ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А. Д. К расчёту термических напряжений при конвективном нагреве пластины // Математичне моделювання. – Днепродзержинск: 2010, № 1(22). – С. 16 – 21.
2. Горбунов А. Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математическое моделирование. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2012, № 1(26). – С. 39 – 45.
3. Б. Боли, Дж. Уэйнер Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.

пост. 30.06.2016

С.Є. САМОХВАЛОВ, д. ф.-м. н., професор
А.І. КРИКЕНТ, аспірант
Дніпродзержинський державний технічний університет, м. Кам'янське

Теорія гравітації в афінному репері

(По матеріалам доповіді на Всеукраїнскій науково-методичній конференції «Проблеми математичного моделювання», Дніпродзержинськ, 25-27 травня 2016 р.)

Рівняння загальної теорії відносності подані відносно компонентів довільних афінних реперів

Гравітаційне поле визначається кривизною (девіацію геодезичних) і не повинно залежати від способу опису кривизни. Отже давня дискусія щодо того, що важливіше в теорії гравітації — загальна коваріантність, чи воля у виборі реперного поля — безпідставні [1]. Теорія повинна бути інваріантною як відносно загальноковаріантних перетворень, так і відносно перетворень, пов'язаних з вибором довільного афінного репера. Цим перетворенням з залученням активної точки зору (замість пасивної, пов'язаної з вибором різних способів нумерації) може надаватись, звичайно, й фізичний смисл – руху в гравітаційному полі та переходу між системами відліку. При виборі в якості системи відліку координатного (голономного) реперного поля з загально коваріантними перетвореннями можна також зв'язати перехід між системами відліку.

В роботі [2] теорія гравітації в ортонормованому репері була побудована як калібрувальна теорія групи трансляцій, внаслідок чого рівняння гравітаційного поля були представлені в формі, подібній до форми динамічних рівнянь Максвелла, згідно з якими електричний струм виражається як дивергенція антисиметричного тензора електромагнітного поля, тобто є квазілокальним. Далі було з'ясовано [3], що струми будь-яких фізичних величин, що зберігаються внаслідок калібрувальних симетрій, є квазілокальними, тобто виражаються через суперпотенціали. В [3] у якості прикладу було побудовано суперпотенціал енергії-імпульсу гравітаційного поля в координатному репері.

У даній роботі загальну теорію відносності подано в довільному афінному репері, представлено лагранжіан теорії і рівняння руху, де в якості основних змінних використовуються компоненти афінних реперів, дано вирази комплексів енергії-імпульсу і відповідного суперпотенціалу.

Хай $e_\mu := \partial_\mu$ ($\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$) координатний, а e_a — афінний репери, причому $e_\mu = h^a_\mu e_a$, а також задано $e_a \cdot e_b = g_{ab}$. Коефіцієнти неголономності F^a_{cb} реперного поля e_a означаються виразом $[e_c, e_b] = F^a_{cb} e_a$. Будемо вважати, що в просторі-часі задана зв'язність, коефіцієнти якої в афінному репері $\gamma^{\,a}_{\ bc}$ підкоряються умовам відсутності скруту $F^a_{cb} = \gamma^{\,a}_{\ cb} - \gamma^{\,a}_{\ bc}$ і узгодженості з метрикою $g_{ab,c} = \gamma^{\cdot}_{acb} + \gamma^{\cdot}_{bca}$, внаслідок чого маємо $\gamma^{\cdot}_{acb} = \mathrm{K}^{\cdot}_{acb} + \Omega^{\cdot}_{acb}$, де $\mathrm{K}^{\cdot}_{acb} = \frac{1}{2}(g_{ac,b} + g_{ab,c} - g_{cb,a})$, $\Omega^{\cdot}_{acb} = \frac{1}{2}(F^{\cdot}_{cab} + F^{\cdot}_{acb} - F^{\cdot}_{bca})$ з властивістю симетрії $\mathrm{K}^{\cdot}_{abc} = \mathrm{K}^{\cdot}_{acb}$, $\Omega^{\cdot}_{acb} = -\Omega^{\cdot}_{bca}$.

В якості польових величин теорії гравітації в афінному репері (ТГАР) вибираємо коефіцієнти переходу h^a_μ між афінним і координатним реперами, а також метричні коефіцієнти в афінному репері g_{ab}.

Лагранжіан ТГАР, як і лагранжіан Гілберта, або Мьоллера, одержується усіченням скалярної густини кривизни простору-часу

$$eR = e\delta^{\mu\nu}_{ab} g^{bd}(\partial_\mu \gamma^a_{\nu d} + \gamma^a_{\mu c}\gamma^c_{\nu d}), \tag{1}$$

де $\delta^{\mu\nu}_{ab} := h^\mu_a h^\nu_b - h^\mu_b h^\nu_a$ — альтернатор і $e = det\{g_{ab} h^a_\mu h^b_\nu\}^{\frac{1}{2}}$, тобто відніманням від неї певної дивергенції від комбінації польових величин і їх похідних (фазовим перетворенням), що забезпечує калібрувальну афінну $(LG \times T)^g$-інваріантність рівнянь теорії, а саме інваріантність відносно як групи LG^g локальних лінійних перетворень реперів, так і групи ріманових трансляцій RT [4] (калібрувальної групи трансляцій T^g з мірою довжини).

Має місце рівність:

$$eR - \partial_\mu(eV^\mu) = -e\delta^{\mu\nu}_{ab} g^{bd}\gamma^a_{\mu c}\gamma^c_{\nu d}, \tag{2}$$

де $V^{\mu} := \delta^{\mu\nu}_{ab} g^{bd} \gamma^{a}_{\nu d} = \gamma^{\mu}_{cc} - \gamma^{c\mu}_{c\cdot}$, отже в якості лагранжіану ТГАР вибираємо:

$$L_{\gamma} = \frac{1}{2\kappa} \delta^{\mu\nu}_{ab} g^{bd} \gamma^{a}_{\mu c} \gamma^{c}_{\nu d} = \frac{1}{2\kappa} (\gamma^{a}_{ac} \gamma^{c}_{bb} - \gamma^{a}_{bc} \gamma^{c}_{ab}), \quad (3)$$

де $\kappa = 8\pi G / c^4$ — гравітаційна стала Ейнштейна, а G — Ньютона.

Лагранжіан L_{γ} інваріантний відносно T^{g} — перетворень, які параметризуємо компонентами t^{a} векторів локальних зрушень в афінному репері:

$$\delta x^{\mu} = h^{\mu}_{a} t^{a}, \quad (4)$$

$$\delta h^{b}_{\mu} = -F^{b}_{\mu a} t^{a} - \partial_{\mu} t^{a}, \quad (5)$$

$$\delta g_{bc} = -g_{bc,a} t^{a}. \quad (6)$$

Внаслідок цієї інваріантності зберігається величина, струм якої позначатимемо як $I^{\mu}_{a} = e T^{\mu}_{a}$, де $T^{\mu}_{a} = t^{\mu}_{a} + \tau^{\mu}_{a}$, причому t^{μ}_{a} — змішаний координатно-афінний тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля в системі відліку, що визначається реперним полем e_{a}:

$$t^{\mu}_{a} = B^{\sigma\mu}_{b} F^{b}_{\sigma a} + D^{bc\mu} \gamma_{bac} - L_{\gamma} h^{\mu}_{a}, \quad (7)$$

де

$$B^{\sigma\mu}_{a} = \frac{1}{2\kappa} \delta^{\sigma\mu}_{\rho\nu} (\gamma^{\rho\nu}_{a\cdot} + h^{\rho}_{a} V^{\nu}), \quad (8)$$

$$D^{bc\mu} = \frac{1}{2\kappa} [-(\gamma^{\mu bc} + \gamma^{\mu cb}) +$$

$$+ h^{\mu}_{n} (g^{nb} \gamma^{ac}_{a} + g^{nc} \gamma^{ab}_{a}) + g^{bc} V^{\mu}], \quad (9)$$

а τ^{μ}_{a} — координатно-афінний тензор енергії-імпульсу матерії. Крім того, має місце сильна тотожність Ньотер:

$$t^{\mu}_{a} + \nabla_{\sigma} B^{\mu\sigma}_{a} = -\frac{1}{\kappa} G^{\mu}_{a}, \quad (10)$$

де $\nabla_{\sigma} B^{\mu\sigma}_{a} = \frac{1}{e} \partial_{\sigma} (e B^{\mu\sigma}_{a})$ — коваріантна дивергенція антисиметричного тензора $B^{\mu\sigma}_{a}$, а $G^{\mu}_{a} = R^{\mu}_{a} - \frac{1}{2} h^{\mu}_{a} R$ — тензор Ейнштейна. Тотожність (10) на гравітаційній екстремалі $G^{\mu}_{a} = \kappa \tau^{\mu}_{a}$ може бути записаною у вигляді $\partial_{\sigma} S^{\mu\sigma}_{a} = -I^{\mu}_{a}$, де антисиметрична за верхніми індексами тензорна густина $S^{\mu\sigma}_{a} = e B^{\mu\sigma}_{a}$ виступає у ролі суперпотенціалу тензорної густини енергії-імпульсу системи гравітаційного і матеріального полів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974. – 184 с.
2. Samokhvalov S.E. Group theory approach to unification of gravity with internal symmetry gauge interactions / S.E. Samokhvalov, V.S. Vanyashin // Class. Quantum Grav. – 1991. – V.8. – P. 2277-2282.
3. Самохвалов С.Є. Теоретико-групове підґрунтя голографічного принципу // Математичне моделювання. – 2010. – №2(23). – С. 7-11.
4. Самохвалов С.Е. Теоретико-групповое согласование принципов длины и равенства в геометрии / С.Е. Самохвалов, Е.Б. Балакирева // Известия вузов. Математика. – 2015. – №9. – С. 31-45.

пост. 16.11.2016