

## Еконофізичні аспекти формування функції розподілу багатства і доходів в соціально-економічних системах

*Проаналізовано вплив еконофізичних досліджень на формування функції розподілу багатства і доходів в соціально-економічних системах. Показано, як статистична механіка об'єднує фізику та економіку у вигляді еконофізики за допомогою моделі Больцмана-Гіббса і  $k$ -узагальненої моделі.*

*Influence econophysics studies on the formation of wealth and income distribution in socio-economic systems are analyzed. We show how statistical mechanics combines physics and economics as econophysics using the model Boltzmann-Gibbs and  $k$ -generalized model.*

**Ключові слова:** розподіл багатства і доходів, агент-орієнтований підхід, еконофізика,  $k$ -узагальнена модель, степеневий розподіл, експоненціальний розподіл.

**Вступ.** Розвиток сучасної теоретичної економіки в значній мірі пов'язаний з новим напрямком – «еконофізикою», яка ґрунтується на законах фізики та основних рівняннях переносу фізичних процесів. Природно, що сучасні методи статистичної фізики, які описують рівноважні та нерівноважні, стаціонарні та нестаціонарні стани взаємодіючих відкритих систем знайшли своє застосування до опису еволюції економічних систем, зокрема, розподілу багатства і доходів.

Протягом останнього часу в науковій літературі моделюванню розподілу доходів в соціально-економічних системах приділяється достатньо уваги. Вирішенню цієї проблеми присвячено, зокрема, наукові розробки зарубіжних [1-5, 7] та вітчизняних авторів [6], що пов'язані з новим напрямком сучасної теоретичної економіки – еконофізикою. В той же час спостерігається недостатня розробленість даної тематики в Україні, що й стало причиною даного дослідження.

**Постановка завдання.** Сучасні дослідження розподілу доходів і багатства здійснюються в основному економістами та фізиками, причому і тих, і тих цікавить проблема визначення форми розподілу багатства і доходів.

---

Дмитришин Л.І., доцент, к.е.н., доцент кафедри економічної кібернетики, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Зокрема, розвиток еконофізики привніс методи статистичної механіки в розв'язання цієї економічної проблеми, а саме ті, які використовуються в дослідженнях складних і нелінійних систем.

На даний час еконофізика набирає популярності і стає науковим напрямком, що охоплює широкий спектр проблем сучасної економіки. Так, на даний час сформувались три основні напрямки [6]. Перший зводиться до дослідження часових рядів, що описують зміну обміну курсів валют, вартості цінних паперів, товарів, послуг тощо. Другий представлений мережевим аналізом економічних систем, у межах якого кожному агенту (країні, підприємству, трейдеру, товару чи послугі) приписується вузол складної мережі зі зв'язками. Третій полягає у дослідженні розподілу внутрішніх валових продуктів країн та індивідуальних доходів, а також розподілу фірм за чисельністю зайнятих, основного капіталу, кількості реалізованого товару тощо.

На розвитку останнього напрямку, а також його порівнянні із традиційною економікою (мейнстрімом) зупинимось в даній статті детальніше. Зокрема, враховуючи певні критичні зауваження збоку економістів буде показано, як статистична механіка об'єднує фізику та економіку у вигляді еконофізики за допомогою моделі Больцмана-Гіббса і  $k$ -узагальненої моделі. Крім того, буде доведено, що підхід, заснований на використанні статистичної механіки, є актуальним для моделювання розподілу багатства і доходів, і потребує економічної парадигми щодо застосування методів статистичної механіки при моделюванні економічних систем, зокрема, агент-орієнтованого моделювання.

**Результати.** З ранніх досліджень в галузі економіки відомо, що розподіл багатства і доходів є предметом вивчення нерівності в суспільстві, і пов'язаний з іменами Парето, Лоренца, Джині, Жибра, Чамперноуна та інших. Останнім часом увага економістів та еконофізиків зосереджена на аналізі емпіричних даних з використанням методів математичної статистики, зокрема, широкому використанні коефіцієнта Джині для вимірювання нерівномірності у розподілі. Між тим, у відповідності до цілісного підходу, зроблена спроба описати нерівномірність у розподілі математичною моделлю, яка імітує динаміку фізичних осіб за рівнем багатства і доходу на мікрорівні і досліджує розподіл багатства і доходів на макрорівні.

В якості однієї з піонерських робіт у цьому напрямку є робота Енджела, в якій процес розподілу описано у вигляді стохастичної системи взаємодіючих

частинок, схожих у деякій мірі до газів з кінетичної теорії. Встановлено, що нерівномірний процес розподілу підпорядковується статистичному закону, як і в природничих науках. Незалежно від цього, в галузі еконофізики він широко використовується у вигляді класу моделей, які описують складні зв'язки взаємодіючих агентів системи та мають універсальні статистичні властивості. Ці моделі цікаві тим, що вони використовують раніше недосліджені мікропроцеси для пояснення макрофеномену: розподіл багатства при цьому описується експоненціальним та степеневим законами.

Деякі економісти та еконофізики використовують один і той же метод аналізу розподілу багатства і доходів. Причому дослідження еконофізиків відрізняються від мейнстріму в окремих питаннях. З одного боку, еконофізика дистанціюється від вербального та ідеологічного стилю політичної економії і близька до економетрики. Цей напрямок підкреслює важливість кількісного аналізу значної кількості економічних даних. Крім того, він враховує помилки даних, і містить графічний аналіз даних за допомогою формальних і строгих тестувань. Таким чином, це більше, ніж емпірична економетрика, з точки зору емпірика досліджень Фрідмана.

З іншого боку, по методології моделювання даних напрямок дистанціюється від традиційної економіки, яка підкреслює, що модель повинна бути побудована на емпіричних спостереженнях. Таким чином, на практиці еконофізика реалізується на дослідженнях репрезентативного агента в традиційній економіці – мейнстрімі. Крім того, береться до уваги взаємодія агентів, і використовується управлінська база методології. У цьому сенсі для вивчення великого числа взаємодіючих агентів еконофізичний напрямок має ті ж основи, що й агент-орієнтоване моделювання та імітаційні моделі.

Таким чином, еконофізичні дослідження привносять більш високу точність і кращу математичну обробку відповідних досліджень у галузі економіки. По-перше, вони забезпечують чіткий опис універсальної функції розподілу багатства для різних країн по наявній базі даних, тобто використовують різні модифікації степеневих хвостів розподілу для верхньої частини та розподіл Больцмана-Гіббса або гамма-розподіл для дослідження решти розподілу. Це відкриття закономірностей підтверджує їхню обґрунтованість і пояснює визначені основні емпіричні функції розподілу. По-друге, вони намагаються пояснити через відповідні моделі поведінку взаємодіючих агентів, з яких складається економіка.

Важливо відзначити, що ці спроби успішно продемонстрував сформований розподіл Больцмана-Гіббса зі статистичної механіки за аналогією з фізичними системами. Зокрема, досвід статистичної механіки виявився корисним в математизації економіки для розуміння властивостей макроекономічних систем, тобто розподілу багатства і доходів на основі дослідження мікроекономічної поведінки агентів.

Наприклад, такі економісти, як Вальрас, Джевонс, Фішер, Парето спробували зіставити формалізм фізики з формалізмом економіки, замінюючи обміни між економічними агентами потенційною енергією, представленою утилітами, тобто будували аналогові системи за принципом мінімальної дії [1]. Схожі на ці дослідження, експоненціальні моделі розподілу грошей, багатства і доходів отримали свій розвиток завдяки використанню розподілу електроенергії Больцмана-Гіббса. Однак, незважаючи на спокусливі висновки, ці моделі не є достатньо надійними, щоб екстраполювати свої висновки в реальний світ зі стовідсотковою упевненістю, як вказано в роботах критиків-економістів, в тому числі тих, хто тісно пов'язаний з розвитком еконофізики [2]. Але причина цих слабких місць незастосування інструментів або методів статистичної фізики полягає не у зловживанні аналогій, що засновані на принципі статистичної фізики, а швидше на непоінформованості про кінцеву точність статистичної механіки загалом.

Залишається фактом, що проведена аналогія між грошима і енергією у вигляді моделі ідеальних газів є формальною математичною аналогією, базованою на використанні класичної статистичної механіки Больцмана для характеристики ізольованих систем. Для нижнього і середнього діапазону розподілу робиться припущення, що економічна система є близькою і підпорядковується закону збереження для класичної системи частинок. Але здоровий глузд підказує, що реальна економіка є відкритою системою, і розподіл багатства і доходів має степеневі асимптотики. Так що таку реальну систему, безсумнівно, розподіл Больцмана-Гіббса не в змозі пояснити.

Схожа степенева поведінка функції розподілу спостерігалася і у фізичних статистичних системах в діапазоні високих енергій. Для емпіричного підтвердження класичного або квантового статистичного розподілу еконофізиці відомі об'єднуючі схеми. Так, Каніадакісом [3] запропоновано статистичну механіку розглядати в рамках спеціальної теорії відносності,

починаючи з однопараметричної деформації експоненційної функції, що задається наступним чином:

$$\exp_k(x) = \left( \sqrt{1 + k^2 x^2} + kx \right)^{1/k}, \quad (1)$$

причому  $k$ -узагальнена функція зводиться до стандартної експоненти, якщо параметр деформації  $k$  наближається до нуля. Незалежно від значення  $k$ , ця функція має поведінку, дуже схожу на стандартну експоненту при  $x \rightarrow 0$ , і асимптотично наближається до степеневому закону, якщо її аргумент  $x$  прямує до нескінченності, тобто

$$\exp_k(x) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \exp(x), \quad (2)$$

$$\exp_k(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\approx} |2kx|^{\pm \frac{1}{|k|}}. \quad (3)$$

Статистична механіка на основі  $k$ -узагальненої функції зводиться до звичайного розподілу Больцмана-Гіббса, якщо параметр деформації наближається до нуля. Розподіл, отриманий в цій механіці, показує степеневий хвіст

$$f = \exp_k[-\beta(E - \mu)], \quad (4)$$

де  $E$  – енергія,  $\mu$  – хімічний потенціал,  $\beta = 1/\lambda k_B T$  – залежний неспецифічний параметр, який містить всю інформацію про температуру системи,  $\lambda = \sqrt{1 - k^2}$ ,  $k_B$  – константа Больцмана,  $T$  – температура.

Як досліджено в [3],  $k$  визначається як безрозмірний параметр, а узагальнена функція  $\exp_k(x)$  із введенням  $k$  природно з'являється в спеціальній теорії відносності Ейнштейна, так що можна розглядати  $k$ -деформацію, як чистий релятивістський ефект. Таким чином,  $k$ -узагальнена функція може бути використана в якості діючого математичного апарату для дослідження нефізичних систем.

Крім того, статистична механіка, представлена в дослідженні Каніадакіса, не містить вільних параметрів та зберігає незмінною математичну і епістемологічну структуру звичайної статистичної механіки. Таким чином, вона підходить для опису широкого класу досліджуваних явищ, особливо розподілів зі степеневим хвостом в реальній фізичній системі і в природних, економічних і соціальних системах.

Прикладом успішного застосування еконофізики в економічних дослідженнях останнім часом може слугувати робота Клементі [4], в якій адаптовано  $k$ -узагальнену модель зі статистичної механіки до аналізу розподілу за величиною особистих доходів на основі даних обстежень в різних країнах. Основним результатом даного дослідження [4] є те, що статистичні функції розподілу

$$P(x) = \exp_k(-\beta x^\alpha), \quad (5)$$

отримані шляхом застосування принципу максимальної ентропії до  $k$ -узагальненої ентропії  $S_k = -\langle \ln_k(f) \rangle$ , можуть бути адаптовані для моделювання розподілу особистих доходів у всьому діапазоні даних. Даний розподіл відображає особливий характер нижньої частини діапазону даних розподілу доходів, яка близька до розподілу експоненціального типу

$$P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \exp(-\beta x^\alpha), \quad (6)$$

в той час як властивості верхнього хвоста відповідають степеневому закону

$$P(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\approx} \exp(2\beta k)^{-1/k} x^{-\alpha/k}. \quad (7)$$

Відзначимо, що в цьому випадку методи фізики вплинули на область економіки, і вказали новий шлях до вироблення єдиного підходу щодо визначення функції розподілу багатства і доходів.

Важливо відзначити той факт, що статистичний розподіл (а саме  $k$ -узагальнений розподіл) збігається з експоненціальним законом Больцмана-Гіббса зі статистичної механіки для нижньої області енергії у фізичній системі частинок, а також для нижнього діапазону розподілу доходів в економічній системі. Таким чином, як газоподібні, так і стохастичні моделі грошових обмінів можна розглядати в якості відправного пункту для розробки більш складних моделей.

Для розробки моделей відзначимо, що наявність великих наборів даних про поведінку людей в різних економічних системах відкрила новий підхід агент-орієнтованого моделювання в економіці, який на даний час переважає також і в еконофізиці. Як зазначив фізик Фабріціо Лілло [5], «в цьому моделюванні вихід з емпіричних досліджень про поведінку агента буде використовуватися в якості входу для агент-орієнтованого моделювання, яке, в

свою чергу, може дати уявлення про емпіричні факти (і типи даних). Така синергетична взаємодія між агент-орієнтованим моделюванням і емпіричним аналізом ... є найбільш складною ділянкою для діалогу між фізикою і економікою».

**Висновки.** Таким чином, в даній статті показано, як статистична механіка об'єднує фізику та економіку у вигляді еконофізики за допомогою моделі Больцмана-Гіббса і  $k$ -узагальненої моделі, а звідси підхід, заснований на використанні статистичної механіки, є актуальним для моделювання розподілу багатства і доходу, і потребує економічної парадигми щодо застосування методів статистичної механіки при моделюванні економічних систем, зокрема, агент-орієнтованого моделювання.

### Література

1. P. Mirowski, More Heat than Light: Economics as Social Physics, Physics as Nature's Economics (1989) (Cambridge University Press, Cambridge).
2. M. Gallegati, S. Keen, T. Lux and P. Oremerod, «Worrying trends in econophysics», Physica A, № 370, (2006) P. 1-6.
3. G. Kaniadakis, «Non-linear kinetics underlying generalized statistics», Physica A, № 296, (2001) P. 405-425.
4. F. Clementi, M. Gallegati and G. Kaniadakis, «A  $k$ -generalized statistical mechanics approach to income analysis», Journal of Statistical Mechanics Vol.2, (2009) P02037, E-print: <http://arXiv:0902.0075v2>.
5. F. Lillo, «Econophysics and the challenge of efficiency», Complexity, № 14(3), (2009) P. 39-54.
6. Гнатів Б.В. Математичне моделювання економічних процесів методами нерівноважної статистичної механіки / Б.В. Гнатів, Р.М. Токарчук, П.П. Костробій, М.В. Токарчук // Вісник національного університету «Львівська політехніка». – № 696. – 2011. – С.93-100.
7. Эконофизика. Современная физика в поисках экономической теории / под ред. В.В. Харитонов, А.А. Ежова. – М.: МИФИ, 2007. – 624 с.