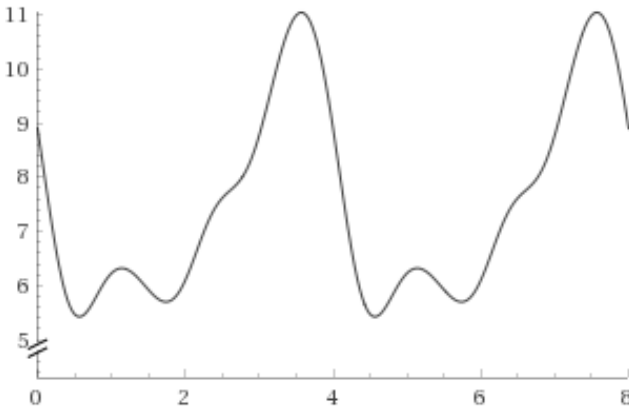


Рис. 3. Графік функції з табл. 2

Можна обчислити довжину дуги кривої, що представлена на рис. 3:

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \frac{1}{25\pi^2} (A + B + C)^2} dx,$$



де

$$A = 15\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 15\pi \cos(\pi x),$$

$$B = 15\pi \cdot \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + 30 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

$$C = 10 \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + 6 \sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right),$$

Аналізуючи графіки на рис. 2 і 3, зробимо висновок, що можна покращувати наближення, вибираючи більше членів ряду.

Висновки. Отже, розклад функції дає можливість розвитку моделювання рекламних звернень підприємства, як реакції збуту — прояву короткострокового поточного ефекту від рекламних звернень підприємства.

### ***Література***

1. Rust R. T. Advertising Media Models: A Practical Guide. Lexington, Mass: Lexington Books, 1986. Формула (3.19).
2. Kuehn A.A., McGuire T.W., and Weiss D.L., Measuring the effectiveness of advertising, 185-94 in R.M. Haas, ed., Science, Technology and Marketing, American Marketing Association, Chicago, 1966.
3. Horsky D., Anempirical analysis of the optimal advertising policy // Management Science, 23, 1037-49, June 1977.
4. Kirmani A. Advertising repetition as a signal of quality: if it's advertised so much, something must be wrong // Journal of advertising. Fall. 1997.
5. Law S., Howkins S.A. Advertising Repetition and Consumer Beliefs: The Role of Source Memory // Measuring advertising effectiveness. — London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1997.