

С.С. САМОХВАЛОВ, д.т.н., професор serg_samokhval@ukr.net
Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Загальні системи відліку і визначення енергії в теорії гравітації

Загальну теорію відносності (ЗТВ) подано в термінах компонентів фізичних величин відносно довільного афінного реперного поля, яке ототожнюється з загальною глобальною системою відліку. Надано вираз для енергії-імпульсу гравітаційного поля і його власного моменту в заданій системі відліку.

Вступ

В загальній теорії відносності (ЗТВ) під системою відліку розуміється довільна система координат, що визначає в просторі-часі голономне координатне реперне поле $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ [1]. Недоліком цього обмеження в виборі систем відліку є необхідність використання в якості потенціалів гравітаційного поля компонентів метричного тензора $g_{\mu\nu}$, з яких неможливо побудувати скалярний лагранжیان гравітаційного поля, що залежав би від $g_{\mu\nu}$ і їх перших похідних, внаслідок чого в ЗТВ не може бути побудовано тензор енергії-імпульсу гравітаційного поля [2]. Такий тензор може бути побудовано в теорії гравітації в ортогональному репері (ТГОР)¹ [3, 4], де в якості потенціалів гравітаційного поля виступають коефіцієнти h_μ^m переходу між ортонормованим e_m і координатним реперами $\partial_\mu = h_\mu^m e_m$, які є, в певному сенсі, квадратними коренями від метричних коефіцієнтів $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n \eta_{mn}$, де η_{mn} — метрика простору Мінковського. Проте в загальному випадку в якості системи відліку може виступати довільне афінне реперне поле, окремим випадком якого є як координатний репер (що відповідає системам відліку, якими обмежується ЗТВ), так і ортонормований.

В даній роботі більш детально, ніж в замітці [6], представлено теорію гравітації в афінному репері (ТГАР), основні співвідношення якої подано в загальній неголономній системі відліку, тобто відносно довільного афінного реперного поля. Проаналізовано наслідки узагальненої калібрувальної трансляційної інваріантності теорії [7] в загальній системі відліку, а також наслідки інваріантності теорії відносно локальних лінійних перетворень реперних полів, що відповідають переходу між загальними системами відліку і реалізують загальний принцип відносності в ТГАР. Надано вираз для змішаного координатно-реперного тензора енергії-імпульсу та власного моменту імпульсу гравітаційного поля і їх суперпотенціалів.

1. Лагранжیان ТГАР

Хай в просторі X з координатами x^μ , для нумерації яких будемо використовувати грецькі літери, задано афінний репер $e_m = h_m^\mu \partial_\mu$, вектори якого нумеруватимемо латинськими літерами. Припустимо, також, що простір X є (псевдо)рімановим, отже задано скалярний добуток $e_m \cdot e_n = g_{mn}$. Заміну координатних індек-

сів на реперні і навпаки виконуватимемо за допомогою матриць h_m^μ і обернених до них h_μ^m , зокрема $g_{\mu\nu} = h_\mu^m h_\nu^n g_{mn}$. Будемо вважати, також, що в просторі X задано зв'язність з коефіцієнтами γ_{mn}^k в афінному репері e_m . Коефіцієнти неголономності F_{mn}^k реперного поля e_m означаються виразом

$$[e_m, e_n] = F_{mn}^k e_k, \quad (1)$$

де квадратними дужками позначено комутатор векторних полів.

Умовою відсутності скруту є:

$$F_{mn}^k = \gamma_{mn}^k - \gamma_{nm}^k, \quad (2)$$

а умовою узгодженості зв'язності з метрикою:

$$\partial_k g_{mn} = \gamma_{mkn} + \gamma_{nkm}, \quad (3)$$

де $\partial_k g_{mn} := h_k^\mu \partial_\mu g_{mn}$. При виконанні умов (2), (3), коефіцієнти зв'язності розпадаються на суму $\gamma_{mkn} = \omega_{mkn} + \sigma_{mkn}$, де

$$\omega_{mkn} = \frac{1}{2}(F_{kmn} + F_{mkn} - F_{nkm}), \quad (4)$$

$$\sigma_{mkn} = \frac{1}{2}(\partial_n g_{mk} + \partial_k g_{mn} - \partial_m g_{kn}) \quad (5)$$

з властивостями симетрії

$$\omega_{mkn} = -\omega_{nkm}, \quad \sigma_{mkn} = \sigma_{mkn}. \quad (6)$$

Крапку позначається місце, звідки опущено (або піднято) індекс.

Важливим є теоретико-групове значення афінного репера $e_m = h_m^\mu \partial_\mu$ як набору генераторів деформованої групи дифеоморфізмів T^g , а коефіцієнтів неголономності F_{mn}^k , як її структурних функцій, аналогічних структурним константам групи Лі [8, 9]. Тому ці величини в ТГАР, як калібрувальної теорії групи трансляцій, мають важливий фізичний зміст. Зокрема компоненти h_μ^m координатного репера відносно афінного репера виступають в якості потенціалів гравітаційного поля, а коефіцієнти неголономності F_{mn}^k — в якості тензора напруженості гравітаційного поля.

Основними польовими змінними в ТГАР вибираються коефіцієнти переходу h_μ^m між афінним і координатним реперами, а також метричні коефіцієнти g_{mn} і коефіцієнти зв'язності γ_{mn}^m в афінному репері. Такий вибір польових змінних диктує розбиття лагранжіана Гілберта

$$L_R = -\frac{1}{2\kappa} eR, \quad (7)$$

¹ Поширена назва — телепаралельний еквівалент загальної теорії відносності [5]. Але ми будемо користуватися терміном ТГОР, який, на наш погляд, краще відбиває геометричну структуру даної теорії та її калібрувальну симетрію.

де κ — гравітаційна стала Ейнштейна (яку надалі прийматимемо рівною 1), $e := \sqrt{|g_{\mu\nu}|}$, а R — скалярна кривизна простору-часу, на об'ємну складову L_γ (усічений лагранжіан Гілберта), яка не залежить від похідних коефіцієнтів зв'язності $\gamma_{\mu n}^m$ (а за виконання умов (2), (3) — від других похідних h_μ^m і g_{mn}), та поверхневу складову, що має форму дивергенції $\partial_\sigma V^\sigma$, в яку похідні $\gamma_{\mu n}^m$ (другі похідні h_μ^m і g_{mn}) згортаються:

$$L_R = L_\gamma + \partial_\sigma V^\sigma. \quad (8)$$

Дійсно, оскільки

$$\frac{1}{2}eR = \Sigma_m^{n\mu\nu} (\partial_\mu \gamma_{\nu n}^m + \gamma_{\mu s}^m \gamma_{\nu n}^s), \quad (9)$$

де $\Sigma_m^{n\mu\nu} := \frac{1}{2}e\delta_{ms}^{\mu\nu} g^{sn}$, $\delta_{mn}^{\mu\nu} := h_\mu^m h_n^\nu - h_n^\mu h_m^\nu$, перекидаючи в першому доданку формули (9) похідну на перший множник і змінюючи знак, одержуємо:

$$L_R = \partial_\mu \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m - \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\mu s}^m \gamma_{\nu n}^s - \partial_\mu (\Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m). \quad (10)$$

Таким чином,

$$L_\gamma = \partial_\mu \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m - H, \quad H := \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\mu s}^m \gamma_{\nu n}^s, \quad (11)$$

$$V^\sigma = \Sigma_m^{n\nu\sigma} \gamma_{\nu n}^m = e \gamma_n^{[\sigma].} \quad (12)$$

Квадратні дужки тут означають антисиметризацію за індексами, що в них містяться.

Всі доданки розбиття (8), як і сам лагранжіан Гілберта, є скалярними густинами по відношенню до заміни координат x^μ . Загальноковаріантний спосіб виокремлення поверхневого члену з лагранжіану Гілберта є можливим завдяки використанню реперних полів, що не змінюються при заміні координат.

2. Наслідки метричності зв'язності і відсутності скруту

Інтегральна варіація лагранжіана L_γ :

$$\delta' L_\gamma := L'_\gamma(x') \partial x' - L_\gamma(x), \quad (13)$$

де $\partial x' := \left| \partial_\mu x'^\nu \right|$ — якобіан переходу від x до x' , визначається виразом:

$$\delta' L_\gamma = \delta_{h_\nu^n} L_\gamma \delta h_\nu^n + \delta_{g_{mn}} L_\gamma \delta g_{mn} + \delta_{\gamma_{\nu n}^m} L_\gamma \delta \gamma_{\nu n}^m + \partial_\mu (\delta \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m + L_\gamma \delta x^\mu), \quad (14)$$

де $\delta_{q^i} L_\gamma := \partial_{q^i} L_\gamma - \partial_\sigma (\partial_{\sigma q^i} L_\gamma)$ — варіаційні, а $\partial_{q^i} L_\gamma$ — частинні похідні лагранжіана L_γ по полям q^i , δq^i — варіації форми полів q^i .

Варіаційні похідні лагранжіана L_γ по $\gamma_{\nu n}^m$ зводяться до звичайних $\delta_{\gamma_{\nu n}^m} L_\gamma = \partial_{\gamma_{\nu n}^m} L_\gamma$, оскільки L_γ не залежить від їх похідних. За умови відсутності скруту (2) і метричності зв'язності (3) виконується рівняння Палатіні в афінному репері:

$$\partial_{\gamma_{\nu n}^m} L_\gamma = \partial_\sigma \Sigma_m^{n\sigma\nu} - M_m^{n\nu} = 0, \quad (15)$$

де

$$M_m^{n\nu} := \partial_{\gamma_{\nu n}^m} H = \Sigma_m^{s\nu\sigma} \gamma_{\sigma s}^n - \Sigma_s^{n\nu\sigma} \gamma_{\sigma m}^s. \quad (16)$$

Дійсно, за умов (2) і (3) одержуємо:

$$\partial_\sigma \Sigma_m^{n\sigma\nu} = -\frac{1}{2}e g^{ns} (\gamma_{sm}^\nu + \gamma_{sm}^{\nu} - \gamma_{pm}^p h_s^\nu - \gamma_{sp}^p h_m^\nu) \quad (17)$$

що співпадає з результатом для $M_m^{n\nu}$, підрахованим безпосередньо за формулою (16). При одержанні формули (17) враховано, що $e = hl$, де $h := \left| h_\mu^m \right|$ і

$$l := \sqrt{|g_{mn}|}, \text{ а отже } \partial_\sigma (h h_n^\sigma) = h F_{pn}^p, \quad \partial_s l = \frac{1}{2} l g^{mn} \partial_s g_{mn},$$

звідки, за умов (2) і (3), слідує $\partial_\sigma (e h_n^\sigma) = e \gamma_{pn}^p$. Можна показати, що якщо вимагати виконання лише умови відсутності скруту (2), з рівняння Палатіні (15) слідує умова метричності (3), і навпаки [10]. Далі будемо припускати виконання умов (2) і (3), а значить і рівняння Палатіні (15).

Обидві інші варіаційні похідні в формулі (14) виражаються через симетричний в нашому випадку тензор Ейнштейна $G_{mn} = R_{mn} - \frac{1}{2} g_{mn} R$:

$$\delta_{h_\nu^n} L_\gamma = e G_n^\nu, \quad \delta_{g_{mn}} L_\gamma = \frac{1}{2} e G^{mn}, \quad (18)$$

і всі відмінні від нуля доданки з варіаційними похідними в формулі (14) зводяться до виразу:

$$e G_n^\nu \delta h_\nu^n + \frac{1}{2} e G^{mn} \delta g_{mn} = \frac{1}{2} e G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (19)$$

Це свідчить про надмірність кількості полів h_μ^m і g_{mn} для знаходження рівняння руху гравітаційного поля в ТГАР. Так, наприклад, в якості базових польових змінних можна вибрати h_μ^m , а g_{mn} розглядати як параметри. Зокрема, в якості g_{mn} може виступати метрика η_{mn} плоского простору, що відповідає вибору ортонормованих реперних полів, або метрика $g_{\mu\nu}$ простору, який розглядається, що відповідає ЗТВ Ейнштейна, або метрика будь-якого іншого псевдоріманового простору, наприклад простору де-Сіттера. Простір з метрикою g_{mn} може розглядатися як вакуумний, на фоні якого спостерігаються гравітаційні явища, що описуються потенціалами h_μ^m . В теоретико-груповому тлумаченні гравітаційного поля, як калібрувального [8], гравітаційне поле в даному випадку виступає як додеформація базового (вакуумного) простору.

Поверхневий член не впливає на варіаційні похідні, а значить рівняння руху, що слідує з лагранжіана L_R і будь-яких з його усічених варіантів, зокрема L_γ , співпадають.

Оскільки $\delta \Sigma_m^{n\mu\nu}$ залежить лише від полів h_σ^s і g_{ps} , маємо:

$$\delta \Sigma_m^{n\mu\nu} = \partial_{h_\sigma^s} \Sigma_m^{n\mu\nu} \delta h_\sigma^s + \partial_{g_{ps}} \Sigma_m^{n\mu\nu} \delta g_{ps}. \quad (20)$$

Безпосередньо з означення $\Sigma_m^{n\mu\nu}$ знаходимо:

$$\partial_{h_\sigma^s} \Sigma_m^{n\mu\nu} = h_s^\sigma \Sigma_m^{n\mu\nu} + h_s^\mu \Sigma_m^{n\nu\sigma} + h_s^\nu \Sigma_m^{n\sigma\mu}, \quad (21)$$

$$\partial_{g_{ps}} \Sigma_m^{n\mu\nu} = -g^{n\{p} \Sigma_m^{s\}\mu\nu} + \frac{1}{2} g^{ps} \Sigma_m^{n\mu\nu}.$$

(22)

Фігурні дужки тут означають симетризацію за індексами, що в них містяться. Таким чином,

$$\delta \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m = B_s^{\sigma\mu} \delta h_\sigma^s + \frac{1}{2} D^{ps\mu} \delta g_{ps}, \quad (23)$$

де

$$B_s^{\sigma\mu} := \partial_{\partial_\mu h_\sigma^s} L_\gamma = \partial_{h_\sigma^s} \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} D^{ps\mu} := \partial_{\partial_\mu g_{ps}} L_\gamma = \partial_{g_{ps}} \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m \quad (25)$$

— узагальнені імпульси полів h_σ^s та g_{ps} відповідно. З використанням (21), (22) одержуємо:

$$B_s^{\sigma\mu} = e \gamma_s^{\{\sigma \mu\}} - h_\sigma^s V^\mu + h_\sigma^\mu V^\sigma, \quad (26)$$

$$D^{ps\mu} = -e \gamma_n^{\{ps\}} + e \gamma_n^{\{p \ g^s\}} \mu - g^{ps} V^\mu. \quad (27)$$

Формула (14), з врахуванням (15), (18) і (19), приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \delta' L_\gamma = & \frac{1}{2} e G^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + \\ & + \partial_\mu (B_s^{\sigma\mu} \delta h_\sigma^s + \frac{1}{2} D^{ps\mu} \delta g_{ps} + L_\gamma \delta x^\mu). \end{aligned} \quad (28)$$

З рівняння Палатіні (15) слідує $\partial_\mu \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\nu n}^m = 2H$, отже за умови його виконання

$$L_\gamma = H = \Sigma_m^{n\mu\nu} \gamma_{\mu s}^m \gamma_{\nu n}^s. \quad (29)$$

В координатному репері, коли $\gamma_{\mu n}^s$ переходять в символи Крістоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$, лагранжіан L_γ співпадає з усіченим лагранжіаном Гілберта в координатному репері L_Γ [11], а в ортонормованому репері, коли $\gamma_{\mu n}^s$ переходять в коефіцієнти обертання Річчі $\Omega_{\mu j}^i$, лагранжіан L_γ співпадає з лагранжіаном Мьоллера L_Ω [3]. В загальному випадку афінного репера, при застосуванні для лагранжіану L_γ формули (29), треба враховувати виконання умов (2) і (3), отже коефіцієнти зв'язності в цьому випадку вже не будуть довільними і при їх варіюванні треба застосовувати формули (4), (5) для їх складових.

3. Калібрувальна трансляційна інваріантність ТГАР

Лагранжіан Гілберта L_R демонструє унікально широку калібрувальну симетрію G^g , як відносно калібрувальних трансляцій простору-часу (T^g -перетворень), так і відносно переходу між загальними системами відліку — афінними реперними полями (GL^g -перетворень): $G^g = T^g \times GL^g$. В результаті цього і рівняння, одержані з усіченого лагранжіану L_γ , будуть G^g -симетричними. Відзначимо, що перетворення групи G^g тут розглядаються з активної точки зору, тобто як реальні зміщення $x \rightarrow x'$ точок простору X в фіксованих координатах та реальні локальні лінійні перетворення дотичних просторів TX_x , а не їх перепараметризація.

Розглянемо тотожності Ньотер [12], які слідує з калібрувальної інваріантності ТГАР, починаючи з інваріантності відносно перетворень групи T^g , які параметризуємо компонентами t^m векторів локальних

зрушень в афінному репері (деформована група дифеоморфізмів) [8]. В інфінітезимальному випадку T^g -перетворення мають вигляд:

$$\delta x^\mu = h_m^\mu t^m, \quad (30)$$

$$\delta h_\mu^m = -F_{\mu n}^m t^n - \partial_\mu t^m, \quad (31)$$

$$\delta g_{mn} = -\partial_s g_{mn} t^s, \quad (32)$$

в результаті чого інтегральна варіація (28) лагранжіану L_γ при калібрувальних трансляціях приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \delta' L_\gamma = & -e G^{ps} (F_{\{ps\}m} + \frac{1}{2} \partial_m g_{ps}) t^m - G_m^\mu \partial_\mu t^m - \\ & - \partial_\sigma (t_m^\sigma t^m + B_m^{\mu\sigma} \partial_\mu t^m), \end{aligned} \quad (33)$$

або з врахуванням умов (2), (3):

$$\begin{aligned} \delta' L_\gamma = & -e G_n^v (\gamma_{\nu m}^n t^m + \partial_\nu t^n) - \\ & - \partial_\sigma (t_m^\sigma t^m + B_m^{\mu\sigma} \partial_\mu t^m), \end{aligned} \quad (34)$$

де

$$t_m^\sigma := B_s^{\mu\sigma} F_{\mu m}^s + \frac{1}{2} D^{ps\sigma} \partial_m g_{ps} - L_\gamma h_m^\sigma, \quad (35)$$

або з врахуванням умови (3):

$$t_m^\sigma = B_s^{n\sigma} F_{nm}^s + D_s^{n\sigma} \gamma_{mn}^s - L_\gamma h_m^\sigma, \quad (36)$$

а також умови (2):

$$t_m^\sigma = B_s^{n\sigma} \gamma_{nm}^s + M_s^{n\sigma} \gamma_{mn}^s - L_\gamma h_m^\sigma \quad (37)$$

— ньотерівський струм, пов'язаний з калібрувальними трансляціями з групи T^g , який відіграє, таким чином, роль змішаної координатно-реперної тензорної густини енергії-імпульсу гравітаційного поля в ТГАР. В формулі (37) позначено

$$M_m^{n\sigma} := D_m^{n\sigma} - B_m^{n\sigma}. \quad (38)$$

Підстановка виразів (26), (27) в цю формулу дозволяє переконатися, що дана величина співпадає зі складовою рівняння Палатіні, що означається формулою (16), чому вони однаково і позначені. Завважимо крім того, що для позначення величин, які мають різні тензорні розмірності, може використовуватися одна літера без небезпеки сплутати ці величини, як в (33), наприклад, параметри трансляцій t^m і тензорну густину енергії-імпульсу гравітаційного поля t_m^σ .

Внаслідок T^g -інваріантності теорії $\delta' L_\gamma = 0$ мають місце наступні сильні тотожності Ньотер, які одержуються прирівнюванням нулю коефіцієнтів в формулі (34) при параметрах t^m групи T^g і їх похідних:

$$\partial_\sigma t_m^\sigma = -e G_n^\sigma \gamma_{\sigma m}^n, \quad (39)$$

$$\partial_\sigma B_m^{\mu\sigma} + t_m^\mu = -e G_m^\mu, \quad (40)$$

$$B_m^{\{\mu\nu\}} = 0. \quad (41)$$

За наявності матеріальних полів з тензорною густиною енергії-імпульсу τ_m^μ , при виконанні рівнянь Ейнштейна $e G_m^\mu = \tau_m^\mu$, тотожність (40) приймає вигляд:

$$\partial_\sigma B_m^{\mu\sigma} = -T_m^\mu, \quad (42)$$

де $T_m^\mu = t_m^\mu + \tau_m^\mu$, що з врахуванням тотожності (41) при-

зводить до збереження повної густини енергій-імпульсу гравітаційного і матеріальних полів T_m^μ :

$$\partial_\mu T_m^\mu = 0 \quad (43)$$

і свідчить про те, що тензорна густина $B_m^{\mu\sigma}$, яку називатимемо індукцією гравітаційного поля в ТГАР, виступає в ролі суперпотенціалу повної густини енергій-імпульса гравітаційного і матеріальних полів T_m^μ .

На гравітаційній екстремалі $eG_m^\mu = \tau_m^\mu$, і з врахуванням закону збереження $\partial_\sigma t_m^\sigma = -\partial_\sigma \tau_m^\sigma$ тотожність (39) переходить в рівняння руху макроматерії [7]:

$$\partial_\sigma \tau_m^\sigma = \tau_s^\sigma \gamma_{\sigma m}^s. \quad (44)$$

4. Узагальнений принцип відносності в ТГАР

Відмінною особливістю ТГАР є більш широке, ніж в ЗТВ, тлумачення системи відліку, як неголономного в загальному випадку афінного реперного поля. Таке розширення поняття системи відліку в ТГАР веде до розширення загального принципу відносності, який в рамках ТГАР тлумачиться як інваріантність рівнянь гравітаційного поля відносно переходів між загальними системами відліку, які утворюють групу локальних лінійних перетворень GL^g афінних реперних полів. Група GL^g більш широка, ніж група загальноковаріантних перетворень $Diff X$, що описує переходи між голономними реперними полями, прийнятими як системи відліку в ЗТВ, або ніж група локально-лоренцевих перетворень L^g між ортонормованими реперними полями, прийнятими в ТГОР як системи відліку. Ці обидві групи є підгрупами GL^g , отже симетрія ТГАР — більш широка і цікаво зрозуміти, що ця більш широка симетрія означає і до збереження яких величин призводить.

Лагранжіан Гілберта інваріантний відносно GL^g -перетворень, які подамо тут в скінченному вигляді:

$$h_\mu^m = L_m^k h_\mu^k, \quad (45)$$

$$g'_{mn} = L_m^k L_n^l g_{kl}, \quad (46)$$

$$\gamma'^m_{\mu n} = L_m^k L_n^l \gamma_{\mu l}^k + L_m^k \partial_\mu L_n^k, \quad (47)$$

де L_m^k і L_m^k — залежні від x взаємно обернені матриці $L_m^k L_n^k = \delta_n^m$ (які відрізнятимемо по послідовності розташування індексів), в результаті чого рівняння гравітаційного поля в ТГАР є GL^g -інваріантним, хоча розбиття (8) лагранжіана Гілберта на об'ємну і поверхневу частини не є GL^g -інваріантним і при зміні загальної системи відліку між ними відбувається перерозподіл зі збереженням:

$$\Delta L_R = \Delta L_\gamma + \partial_\sigma \Delta V^\sigma = 0, \quad (48)$$

де Δ означає зміну форми функції при GL^g -перетвореннях (45)—(47). Розглянемо спочатку інфінітезимальний варіант перетворень $L_m^k \approx \delta_k^m + l_m^k$ з нескінченно малими параметрами l_m^k , з якими $L_k^m \approx \delta_k^m - l_m^k$ і формули (45)—(47) приймають вигляд:

$$\Delta h_\mu^m = l_m^k h_\mu^k, \quad (49)$$

$$\Delta g_{mn} = -l_m^k g_{kn} - l_n^k g_{mk}, \quad (50)$$

$$\Delta \gamma^m_{\mu n} = l_m^k \gamma^k_{\mu n} - l_n^k \gamma^m_{\mu k} - \partial_\mu l_n^m. \quad (51)$$

З останньої формули, з врахуванням (12), слідує:

$$\Delta V^\sigma = -\sum_m^{n\nu\sigma} \partial_\nu l_n^m. \quad (52)$$

Завважимо, що GL^g -перетворення не діють в просторі-часі, отже $\Delta x^\mu = 0$ і $\Delta g_{\mu\nu} = 0$. Таким чином, з загальної формули (28) в нашому випадку, коли $\delta' = \delta = \Delta$, одержуємо:

$$\Delta L_\gamma = \partial_\sigma (B_m^{\mu\sigma} \Delta h_\mu^m + \frac{1}{2} D^{mn\sigma} \Delta g_{mn}), \quad (53)$$

що з врахуванням умови симетрії (48), виразів (49), (50), (52) і означення (38) дає:

$$\partial_\sigma (M_m^{n\sigma} l_n^m + \sum_m^{n\nu\sigma} \partial_\nu l_n^m) = 0. \quad (54)$$

Цікаво відмітити, що завдяки тому, що $\Delta g_{\mu\nu} = 0$, в виразі (54) немає варіаційних похідних, отже всі тотожності, які одержуються з (54) прирівнюванням коефіцієнтів при параметрах l_n^m групи GL^g і їх похідних, сильні:

$$\partial_\sigma M_m^{n\sigma} = 0, \quad (55)$$

$$\partial_\sigma \sum_m^{n\nu\sigma} + M_m^{n\nu} = 0, \quad (56)$$

$$\sum_m^{n\{\nu\sigma\}} = 0. \quad (57)$$

Величина $M_m^{n\sigma}$ є ньотерівським струмом, який відповідає лінійним перетворенням реперних полів, а $\sum_m^{n\nu\sigma}$ — його суперпотенціалом. Закон збереження (55) є наслідком GL^g -інваріантності ТГАР. Тотожність (56) співпадає з рівнянням Палатіні (15), яке, як бачимо, є наслідком GL^g -інваріантності теорії і описує вираження ньотерівського струму, пов'язаного з інваріантністю ТГАР по відношенню до вибору загальної системи відліку, через суперпотенціал.

Умова (54) GL^g -інваріантності ТГАР для контраріантних параметрів l^{mn} групи GL^g приймає вигляд:

$$\partial_\sigma (S_{mn}^\sigma l^{mn} + \sum_{mn}^{\nu\sigma} \partial_\nu l^{mn}) = 0, \quad (58)$$

де

$$S_{mn}^\sigma := M_{mn}^{\cdot\sigma} + \sum_m^{s\nu\sigma} \partial_\nu g_{sn}. \quad (59)$$

Використовуючи формулу (16) і умову метричності (2), знаходимо:

$$S_{mn}^\sigma = \sum_{ms}^{\nu\sigma} \gamma^s_{\nu n} - \sum_{ns}^{\nu\sigma} \gamma^s_{\nu m}, \quad (60)$$

або з врахуванням умови відсутності скруту (2):

$$S_{mn}^\sigma = \frac{e}{2} (F_{mn}^\sigma - h_m^\sigma \gamma^s_{sn} + h_n^\sigma \gamma^s_{sm}). \quad (61)$$

Завважимо, що S_{mn}^σ , як і $\sum_{mn}^{\nu\sigma}$ — антисиметричні за нижніми індексами. Отже в умову (58) входять лише антисиметричні складові $\omega^{mn} := l^{[mn]}$ параметрів групи GL^g . Перетворення з параметрами ω^{mn} не змінюють метрику g_{mn} в афінному репері, оскільки

$\Delta g_{mn} = -\omega_{mn} - \omega_{nm} = 0$, і відповідають локальним (псевдо)обертанням. Отже струм $S_{mn}{}^\sigma$ має фізичний смисл тензорної густини власного моменту імпульсу (спіну) гравітаційного поля, а $\Sigma_{mn}{}^{v\sigma}$ — його суперпотенціалу. В їх термінах рівняння Палатіні записується у вигляді:

$$\partial_\sigma \Sigma_{mn}{}^{v\sigma} + S_{mn}{}^v = 0. \quad (62)$$

З симетричними складовими $\sigma^{mn} := l^{\{mn\}}$ параметрів групи GL^g , які приводять до деформації метрики в афінному репері $\Delta g_{mn} = -2\sigma_{mn}$ з тензором інфінітезимальної деформації σ_{mn} , зв'язаний ньотерівський струм

$$C_{mn}{}^\sigma = M_{\{mn\}}{}^\sigma + \partial_v g_{s\{m} \Sigma_n\}{}^{sv\sigma}, \quad (63)$$

який тотожно дорівнює нулю. Це ще один аргумент на користь можливості довільного вибору вакуумної метрики g_{mn} , на фоні якої розглядаються гравітаційні явища. Іншими словами можна сказати, що розширення загального принципу відносності, обумовлене використанням афінних реперних полів для завдання систем відліку, яке призводить до розширення локальної симетрії теорії з L^g до GL^g , полягає у волі вибору вакууму з його метрикою. Ця додаткова симетрія може виявитися корисною при знаходженні нових розв'язків в теорії гравітації, а також способів так званого голографічного перенормування енергії.

Висновки

В роботі розширено загальний принцип відносності на використання загальних систем відліку, що описуються довільними неголономними афінними реперними полями. Одержано динамічні рівняння теорії і проаналізовано наслідки її розширеної калібрувальної інваріантності.

С.Г. ДРОНОВ, к.ф.-м.н., доцент

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Керування наближеним розв'язком диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами

В роботі наведено алгоритм пошуку наближеного розв'язку крайової задачі для звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з розривними коефіцієнтами у вигляді кубічного сплайну по нерівномірній сітці, який асимптотично співпадає з інтерполяційним сплайном від точного розв'язку задачі. Особливістю є те, що алгоритм гарантує існування наближеного розв'язку та можливість керування ним.

Постановка проблеми

У математиці та її застосуваннях постійно приходиться мати діло з наближеними представленнями функцій. Класичними апаратами таких представлень є многочлени та раціональні дроби. Теорія наближення функції многочленами була розроблена в трудах П.Л. Чебишева, К. Вейерштрасса, С.Н. Бернштейна та ін. Многочлени та раціональні дроби володіють деякими вадами як апарат наближення для функцій з особливостями та функцій з не дуже високою гладкістю. Головна вада складається у тому, що їх поведінка в околі якоїсь точки визначає їх поведінку взагалі. В зв'язку з цим в останній час наполегливо розробляються апарати

ЛІТЕРАТУРА

1. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности // Собр. научн. трудов т.1. – М.: «Наука». – 1965. – С.452–504.
2. Szabados Laslo B. Quasi-local energy-momentum and angular momentum in general relativity: A Review Article. – Living Rev. Relativity. – 2004. – 7. – P.1–140.
3. Møller C. Conservation laws and absolute parallelism in general relativity // Mat. – Fys. Skr. K. Danske Vid Selsk. – 1961. – 1(10). – P.1–50.
4. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974. – 184 с.
5. Aldrovandi R., Pereira J.G. Teleparallel Gravity: An Introduction. – Heidelberg: Springer, 2013. – 212 p.
6. Самохвалов С.Є., Крикент А.І. Теорія гравітації в афінному репері // Математичне моделювання. – 2016. – №1(34). – С.14–15.
7. Самохвалов С.Є. Наслідки симетрії калібрувальної теорії гравітації // Математичне моделювання. – 2001. – №1(6). – С.23–27.
8. Самохвалов С.Є. Теоретико-групповое описание калибровочных полей // ТМФ. – 1988. – 76, №1. – С. 66–77.
9. Самохвалов С.Є. Теоретико-групповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, №9. – С. 1238–1248.
10. Самохвалов С.Є. Метод Палатіні в афінному репері // Проблеми математичного моделювання. – 2017. – Кам'янське. С.21–23.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
12. Noether E. Invariant Variation Problems // Transport theory and statistical physics. – 1971. – 1(3). – P.183–207.

пост. 23.05.2017

наближення які не будуть мати у собі цих недоліків. Одним з таких апаратів, які найкращим чином зарекомендували себе як в теоретичних так і в прикладних дослідженнях, є сплайн-функції. Особливу увагу приділяли так званим схемам підвищеної точності які давали наближення більш високої точності ніж звичайні сплайн-колокаційні схеми. В роботі будується схема для знаходження наближеного розв'язку у вигляді кубічного сплайну, яка дає максимально можливу точність для цього апарату наближення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Для крайових задач декілька десятиріч будувалися сплайн-колокаційні схеми знаходження наближе-