26. Cherniak O.I. Nechitkyj pidkhid do otsiniuvannia rivnia informatsijnykh ryzykiv u CRM-systemakh /O.I. Cherniak, D.O. Sikors'kyj // Nejronno-nechitki tekhnolohii modeliuvannia v ekonomitsi. Naukovo-analitychnyj zhurnal. — K.: KNEU, 2016. — №5 — S. 199–232.
27. Chornous H.O. Proaktyvne upravlinnia sotsial'no-ekonomichnymy systemamy na osnovi intelektual'noho analizu danykh: metodolohiia i modeli: monohrafiia / H.O Chornous. — K.: Vydavnycho-polihrafichnyj tsentr «Kyivs'kyj universytet», 2014. — 351 s.
28. Ekonomyko-matematycheskyj entsyklopedycheskyj slovar' / hl. red. V.Y. Danylov-Danyl'ian. — M.: Izd. Dom «YNFA-M», 2003. — 688 s.
29. Atre S. Real-Time Analysis and Data Integration for BI / S. Atre, D. Malhotra/ — http:www.dmreview.com/issues/20040201/8034-1.html.
30. Data mining and knowledge discovery handbook / O. Maimon, L. Rokach (eds.). — N.Y.: Springer, 2005. — XXXV. — 1383 p.

УДК 519.866

Бойчук М. В., к.ф.-м.н., доцент
кафедри економіко-математичного моделювання
Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
Маханець Л. Л., к.е.н., доцент
кафедри економіко-математичного моделювання,
Чернівецький національний університет ім.Ю. Федьковича

Boychuk M. V., Assoc. Prof., PhD,
Economic Modeling and Business Informatics Department,
Chernivtsi National University,
Makhanets L. L., Assoc. Prof., PhD,
Economic Modeling and Business Informatics Department,
Chernivtsi National University

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ ІНВЕСТИЦІЙ У БАГАТОСЕКТОРНІЙ ЕКОНОМІЦІ

STOCHASTIC MODEL OF OPTIMAL INVESTMENT DISTRIBUTION IN A MULTISECTORAL ECONOMY

АНОТАЦІЯ. У статті запропоновано стохастичну модель оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці та проведено її дослідження з використанням стохастичних достатніх умов оптимальності. Встановлено, що для стохастичної моделі оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці оптимальні керування за інвестиціями та момент перемикання керування є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнтів при приростах вінерівських процесів у рівняннях динамік капіталів, а оптимальні траєкторії за капіталами — стохастичними (випадковими) функціями. Також наво-

дяться довірчі інтервали за заданою ймовірністю для оптимальних траєкторій за капіталами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: інвестиції, багатосекторна економіка, стохастична модель, оптимальне керування, оптимальна траєкторія за капіталом, момент перемикання керування.

АННОТАЦИЯ. В статье предложено стохастическую модель оптимального распределения инвестиций в многосекторной экономике и проведено ее исследование с использованием стохастических достаточных условий оптимальности. Установлено, что для стохастической модели оптимального распределения инвестиций в многосекторной экономике оптимальные управления по инвестициям и момент переключения управления являются детерминированными величинами, а не зависят от коэффициентов при приростах винеровских процессов в уравнениях динамик капиталов, а оптимальные траектории за капиталами — стохастическими (случайными) функциями. Также приводятся доверительные интервалы с заданной вероятностью для оптимальных траекторий за капиталами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: инвестиции, многосекторные экономика, стохастическая модель, оптимальное управление, оптимальная траектория по капиталу, момент переключения управления.

SUMMARY. The stochastic model of the optimal distribution of investments in a multi-sector economy is proposed in the paper. The model was investigated using stochastic sufficient conditions for optimality. It is established that optimal investment management and the shift point of control are deterministic values for the stochastic model of the optimal investments allocation in a multi-sectoral economy. They do not depend on the Wiener processes growth coefficients in the capital dynamics equations. It is shown the optimal capital trajectories are stochastic (random) functions. Confidence intervals are given for optimal capital trajectories.

KEYWORDS: investment, multi-sectoral economy, stochastic model, optimal control, optimal capital trajectory, control shift point.

Вступ. Неврахування деяких економічних показників у математичних моделях, невизначеність у економічних ситуаціях: параметрах, коефіцієнтах, початкових умовах та інші причини приводять до стохастичного моделювання.

Аналіз літературних джерел. На сьогодення стохастичне моделювання розвивається в двох напрямках.

Перший напрямок формують дослідження стохастичних динамічних систем, у яких проводиться зведення апріорної невизначеності до параметричної, коли ймовірнісні закони розподілу для досліджуваних ситуацій, величин і спостережуваних процесів відомі з точністю до скінченного числа параметрів, тобто коли відомі випадкові розподіли реалізації невідомих параметрів і початкових умов.

Дослідження стохастичних динамічних систем при неточній вхідній інформації про початкові умови і параметри проводились у роботах [1–3] та інших. У них одержані стохастичні необхідні умови оптимальності та формули для градієнтів функціоналів у просторах оптимізованих параметрів, які дозволяють для розв'язання динамічних задач оптимізації використовувати числові методи скінченної оптимізації.

До *другого напрямку* відносяться дослідження динамічних систем, у детерміновані математичні моделі вводяться випадкові процеси: вінерівські, пуассонівські та інші. При цьому дослідження оптимізаційних стохастичних динамічних систем проводиться з використанням достатніх умов оптимальності без обмежень на стани системи [4–6]. Крім того, у роботі [6] проведено економічне обґрунтування використання вінерівських і пуассонівських процесів при стохастичному моделюванні оптимальних динамічних систем.

Постановка завдання. Запропонувати стохастичну модель оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці та провести її дослідження з використанням стохастичних достатніх умов оптимальності.

Виклад основного матеріалу. Спершу формалізуємо детерміновану модель оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці, а потім формалізуємо стохастичну модель.

Детермінована модель

Нехай t — неперервна змінна часу ($t \in [t_0, T]$, $T > t_0$), n — кількість секторів, $I(t)$ — загальні інвестиції в економіку, $I_i(t)$ — чисті інвестиції, вкладені в розвиток i-го сектора, $K_i(t)$ — капітал (основні фонди) i-го сектора, $\mu_i \in (0;1)$ — норма амортизації капіталу в i-му секторі, $\dot{K}_i(t)$ — прибуток або приріст капіталу i-го сектора ($\dot{K}_i(t) \equiv dK_i(t)/dt$ — похідна за часом t), $A_i(t) = \mu_i K_i(t)$ — амортизаційні відрахування в i-му секторі.

Припустивши, що інвестиції (валові) складаються з чистих інвестицій $I_i(t)$ та амортизаційних відрахувань $A_i(t)$ для i-го сектор. одержимо рівняння динаміки i-го капіталу

$$\dot{K}_i(t) = I_i(t) - \mu_i K_i(t), \; i = 1,...,n, \; t \in [t_0, T] \tag{1}$$

Будемо вважати, що початкова величина капіталу i-го сектора (початковий стан) заданий, тобто

$$K_i(t_0) = K_i^{(0)}, \; i = 1,...,n. \tag{2}$$

На кінцевий стан капіталу (при $t = T$) i-го сектора накладається обмеження

$$K_i(T) \geq K_i^{(T)},\ i = 1,...,n. \tag{3}$$

Можливості інвестування секторів економіки обмежені наявним загальним обсягом інвестицій:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(t) \leq I,\ I_i(t) \geq 0,\ t \in [t_0, T]. \tag{4}$$

Задача інвестора в розвитку економіки полягає в прагненні мінімізувати сумарні інвестиції, вкладені в багатосекторну економіку та максимізувати обсяг капіталів $K_i(t)$, $i = 1,...,n$ у термінальний (кінцевий) момент часу T, тобто мета інвестора зводиться до задачі оптимізації

$$-\int_{t_0}^{T} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_i(t) dt + \sum_{i=1}^{n} \beta_i K_i(T) \to \max_{I_i \geq 0,\ i=1,...,n} \tag{5}$$

на допустимій множині обмежень (1)–(4), де α_i, β_i — деякі вагові коефіцієнти, що характеризують пріоритетність відповідних складових функціонала (5).

Співвідношення (1)–(5) описують детерміновану динамічну модель оптимального розподілу у багатосекторній економіці [7, с. 13–15].

Перейдемо до формалізації стохастичної динамічної моделі оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці.

Стохастична модель

У роботі [6] проведено економічне обґрунтування правомірності при стохастичному моделюванні включення, як складової, в детерміновану динамічну модель лінійної комбінації приростів вінерівського та пуассонівського процесів [8, с. 7-8]. Використаємо це для формалізації стохастичної моделі оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці.

Нехай $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P}\}$ — ймовірнісний простір з σ-алгеброю $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [t_0, T]\} \subset \sigma$, з множиною елементарних подій Ω та мірою (ймовірністю) P, $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний простір дійсних чисел; $\xi(t) \equiv (\xi_1(t) \equiv \xi_1(t,\omega),...,\xi_n(t) \equiv \xi_n(t,\omega)) \in \mathbb{R}^n$ — $\mathcal{F}_t$-вимірний вектор стандартних вінерівських процесів із нульовими математичними сподіваннями $M(\xi_i(t))=0$, $i=\overline{1,n}$ та одиничними дисперсіями $\sigma^2(\xi_i(t))=1$, $i=\overline{1,n}$, $\omega\in\Omega$; $\eta(t)\equiv(\eta_1(t)\equiv\eta_1(t,\omega),...,\eta_n(t)\equiv\eta_n(t,\omega))\in\mathbb{R}^n$ — F_t-вимірний вектор пуассонівських процесів із математичними сподіваннями $M(\eta_i(t))=\lambda_i(t-t_0)$, $i=\overline{1,n}$, $\omega\in\Omega$; причому вектори випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ є незалежними.

На ймовірністному просторі $\{\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P}\}$ заданий вектор процесів капіталів $(K_1(t)\equiv K_1(t,\omega),...,K_n(t)\equiv K_n(t,\omega))$, $t\in[t_0,T]$, $\omega\in\Omega$, який

– описується рівняннями динаміки в формі Іто [8, с. 163-164; 9, с. 258-259]

$$\dot{K}_i(t)=-\mu_i K_i(t)+I_i(t)+W_i^{(1)}\xi_i(t)+W_i^{(2)}\dot{\eta}_i(t),\ t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n}, \quad (6)$$

– задовольняє початкові умови

$$K_i(t_0)=K_i^{(0)},\ K_i^{(0)}\in F_{t_0},\ i=\overline{1,n}, \quad (7)$$

– задовольняє обмеження на кінцеві стани ($t=T$)

$$K(T)\ge K_i^{(T)},\ i=\overline{1,n}. \quad (8)$$

Накладається обмеження на сумарні інвестиції

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(t)\le I,\ I_i(t)\ge 0,\ t\in[t_0,T]. \quad (9)$$

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати середні сумарні інвестиції та максимізувати середній обсяг капіталів у термінальний (кінцевий) момент часу T

$$M\left\{-\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i I_i(t)dt+\sum_{i=1}^{n}\beta_i K_i(T)\right\}\to\max_{I_i\ge 0,\ i=1,...,n} \quad (10)$$

на допустимій множині обмежень (6)–(9).

У математичному плані стохастична динамічна модель (6)–(10) є задачею стохастичного оптимального керування, в якій I_i, $i=\overline{1,n}$ — параметри керування, а K_i, $i=\overline{1,n}$ — фазові траєкторії, що в будь-який момент часу $t\in[t_0,T]$ визначають стан економічної системи. Отже, задача (6)–(10) полягає в знаходженні таких оптимальних інвестицій $I_i^{(ОП)}(t)$, $i=\overline{1,n}$ та відповідних їм оптимальних траєкторій капіталів $K_i^{(ОП)}(t)$, $i=\overline{1,n}$, які б на допустимій множині (6)–(9) максимізували функціонал корисності (10).

Проведемо дослідження стохастичної моделі (6)–(10) із допомогою стохастичних достатніх умов оптимальності [4, с.117-119] в три етапи:

1) визначення магістрального процесу;

2) знаходження правого процесу та моменту перемикання керування;

3) побудова оптимального процесу.

1. Магістральний процес

Магістральний процес включає в себе визначення магістральних керувань за інвестиціями $I_i^{(маг)}(t)$, $i=\overline{1,n}$ та відповідних магістральних траєкторій (магістралей) за капіталами $K_i^{(маг)}(t)$, $t\in[t_0,T]$, $i=\overline{1,n}$.

Магістральні керування. За стохастичними достатніми умовами оптимальності [4, с. 117–119] для задачі (6)–(7), (9)–(10) без обмежень на кінцеві стани (8) запишемо рівняння Беллмана з крайовою умовою

$$\begin{gathered}\inf_{\substack{I_i\ge 0,\\ i=\overline{1,n}}} R(t,K,I,V)\equiv \inf_{\substack{I_i\ge 0,\\ i=\overline{1,n}}}\Bigg\{\partial V/\partial t+\sum_{i=1}^{n}\partial V/\partial K_i(-\mu_i K_i(t)+I_i(t))+\\ +\sum_{i=1}^{n}\alpha_i I_i(t)+0.5\sum_{i=1}^{n}(W_i^{(1)})^2\,\partial^2 V/\partial K_i^2+\\ +\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[V(t,K_1,\dots,K_i+W_i^{(2)},\dots,K_n)-V(t,K_1,\dots,K_i,\dots,K_n)\right]\Bigg\}=0,\ t\in[t_0,T]\end{gathered} \tag{11}$$

$$V(T,K^{(T)})=0,\quad K^{(T)}=(K_1^{(T)},\dots,K_n^{(T)})$$

$$\sum_{i=1}^{n}I_i(t)\le I,\ t\in[t_0,T],$$

де шукана функція $V(t,K)$ — неперервно-диференційована один раз по t та двічі по K_i, $i=\overline{1,n}$ на декартовому добутку $[t_0,T]\times\bigcup_{i=1}^{n}\{K_i\ge 0\}$.

Слід зауважити, що в функції R на рівні оптимізації змінні t, K та I є функціонально незалежними.

За допомогою метода Лагранжа задачу умовної оптимізації (11) зведемо до задачі безумовної оптимізації. Для цього сформуємо функцію $\tilde{R}(t, K, I, x, V) = R(t, K, I, V) + x\left[I - \sum_{i=1}^{n} I_i(t)\right]$ із множником Лагранжа x і задача умовної оптимізації набуває вигляду

$$\inf_{\substack{x,\, I_i \geq 0,\\ i=\overline{1,n}}} \tilde{R}(t, K, I, x, V),\ t \in [t_0, T],\ V(T, K^{(T)}) = 0. \qquad (12)$$

Запишемо необхідну умову оптимальності $\partial\tilde{R}/\partial x = 0$, із якої отримаємо рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} I_i(t) = I,\ t \in [t_0, T]. \qquad (13)$$

У функції R коефіцієнти при керуванні за інвестиціями I_i прирівняємо до нуля і тим самим надамо змінним I_i, $i = \overline{1, n}$ довільності — приймати довільні значення. Отримаємо

$$\partial V/\partial K_i + \alpha_i - x = 0,\ i = \overline{1, n},$$

звідки

$$V = -\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - x) K_i + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - x) K_i^{(T)}. \qquad (14)$$

Підставимо (14) в задачу (11). Одержимо рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - x) K_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i W_i^{(2)} (\alpha_i - x) + xI = 0. \qquad (15)$$

У зв’язку з тим, що на рівні оптимізації змінні K_i є функціонально незалежними, то рівняння (15) розпадається на систему з n рівнянь вигляду

$$(\alpha_i - x)\mu_i K_i = \lambda_i W_i^{(2)} (\alpha_i - x) + n^{-1} xI,\ i = \overline{1, n},\ t \in [t_0, T]. \qquad (16)$$

Звідки, отримаємо оптимізаційні величини за капіталами

$$\tilde{K}_i(t) = \mu_i^{-1}(\alpha_i - x)^{-1}\left[\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}xI\right],\ i = \overline{1,n},\ t \in \left[t_0, T\right]. \qquad (17)$$

Тут використали рівноймовірністний розподіл сумарних інвестицій xI по секторам $n^{-1}xI$.

За оптимізаційними величинами $\tilde{K}_i$, $i = \overline{1,n}$ (17) керування за інвестиціями I_i, $i = \overline{1,n}$ визначаються із середніх рівнянь динамік (1). Для цього використаємо властивості вінерівських і пуассонівських процесів

$$M(\dot{\xi}_i(t)) = (M\xi_i(t))' = 0,$$

$$M(\dot{\eta}_i(t)) = (M\eta_i(t))' = (\lambda_i(t - t_0))' = \lambda_i,\ i = \overline{1,n}. \qquad (18)$$

При застосуванні математичного сподівання M до лівої та правої частин рівняння динамік (1) із використанням властивостей (18) отримаємо

$$\dot{K}_i(t) = -\mu_i K_i(t) + I_i(t) + \lambda_i W_i^{(2)},\ i = \overline{1,n},\ t \in \left[t_0, T\right]. \qquad (19)$$

Із використанням (17) із (19) маємо керування за інвестиціями

$$I_i(t) = -\lambda_i W_i^{(2)} + (\alpha_i - x)^{-1}(\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}xI),\ i = \overline{1,n},\ t \in \left[t_0, T\right]. \quad (20)$$

Підставимо (20) в (13). Одержимо рівняння для визначення множника Лагранжа x

$$\left[-\lambda_i W_i^{(2)} + (\alpha_i - x)^{-1}(\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}xI)\right] = I, \qquad (21)$$

та яке можна розв’язати одним із числових методів [9, с. 29–40; 10, с.15-74]. Після визначення множника Лагранжа x із (20) отримаємо керування за інвестиціями $\tilde{I}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in \left[t_0, T\right]$.

Для керувань за інвестиціями $\tilde{I}_i(t) \le 0$, $i = \overline{1,i_0}$, $t \in \left[t_0, T\right]$ магістральними керуваннями за інвестиціями є $I_i^{(маг)}(t) = 0$, $i = \overline{1,i_0}$, $t \in \left[t_0, T\right]$, для керувань $\tilde{I}_i(t) > 0$, $i = \overline{i_0 + 1, n}$ магістральними керуваннями — $I_i^{(маг)}(t) = \tilde{I}_i(t) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \tilde{I}_i(t)$, $i = \overline{i_0 + 1, n}$, $t \in \left[t_0, T\right]$. Сектори, у яких магістральні керування за інвестиціями $I_i^{(маг)}(t) = 0$, $i = \overline{1,i_0}$, $t \in \left[t_0, T\right]$, назвемо нерозвиваючими, а сектори з магістральними керуваннями $I_i^{(маг)}(t)>0$, $i=\overline{i_0+1,n}$, $t\in[t_0,T]$ — розвиваючими.

Таким чином, отримали магістральні керування $I_i^{(маг)}(t)$, $i=\overline{1,n}$, $t\in[t_0,T]$, які є детермінованими неперервними функціями на $[t_0,T]$ та не залежать від коефіцієнтів $W_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$ при приростах вінерівських процесів $\dot{\xi}_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ у диференціальних моделях (6).

Відповідні неперервно-диференційовані на $[t_0,T]$ стохастичні магістралі за капіталами $K_i^{(маг)}(t)$, $t\in[t_0,T]$, $i=\overline{1,n}$ визначається одним із числових методів [11, с. 278–295; 12] із стохастичної початкової задачі (задачі Коші) (1)–(2), а відповідні середні магістралі за капіталами $K_i^{(маг,\,c)}(t)$, $t\in[t_0,T]$, $i=\overline{1,n}$ із середньої початкової задачі, яка включає середню динаміку за капіталами (19) при $I_i(t)=I_i^{(маг)}(t)$, $t\in[t_0,T]$, $i=\overline{1,n}$ та початкову умову $K_i(t_0)=M(K_i^{(0)})$, $i=\overline{1,n}$ та мають вигляд

$$K_i^{(маг,\,c)}(t)=M(K_i^{(0)})e^{-\mu_i(t-t_0)}+\mu^{-1}\left[I_i^{(маг)}+\lambda_i W_i^{(2)}\right](1-e^{-\mu_i(t-t_0)}),\quad t\in[t_0,T],\ i=\overline{1,n}. \tag{22}$$

Причому, $K_i^{(маг,\,c)}(t)\equiv M(K_i^{(маг)}(t))$, $t\in[t_0,T]$.

Таким чином, отримали стохастичний і середній магістральний процес $\Pi_{маг}=\left\{I_i^{(маг)}(t), K_i^{(маг,}(t), t\in[t_0,T], i=\overline{1,n}\right\}$.

Але магістральний процес $\Pi_{маг}$ отриманий при неврахуванні обмежень на кінцеві стани капіталів (8). Перевіримо виконання цих обмежень для середніх кінцевих станів магістралей за капіталами

Якщо виконуються нерівності для середніх кінцевих станів магістралей за капіталами $M(K_i^{(маг)}(T)$, $i=\overline{1,n}$

$$K_i^{(маг,\,c)}(T)\equiv M(K_i^{(маг)}(T))\geq K_i^{(T)},\ i=\overline{1,n},$$

то стохастичний і середній магістральний процес $\Pi_{маг}$ є стохастичним і середнім оптимальним процесом $\Pi_{ОП}=\left\{I_i^{(ОП)}(t), K_i^{(ОП)}(t), t\in[t_0,T], i=\overline{1,n}\right\}$.

При виконанні хоча б однієї нерівності (i_0 — конкретний (фіксований) номер сектора)

$$M(K_{i_0}^{(маг)}(T)) < K_{i_0}^{(T)} \tag{23}$$

необхідно проводити побудову правого процесу $\Pi_{ПР}$.

2. Правий процес

Правий процес включає в себе визначення правих керувань за інвестиціями $I_i^{(ПР)}(t)$, відповідних правих траєкторій за капіталами $K_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [\zeta, T]$, $i = \overline{1, n}$ та момента перемикання керування ζ.

Праві керування. Нехай для середніх кінцевих станів магістралей за капіталом $M(K_i^{(маг)}(T))$, $i = \overline{1, n}$ виконуються нерівності

$$M(K_i^{(маг)}(T)) < K_i^{(T)},\ i = \overline{1, n}, \tag{24}$$

а для інших випадків виконання нерівностей (24) дослідження проводяться аналогічно.

При виконанні нерівностей (24) середні праві траєкторії $K_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ повинні монотонно зростати ($\dot{K}_i(t) > 0$), тобто виконуватись нерівності

$$\dot{K}_i(t) = -\mu_i K_i(t) + I_i(t) + \lambda_i W_i^{(2)} > 0,\ i = \overline{1, n}. \tag{25}$$

Із нерівностей (25), обмежень на керування за інвестиціями (9) та обмежень на стани середніх правих траєкторій за капіталами

$$M(K_i^{(маг)}(t)) \le K_i^{(t)} \le K_i^{(T)},\ t \in [t_0, T],\ i = \overline{1, n} \tag{26}$$

сформулюємо задачу лінійного програмування для визначення правих керувань за капіталами $K_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{gathered} \max(-x(t)), \\ -\mu_i K_i(t) + I_i(t) + \lambda_i W_i^{(2)} \ge \varepsilon_0, \\ M(K_i^{(маг)}(t)) \le K_i^{(t)} \le K_i^{(T)},\ I_i(t) \ge 0,\ i = \overline{1, n}, \\ x(t) \ge 0,\ \sum_{i=1}^{n} I_i(t) \le I,\ t \in [t_0, T], \end{gathered} \tag{27}$$

де $\varepsilon_0 > 0$ — досить мале задане число.

Задачу лінійного програмування з параметром $t \in [t_0, T]$ (27) можна розв'язати одним із числових методів [13, 14, 15].

Якщо розв'язку задачі лінійного програмування (27) не існує, то це означає, що кінцеві стани капіталів $K_i^{(T)}$, $i = \overline{1, n}$ є недосяжними та необхідно послабити умови на вхідну інформацію стохастичної моделі (6)–(10).

Нехай розв'язок задачі лінійного програмування (27) існує $(I_1^{(ПР)}(t), ..., I_n^{(ПР)}(t))$, $t \in [t_0, T]$. Тоді компоненти цього розв'язку будуть слугувати правими керуваннями за інвестиціями $I_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$. Слід зауважити, що праві керування за інвестиціями $I_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$ є детермінованими неперервними функціями на $[t_0, T]$ та не залежать від коефіцієнтів $W_i^{(1)}$, $i = \overline{1, n}$ при приростах вінерівських процесів $\xi_i(\mathrm{t})$, $i = \overline{1, n}$ у диференційних моделях (6).

Момент перемикання керування ζ визначається із задачі стохастичної оптимальної швидкодії. Формалізуємо цю задачу.

Нехай $\tau_I(K)$, $I = (I_1, ..., I_n)$, $K = (K_1, ..., K_n)$ — перший момент досягнення ε-околу магістралей за капіталами

$$D_\varepsilon = \Big\{ K_i^{(маг)} \in \square \,\Big|\, M\left(K_i^{(маг)}(t)\right) - \varepsilon \le K_i(t) \le M\left(K_i^{(маг)}(t)\right) +$$

$$+ \varepsilon < K_i^{(T)}, t \in [t_0, T], i = \overline{1, n} \Big\}$$

при формальному русі стохастичної динамічної системи (6) у зворотному напрямку осі t із кінцевих станів за капіталами $K_i(T) = K_i^{(T)}$, $i = \overline{1, n}$.

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати перший момент попадання в ε-окіл D_ε магістралей за капіталами

$$\tau_{I*}(K) = \min_I \tau_I(K) \tag{28}$$

при обмеженнях на керування за інвестиціями $0 \le I_i(t) \le I_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [\zeta, T]$ та на $K_i(\zeta) \in D_\varepsilon$, $i = \overline{1, n}$.

Для задачі стохастичної оптимальної швидкодії за стохастичними достатніми умовами [4, с. 162–163] запишемо рівняння Беллмана з крайовою умовою

$$\inf_{\substack{I_i^{(ПР)} \ge I_i \ge 0, \\ i=\overline{1,n}}} \tilde{R}\left(t, K, I, \tilde{V}\right) \equiv \inf_{\substack{0 \le I_i \le I_i^{(ПР)}, \\ i=\overline{1,n}}} \left\{ \partial\tilde{V}/\partial t + \sum_{i=1}^{n} \partial\tilde{V}/\partial K_i \left[-\mu_i K_i(t) + I_i(t)\right] + \right.$$

$$+0{,}5\sum_{i=1}^{n}\left(W_i^{(1)}\right)^2 \partial^2\tilde{V}/\partial K_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left[\tilde{V}\left(t, K_1,..., K_i + W_i^{(2)},..., K_n\right) - \right. \tag{29}$$

$$\left. \left. -\tilde{V}\left(t, K_1,..., K_i,..., K_n\right)\right] - 1\right\} = 0, t \in [\zeta, T],$$

$$V\left(t, K(\zeta)\right) = 0, K(\zeta) = \left(K_1(\zeta),..., K_n(\zeta)\right), \zeta \in (t_0, T),$$

де шукана неперервно-диференційована функція один раз по t та двічі по K на декартовому добутку $[t_0, T] \times \bigcup_{i=1}^{n}\{K_i \ge 0\}$, ζ — шуканий момент перемикання керування.

Щоб розв’язком задачі оптимізації (29) були значення $I_i^*(t) = I_i^{(ПР)}(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [\zeta, T]$ досить виконання нерівностей $\partial\tilde{R}/\partial I_i < 0$ $\left(\partial\tilde{V}/\partial K_i < 0\right)$, $i = \overline{1, n}$, тобто щоб функція $\tilde{R}$ була монотонно спадною по керуванні I_i, $i = \overline{1, n}$ та найменшого значення на проміжку $\left[0, I_i^{(ПР)}\right]$ по I_i, $i = \overline{1, n}$ отримувала при $I_i(t) = I_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [\zeta, T]$, $i = \overline{1, n}$.

Тому невідому функцію будемо шукати у вигляді

$$\tilde{V}(t, K) = l\sum_{i=1}^{n} K_i - l\sum_{i=1}^{n} K_i(\zeta), \ l < 0 \ \left(\partial\tilde{V}/\partial K_i < 0\right). \tag{30}$$

Підставимо (30) у рівняння Беллмана (29). Отримаємо

$$l\sum_{i=1}^{n}\left[-\mu_i K_i(t) + I_i(t) + \lambda_i W_i^{(2)}\right] - 1 = 0, \ t \in [\zeta, T]. \tag{31}$$

При $K_i(t) = M\left(K_i^{(маг)}(t)\right)$, $I_i(t) = I_i^{(ПР)}(t)$ та $t = \zeta$ із рівняння (31) одержимо рівняння

$$l\sum_{i=1}^{n}\left[-\mu_i K_i^{(маг)}(\zeta) + I_i^{(ПР)}(\zeta) + \lambda_i W_i^{(2)}\right] - 1 = 0, \ \zeta \in (t_0, T) \tag{32}$$

для визначення момента перемикання керування ζ та який можна обчислити одним із числових методів [9, с. 29–40; 10, с. 15–75]. Вибором числа l можна домогтися того, щоб $\zeta \in (t_0, T)$. Слід зауважити, що момент перемикання керування ζ є зауважити, що момент перемикання керування ζ є детермінованою величиною та не залежить від коефіцієнтів $W_i^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$ при приростах вінерівських процесів $\dot{\xi}_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ у диференціальних моделях (6).

Праві траєкторії. За знайденими правими керуваннями за інвестиціями $I_i^{(ПР)}(t)$, $t\in[\zeta,T]$ та моментом перемикання керування ζ можна знайти неперевно-диференційовані стохастичні праві траєкторії за капіталами $K_i^{(ПР)}(t)$, $i=\overline{1,n}$ одним із числових методів [11, с. 278–295; 12] із стохастичних рівнянь динамік (1) при $I_i(t)=I_i^{(ПР)}(t)$, $t\in[\zeta,T]$ та стохастичних початкових умовах $K_i(\zeta)=K_i^{(маг)}(\zeta)$, $i=\overline{1,n}$. А середні праві траєкторії за капіталами $K_i^{(ПР,с)}(t)=M\left(K_i^{(ПР)}(t)\right)$, $t\in[\zeta,T]$ визначаються із середніх рівнянь динамік (19) при $I_i(t)=I_i^{(ПР)}(t)$, $t\in[\zeta,T]$ та середніх початкових умовах $K_i(\zeta)=K_i^{(маг,с)}(\zeta)\equiv M\left(K_i^{(маг)}(\zeta)\right)$, $i=\overline{1,n}$ та набувають вигляду:

$$K_i^{(ПР,с)}(t)=K_i^{(маг,с)}(\zeta)e^{-\mu_i(t-t_0)}+\mu_i^{-1}\left[I_i^{(ПР)}+\lambda_i W_i^{(2)}\right]\left(1-e^{-\mu_i(t-t_0)}\right),\ t\in[\zeta,T].$$

Таким чином, одержали стохастичний і середній правий процес

$$П_{ПР}=\left\{I_i^{(ПР)}(t),K_i^{(ПР)}(t),t\in[\zeta,T],i=\overline{1,n}\right\}.$$

3. Оптимальний процес

Згідно з результатами [4, с. 217–219; 16, с. 106–137] склейка в момент перемикання керування ζ стохастичного та середнього магістрального процеса $П_{маг}$ і стохастичного та середнього правого процеса $П_{ПР}$ дає стохастичний і середній оптимальний процес $П_{ОП}=\left\{I_i^{(ОП)}(t),K_i^{(ОП)}(t),t\in[\zeta,T],i=\overline{1,n}\right\}$:

$$I_i^{(ОП)}(t)=\begin{cases}I_i^{(маг)}(t),t\in[t_0,\zeta),\\ I_i^{(ПР)}(t),t\in[\zeta,T],\end{cases}\quad K_i^{(ОП)}(t)=\begin{cases}K_i^{(маг)}(t),t\in[t_0,\zeta),\\ K_i^{(ПР)}(t),t\in[\zeta,T],\end{cases}\ t\in[t_0,T],$$
$$i=\overline{1,n}.$$

Причому, оптимальні керування за інвестиціями $I_i^{(ОП)}(t)$, $i=\overline{1,n}$ є детермінованими кусково-неперевними функціями на

$[t_0, T]$ і момент перемикання керування ζ є детермінованою величиною та не залежить від коефіцієнтів $W_i^{(1)}$, $i = \overline{1, n}$ при приростах вінерівських процесів $W_i^{(1)}$, $i = \overline{1, n}$ у стохастичних рівняннях динамік капіталів (6), а оптимальні траєкторії за капіталами $K_i^{(ОП)}(t)$, $i = \overline{1, n}$ — неперервними та кусково-диференційованими функціями на $[t_0, T]$.

Отже, отримали оптимальний процес для стохастичної моделі оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці.

Опишемо алгоритм розрахунку оптимального процесу.

Алгоритм розрахунку оптимального процесу

1. Провести розрахунок магістральних керувань за інвестиціями $I_i^{(маг)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$ та відповідних стохастичних і середніх магістралей за капіталами $K_i^{(маг)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$.

2. Перевірити виконання нерівностей для середніх кінцевих станів магістралей за капіталами $K_i^{(маг,c)}(T) \equiv M(K_i^{(маг)}(T)) \geq K_i^{(T)}$, $i = \overline{1, n}$. Якщо нерівності виконуються, то магістральний процес $П_{маг}$ є оптимальним процесом $П_{ОП}$. Вихід із алгоритму.

При невиконанні хоча б однієї з нерівностей здійснюється перехід на блок 3.

3. Перевірити чи існує розв'язок задачі лінійного програмування (27) по визначенню правих керувань за інвестиціями $I_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$. Якщо — «ні» (не існує), то вихід із алгоритму.

При «так» (існує) — перехід на блок 4.

4. Обчислити праві керування за інвестиціями як розв'язок задачі лінійного керування (27).

5. Знайти момент перемикання керування ζ із нелінійного алгебраїчного рівняння (32).

6. Обчислити стохастичні та праві траєкторії за капіталом $K_i^{(ПР)}(t)$, $t \in [\zeta, T]$ і тим самим сформувати стохастичний і середній правий процес $П_{ПР}$.

7. Для одержання стохастичного та середнього оптимального процесу $П_{ОП}$ здійснити склейку стохастичних і середніх магістрального та правого процесів. Вихід із алгоритму.

При стохастичному моделюванні необхідно знати довірчі проміжки за заданою ймовірністю середніх значень та дисперсій нормальних генеральних сукупностей оптимальних траєкторій за капіталами.

Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальних траєкторій за капіталами та одержано N ансамблів капіталів $K_{ij}^{(ОП)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $j = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, n}$.

Обчислимо вибіркові статистики для оптимальних траєкторій за капіталами [17, с. 213]:

– вибіркові середні

$\bar{K}_i^{(ОП)}(t) = N^{-1} \sum_{j=1}^{N} \bar{K}_{ij}^{(ОП)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$;

– вибіркові дисперсії

$\sigma^2_{K_i^{(ОП)}} = (N-1)^{-1} \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{K}_{ij}^{(ОП)}(t) - \bar{K}_{ij}^{(ОП)}(t) \right)^2$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$.

Слід зауважити, що вибіркові середні $\bar{K}_i^{(ОП)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$ дорівнюють (збігаються) середнім оптимальним траєкторіям за капіталами $\bar{K}_i^{(ОП,c)}(t)$, $t \in [t_0, T]$, $i = \overline{1, n}$.

Довірчими межами за заданою ймовірністю $\Theta \in (0,1)$ для дисперсій оптимальних траєкторій за капіталами є [17, с. 219]

$$\left(\frac{(N-1)\sigma^2_{K_i^{(ОП)}(t)}}{\chi^2_{1-\Theta/2,(N-1)}}; \frac{(N-1)\sigma^2_{Q_{ОП}}(t)}{\chi^2_{\Theta/2,(N-1)}} \right), \ t \in [t_0, T], \ i = \overline{1, n},$$

де $\chi^2_{\Theta/2}(N-1) \left[\chi^2_{1-\Theta/2}(N-1) \right]$ — $\Theta/2$-квантиль розподілу Пірсона χ^2 з $(N-1)$ ступенями вільності при заданому рівні $\Theta \in (0,1)$ [17, с. 238–239].

Тоді довірчі проміжки за заданою ймовірністю $\Theta \in (0,1)$ для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами $\bar{K}_i^{(ОП,p)}(t)$, $i = \overline{1, n}$ набувають вигляду [17, с. 219]:

$$\bar{K}_i^{(ОП,p)}(t) \in \left(\bar{K}_i^{(ОП,c)}(t) - \frac{t_\Theta (N-1)\sigma_{K_i^{(ОП)}(t)}}{\sqrt{N}}; \bar{K}_i^{(ОП,c)}(t) + \frac{t_\Theta (N-1)\sigma_{K_i^{(ОП)}(t)}}{\sqrt{N}} \right),$$

$$t \in [t_0, T], \ i = \overline{1, n},$$

де t_Θ — Θ-квантиль розподілу Ст'юдента з $(N-1)$ ступенями вільності при заданому довірчому рівні $\Theta \in (0,1)$ [17, с. 238–239].

Отже, для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами визначені довірчі проміжки за заданою ймовірністю.

Зауваження 1. Вище описане має місце, коли загальні інвестиції $I(t)$, $t \in [t_0, T]$ є функцією часу t. Тоді в формулах (17) $\sigma = \sigma(t)$ і $I = I(t)$ та відповідно

$$\dot{\hat{K}}_i(t) = \mu_i^{-1}\left[\frac{\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}xI}{\alpha_i - x(t)}\right] = \frac{n^{-1}\left(\dot{x}I + x\dot{I}\right)(\alpha_i - x) + \dot{x}\left(\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}xI\right)}{(\alpha_i - x)^2},$$

$$t \in [t_0, T]. \tag{33}$$

Із урахуванням (33) керування за інвестиціями (20) набуває вигляду

$$I_i(t) = -\lambda_i W_i^{(2)} + \left(\alpha_i - x(t)\right)^{-1}\left[\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}x(t)I(t)\right] + \dot{\hat{K}}_i(t) =$$
$$= -\lambda_i W_i^{(2)} + \left(\alpha_i - x(t)\right)^{-1}\left[\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}x(t)I(t)\right] + (\alpha_i - x)^{-2} \times$$
$$\times\left\{n^{-1}\left(\dot{x}(t)I(t) + x(t)\dot{I}(t)\right)\left(\alpha_i - x(t)\right) + \dot{x}(t)\left(\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}x(t)I(t)\right)\right\},$$

$$t \in [t_0, T],\ i = \overline{1, n}. \tag{34}$$

А формула (21) має вигляд рівняння

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{-\lambda_i W_i^{(2)} + \left(\alpha_i - x(t)\right)^{-1}\left[\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}x(t)I(t)\right] + (\alpha_i - x)^{-2} \times\right.$$
$$\left.\times\left\{n^{-1}\left(\dot{x}(t)I(t) + x(t)\dot{I}(t)\right)\left(\alpha_i - x(t)\right) + \dot{x}(t)\left(\lambda_i W_i^{(2)} + n^{-1}x(t)I(t)\right)\right\}\right\} = I(t),$$

$$t \in [t_0, T],$$

із якого після нескладних математичних перетворень отримаємо диференціальну модель по визначенню множника Лагранжа

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t)\right),\ t \in [t_0, T]. \tag{35}$$

Задавшись початковою умовою

$$x(t_0) = 1, \tag{36}$$

отримаємо початкову задачу (задачу Коші) (35)–(36) по визначенню множника Лагранжа та яку можна розв'язати методом Рунге-Кутта.

Зауваження 2. При $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$ критерій мети (10) можна записати так

$$M\left\{\sum_{i=1}^{n}\beta_i K_i(T)\right\} = M\left\{\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{n}\beta_i \dot{K}_i(t)dt + \sum_{i=1}^{n}\beta_i K_i(t_0)\right\} =$$

$$M\left\{\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left[-\mu_i K_i(t) + I_i(t) + \lambda_i W_i^{(2)}\right]dt + \sum_{i=1}^{n}\beta_i K_i(t_0)\right\} \to \max_{I_i,\, i=\overline{1,n}},$$

тобто

$$M\left\{\int_{t_0}^{T}\sum_{i=1}^{n}\beta_i\left[-\mu_i K_i(t) + I_i(t)\right]dt\right\} \to \max_{I_i,\, i=\overline{1,n}} \cdot$$

Висновки.

1. Запропонована та проведено дослідження стохастичної моделі оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці.
2. Встановлено, що для стохастичної моделі оптимального розподілу інвестицій у багатосекторній економіці оптимальні керування за інвестиціями та момент перемикання керування є детермінованими величинами а не залежать від коефіцієнтів при приростах вінерівських процесів у рівняннях динамік капіталів, а оптимальні траєкторії за капіталами — стохастичними (випадковими) функціями.
3. Проведено опис оптимального процесу та наведені довірчі проміжки за заданою ймовірністю для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами.

Література

1. *Габасов Р.* Синтез оптимальных управлений для динамических систем при неполной и неточной информации об их состояниях / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, О.И. Костюкова // Труды математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук. Оптимальное управление и дифференциальные уравнения. — М. : Наука, 1995. — Т. 211. — С. 140–152.
2. *Айде-заде К.Р.* О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций / К.Р. Айде-заде, А.Б. Рагимов // Автоматика и вычислительная техника, 2007. — Т. 41, № 1. — С. 27–36.

3. *Quincampoix M.* Optimal control of uncertain system with incomplete information for the disturbances / M. Quincampoix, V.M. Veliov // SIAM Journal on Control and Optimization, 2004. — Vol. 43, No. 4. — P. 1373–1399.

4. *Андреева Е.А.* Управление системами с последействием / Е.А. Андреева, Е.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. — М. : Наука, 1992. — 336 с.

5. *Бойчук М.В.* Стохастическое моделирование полного цикла однопродуктовой макроэкономики роста / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук // Кибернетика и системный анализ, 2013. — Т. 49, № 2. — С. 156–163.

6. *Бойчук М.В.* Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук // Проблемы управления и информатики, 2013. — № 2. — С. 125–139.

7. *Григорків В.С.* Оптимальне керування в економіці: навчальний посібник / В.С. Григорків. — Чернівці : Чернівецький національний університет, 2011. — 200 с.

8. *Скороход А.В.* Лекції з теорії випадкових процесів / А.В. Скороход. — К. : Либідь, 1990. — 168 с.

9. *Ясинський В.К.* Основи обчислювальних методів / В.К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2005. — 396 с.

10. *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. — М. : Наука, 1980. — 518 с.

11. *Юрченко І.В.* Методи стохастичного моделювання систем / І.В. Юрченко, Л.І. Ясинська, В.К. Ясинський. — Чернівці : Прут, 2002. — 416 с.

12. *Никитин Н.Н.* Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценка их погрешности / Н.Н. Никитин, В.Д. Разевич // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1978. — Т. 18, № 1. — С. 106–117.

13. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. — М. : Высшая школа, 1986. — 319 с.

14. *Богаєнко І.М.* Матемитичне програмування / І.М. Богаєнко, М.В. Рюмшин, В.С. Григорків, М.В. Бойчук. — К. : Логос, 1996. — 248 с.

15. *Вітлінський В.В.* Математичні методи дослідження операцій: навч. посібник / В.В. Вітлінський Л.Г. Тарасова // [Електронний ресурс]. — К. : КНЕУ, 2016. — 285 с.

16. Основы теории оптимального управления / В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М. Лобанов и др.; ред. В.Ф. Кротова. — М. : Высшая школа, 1990. — 430 с.

17. *Магнус Я.Р.* Эконометрика. Начальный курс: Учебное пособие / Я.Р. Магнус, П.К. Катышев, А.А. Пересецкий. — М. : Дело, 1998. — 248 с.

References

1. Gabasov, R., Kirillova, F.M., & Kostyukova, O.I. (1995) Sintez optimal’nykh upravleniy dlya dinamicheskikh sistem pri nepolnoy i netochnoy informatsii ob ikh sostoyaniyakh [Synthesis of optimal controls

for dynamical systems with incomplete and inaccurate information about their states]. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova. Optimal’noye upravleniye i differentsial’nyye uravneniya* [Optimal control and differential equations], vol. 211, pp. 140-152. [in Russian]

2. Ayde-zade, K.R., & Ragimov, A.B. (2007) O reshenii zadach optimal’nogo upravleniya na klasse kusochno-postoyannykh funktsiy [About the solution of optimal control problems by the class of piecewise constant functions]. *Avtomatika i vychislitel’naya tekhnika* [Automation and Computer Engineering], vol. 41, № 1, pp. 27-36. [in Russian]

3. Quincampoix, M., & Veliov, V.M. (2004) Optimal control of uncertain system with incomplete information for the disturbances. SIAM Journal on Control and Optimization, vol. 43, #. 4, pp. 1373-1399.

4. Andreyeva, Ye.A., Kolmanovskiy, Ye.B., Shaykhet, L.Ye. (1992) Upravleniye sistemami s posledeystviyem [Management of systems with aftereffect]. Science, Moscow, 336 p. [in Russian]

5. Boychuk, M.V. & Semchuk, A.R. (2013) Stokhasticheskoye modelirovaniye polnogo tsikla odnoproduktovoy makroekonomiki rosta [Stochastic modeling of the full cycle of single-product growth macroeconomics]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis], vol. 49, № 2, pp. 156-163. [in Russian]

6. Boychuk, M.V. & Semchuk, A.R. (2013) Stokhasticheskaya model’ polnogo tsikla optimal’noy ekologo-ekonomicheskoy dinamiki [Stochastic model of the full cycle of optimal ecological and economic dynamics]. *Problemy upravleniya i informatiki* [Problems of Management and Informatics], № 2, pp. 125-139. [in Russian]

7. Grigorkiv V.S. (2011) Optymalne keruvannya v ekonomitsi [Optimal management in the economy]: textbook, Chernivtsi National University, Chernivtsi, 200 p. [in Ukrainian]

8. Skorokhod A.V. (1990) Lektsiyi z teoriyi vypadkovykh protsesiv [Lectures about the theory of random processes] Lybid□, Kiyv, 168 p. [in Ukrainian]

9. Yasinsky V.K. (2005) Osnovy obchyslyuval□nykh metodiv [The basis of computational methods], Zoloti lytavry, Chernivtsi, 396 p. [in Ukrainian]

10. Vasilyev, F.P. (1980) Chislennyye metody resheniya ekstremal’nykh zadach [Numerical methods for solving extremal problems], Science, Moscow, 518 p. [in Russian]

11. Yurchenko, I.V., Yasynska, L.I., & Yasynsky, V.K. (2002) Metody stokhastychnoho modelyuvannya system [Methods of Stochastic Modeling Systems], Prut, Chernivtsi, 416 p. [in Ukrainian]

12. Nikitin, N.N., & Razevich, V.D. (1978) Metody tsifrovogo modelirovaniya stokhasticheskikh differentsial’nykh uravneniy i otsenka ikh pogreshnosti [Methods of digital modeling of stochastic differential equations and estimation of their error]. *Zhurnal vychislitel’noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], vol. 18, № 1, pp. 106-117. [in Russian]

13. Akulich I.L. (1986) Matematicheskoye programmirovaniye v primerakh i zadachakh [Mathematical programming in examples and problems], Vysshaya shkola, Moskow, 319 p. [in Russian]

14. Bohayenko, I.M., Ryumshyn, M.V., Gryhorkiv, V.S, & Boychuk, M.V. (1996) Matemytychne prohramuvannya [Mathematical programming], Lohos, Kiyv, 248 p. [in Ukrainian]

15. Vitlinskyy, V.V., & Tarasova, L.H. (2016) Matematychni metody doslidzhennya operatsiy [Mathematical methods of operations research]: textbook, KNEU, Kiyv, 285 p. [in Ukrainian]

16. Krotov, V.F., Lagosha, B.A., Lobanov, S.M. et al. (1990) Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya [Basis of the theory of optimal control] Vysshaya shkola, Moskow, 430 p. [in Russian]

17. Magnus, Ya.R., Katyshev, P.K., & Peresetskiy, A.A. (1998) Ekonometrika. Nachal'nyy kurs [Econometrics. Basic course]: textbook, Delo, Moskow, 248 p. [in Russian]

УДК 330.46

Уштик Н. М.,
аспірант кафедри вищої математики,
ДВНЗ «Київський національний
економічний університет імені Вадима Гетьмана»

Ushtuk N. M.,
postgraduate student of the Marketing Faculty
Advanced Mathematics Department,
Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman

ФОРМУВАННЯ ФУНКЦІЇ МАРЖИНАЛЬНОГО ДОХОДУ ПІДПРИЄМСТВА

FORMATION OF THE FUNCTION OF THE COMPANY'S MARGINAL INCOME

АНОТАЦІЯ. У статті визначено поняття «змінні витрати», охарактеризовано значення змінних витрат у формуванні маржинального доходу підприємства та запропоновано моделі калькулювання собівартості продукції з урахуванням змінних витрат. Також математично обґрунтовано залежність маржинального доходу підприємства від змінних витрат.

АННОТАЦИЯ. В статье определено понятие «переменные затраты», приведена характеристика значения переменных затрат на формирование маржинального дохода предприятия и предложены модели калькулирования себестоимости продукции з учетом переменных затрат. Также математически обоснована зависимость маржинального дохода предприятия от переменных затрат.