УДК 517.958:536.72

О.Ю.Чернуха, Центр математичного моделювання ІППММ НАНУ, м.Львів

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕРМОДИФУЗІЇ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНІЙ ШАРУВАТІЙ СМУЗІ

Abstract. In this paper the processes of thermodiffusion in a two-phase randomly inhomogeneous stratified strip are studied. The statement of contact initial boundary-value problem is carried out on the basis of the theory of binary systems. Set of equations for thermodiffusion is obtained for the whole body with account the ideal contact conditions for temperature and nonideal ones for concentration. Set of integro-differential equations, equivalent to the contact initial boundary-value problem of thermodiffusion, is written. Its solution is constructed by the method of successive iterations. The random fields of temperature and concentration is found in terms of Neumann series. Conditions of their absolute and uniform convergence are established.

Key-words: thermodiffusion, randomly inhomogeneous stratified structure, Neumann series, averaging over the ensemble of phase configurations

Анотація. В роботі досліджуються процеси термодифузії у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі. Постановка контактно-крайової задачі зроблена на основі теорії бінарних систем з урахуванням ідеальних умов контакту для температури і неідеальних – для концентрації. Отримана система рівнянь термодифузії для всього тіла. Записана система інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентна контакно-крайовій задачі термодифузії, розв’язок якої побудований метом послідовних наближень. Випадкові поля температури і концентрації знайдені у вигляді рядів Неймана. Встановлені умови абсолютної та рівномірної їхньої збіжності.

Ключові слова: термодифузія, випадково неоднорідна шарувата структура, ряд Неймана, усереднення за ансамблем конфігурацій фаз

Вступ. Кількісні дослідження процесів тепломасопереносу та визначення нестаціонарних полів температури, вологості, тиску тощо, дає можливість знаходити оптимальні конструктивні та експлуатаційні розв’язання для складних інженерних конструкцій, оскільки теплотехнічні та міцнісні характеристики захисних частин будівель визначаються переважно нестаціонарними взаємозв’язаними процесами тепло- і вологопереносу, а інтенсифікація чи зниження в матеріалі фізико-хімічних та фазових перетворень змінює їхню структуру пригранічного шару [1].

У загальному випадку в результаті нерівномірного нагріву середовища (тіла) під впливом градієнта температури відбувається перенесення його компонен - термодифузія (в рідинах – ефект Соре). Якщо між окремими частинами середовища підтримується постійна різниця температур, то внаслідок дифузії в області тіла виникають градієнти концентрації. В стаціонарному стані цей градієнт зрівноважує різницю температур. Таке явище, зокрема, є основою одного з методів розділення ізотопів [2], а також термодифузійного розділення нафтових фракцій або отримання чистих речовин та створення композицій з попередньо заданими властивостями у фармакології [3]. Дифузія в сумішах може викликатися не тільки градієнтом концентрації, але й градієнтом температури [4]. Також має місце і зворотній ефект, тобто перенос тепла у наслідок градієнта концентрації (ефект Дюфора).

До математичного моделювання процесів тепломасопереносу використовують як мікро- так і макропідходи [5, 6]. Так, в першому випадку розглядають поведінку окремих частинок і враховують локальну будову середовища. В роботі розглядається середовище, яке утворено з двох компонент, одне з яких є домінуючим та утворює матрицю. Математичний опис процесів тепломасопереносу у гетерогенних середовищах будують на основі феноменологічних теорій або теорій бінарних систем [7]. Тут досліджуються зв'язані теплові та дифузійні процеси у двофазній шаруватій смузі на основі математичної моделі, побудованої за континуально-термодинамічним підходом [8].

Постановка задачі. Нехай у смузі товщини z_0, що складається з випадково розташованих підшарів двох типів – матриці і включень, відбуваються взаємозв'язані процеси теплопровідності і дифузії домішкової речовини. Приймемо, що фази в області тіла розташовані за рівномірним розподілом. При цьому об'ємна частка матриці v_0 є набагато більшою за об'ємну частку включення v_1.

При нехтуванні конвективною складовою концентрація домішкової речовини $c^{(j)}(z,t)$ та температурне поле $T^{(j)}(z,t)$ ($j = 0; 1$) в області матриці Ω_0 визначається із системи рівнянь [8]

$$\frac{\partial c^{(0)}(z,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 c^{(0)}(z,t)}{\partial z^2} + D_T^{(0)} \frac{\partial^2 T^{(0)}(z,t)}{\partial z^2}, \ z \in \Omega_0, \ t \in [0;\tau], \qquad (1а)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}(z,t)}{\partial t} = \kappa_c^{(0)} \frac{\partial^2 c^{(0)}(z,t)}{\partial z^2} + \kappa_0 \frac{\partial^2 T^{(0)}(z,t)}{\partial z^2}, \ z \in \Omega_0, \ t \in [0;\tau], \qquad (1б)$$

а в області включень Ω_1 - з аналогічних рівнянь з іншими коефіцієнтами

$$\frac{\partial c^{(1)}(z,t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c^{(1)}(z,t)}{\partial z^2} + D_T^{(1)} \frac{\partial^2 T^{(1)}(z,t)}{\partial z^2}, \ z \in \Omega_1, \ t \in [0;\tau], \qquad (2а)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}(z,t)}{\partial t} = \kappa_c^{(1)} \frac{\partial^2 c^{(1)}(z,t)}{\partial z^2} + \kappa_1 \frac{\partial^2 T^{(1)}(z,t)}{\partial z^2}, \ z \in \Omega_1, \ t \in [0;\tau]. \qquad (2б)$$

Тут D_0, D_1 і κ_0, κ_1 - коефіцієнти дифузії і температуропровідності в областях Ω_0 та Ω_1, $D_T^{(0)}$, $D_D^{(1)}$ і $\kappa_c^{(0)}$, $\kappa_c^{(1)}$ - коефіцієнти взаємозв'язку полів температури і концентрації.

Приймаємо, що на границях тіла підтримуються постійні значення концентрації домішкової речовини та температури:

$$c(z,t)\big|_{z=0} = c_* \equiv const\ , \qquad c(z,t)\big|_{z=z_0} = 0\ , \tag{3а}$$

$$T(z,t)\big|_{z=0} = T_* \equiv const\ , \qquad T(z,t)\big|_{z=z_0} = T^* \equiv const\ . \tag{3б}$$

Також накладені такі початкові умови:

$$c(z,t)\big|_{t=0} = 0\ , \qquad T(z,t)\big|_{t=0} = T^*\ . \tag{4}$$

На границях розділу областей $z = z_{i1}$ (межа матриця-включення) і $z = z_{i2}$ (межа включення-матриця) виконуються умови рівності хімічних потенціалів $\mu^{(j)}(z,t)$ та температурного поля [9]

$$\mu^{(0)}(z,t)\Big|_{z=z_{i1}-0} = \mu^{(1)}(z,t)\Big|_{z=z_{i1}+0}, \quad \mu^{(1)}(z,t)\Big|_{z=z_{i2}-0} = \mu^{(0)}(z,t)\Big|_{z=z_{i2}+0} ;\tag{5а}$$

$$T^{(0)}(z,t)\Big|_{z=z_{i1}-0} = T^{(1)}(z,t)\Big|_{z=z_{i1}+0}, \quad T^{(1)}(z,t)\Big|_{z=z_{i2}-0} = T^{(0)}(z,t)\Big|_{z=z_{i2}+0} .\tag{6а}$$

Вважаємо, що мають місце лінійні рівняння стану, зокрема для хімічних потенціалів $\mu^{(j)}$ [8]

$$\mu^{(j)} - \mu_0^{(j)} = d_T^{(j)}\delta T^{(j)} + d^{(j)}c^{(j)}, \quad j = 0;1,$$

де $\mu_0^{(j)}$ - хімічні потенціали для чистої речовини (у вихідній конфігурації); $d_T^{(j)} = T_0^{(j)}\left(\partial\mu^{(j)}/\partial T^{(j)}\right)_{(0)}$, $d^{(j)} = \left(\partial\mu^{(j)}/\partial c^{(j)}\right)_{(0)}$ - матеріальні характеристики системи, $\delta T^{(j)} = T^{(j)} - T_0^{(j)}$. Тоді умови контакту (5а) для концентрацій набудуть вигляду

$$d_T^{(0)}T^{(0)}\Big|_{z_{i1}} + d^{(0)}c^{(0)}\Big|_{z_{i1}} = d_T^{(1)}T^{(1)}\Big|_{z_{i1}} + d^{(1)}c^{(1)}\Big|_{z_{i1}},$$

$$d_T^{(1)}T^{(1)}\Big|_{z_{i2}} + d^{(1)}c^{(1)}\Big|_{z_{i2}} = d_T^{(0)}T^{(0)}\Big|_{z_{i2}} + d^{(0)}c^{(0)}\Big|_{z_{i2}}.$$

Враховуючи (6а), отримаємо

$$d^{(0)}c^{(0)}\Big|_{z_{i1}} = d^{(1)}c^{(1)}\Big|_{z_{i1}} + \left(d_T^{(1)} - d_T^{(0)}\right)T^{(1)}\Big|_{z_{i1}},$$

$$d^{(1)}c^{(1)}\Big|_{z_{i2}} = d^{(0)}c^{(0)}\Big|_{z_{i2}} + \left(d_T^{(0)} - d_T^{(1)}\right)T^{(0)}\Big|_{z_{i2}}. \tag{7а}$$

На границях контакту фаз також виконуються умови рівності відповідних дифузійних і теплових потоків фаз, які, враховуючи структуру рівнянь (1) і (2), можна записати у формі

$$\rho_0\left(D_0\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z} + D_T^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i1}} = \rho_1\left(D_1\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z} + D_T^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i1}},$$

$$\rho_1\left(D_1\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}+D_T^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i2}}=\rho_0\left(D_0\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}+D_T^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i2}},$$

$$\rho_0 C_V^{(0)}\left(\kappa_c^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}+\kappa_0\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i1}}=\rho_1 C_V^{(1)}\left(\kappa_c^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}+\kappa_1\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i1}},$$

$$\rho_1 C_V^{(1)}\left(\kappa_c^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}+\kappa_1\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i2}}=\rho_0 C_V^{(0)}\left(\kappa_c^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}+\kappa_0\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z_{i2}},$$

де ρ_j - густина фази j, $C_V^{(j)}$ - питома теплоємність при постійному об'ємі фази j ($j=0;1$). Ці умови контакту для потоків тепла і маси можна подати у вигляді

$$\aleph_{c1}^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i1}}=\aleph_{c1}^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i1}}+\aleph_{T1}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i1}},$$

$$\aleph_{c2}^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i2}}=\aleph_{c2}^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i2}}+\aleph_{T2}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i2}}; \qquad (7б)$$

$$\aleph_{T1}^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i1}}=\aleph_{T1}^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i1}}+\aleph_{c1}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i1}},$$

$$\aleph_{T2}^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i2}}=\aleph_{T2}^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i2}}+\aleph_{c2}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}\Bigg|_{z_{i2}}. \qquad (6б)$$

Тут

$$\aleph_{c1}^{(0)}=\frac{D_0}{D_T^{(0)}}-\frac{\kappa_c^{(0)}}{\kappa_0},\ \aleph_{c1}^{(1)}=\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_1}{D_T^{(0)}}-\frac{C_V^{(1)}\kappa_c^{(1)}}{C_V^{(0)}\kappa_0}\right),\ \aleph_{T1}=\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_T^{(1)}}{D_T^{(0)}}-\frac{C_V^{(1)}\kappa_1}{C_V^{(0)}\kappa_0}\right);$$

$$\aleph_{c2}^{(1)}=\frac{D_1}{D_T^{(1)}}-\frac{\kappa_c^{(1)}}{\kappa_1},\ \aleph_{c2}^{(0)}=\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_0}{D_T^{(1)}}-\frac{C_V^{(0)}\kappa_c^{(0)}}{C_V^{(1)}\kappa_1}\right),\ \aleph_{T2}=\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_T^{(0)}}{D_T^{(1)}}-\frac{C_V^{(0)}\kappa_0}{C_V^{(1)}\kappa_1}\right);$$

$$\aleph_{T1}^{(0)}=\frac{D_T^{(0)}}{D_0}-\frac{\kappa_0}{\kappa_c^{(0)}},\ \aleph_{T1}^{(1)}=\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_T^{(1)}}{D_0}-\frac{C_V^{(1)}\kappa_1}{C_V^{(0)}\kappa_c^{(0)}}\right),\ \aleph_{c1}=\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_1}{D_0}-\frac{C_V^{(1)}\kappa_c^{(1)}}{C_V^{(0)}\kappa_c^{(0)}}\right);$$

$$\aleph_{T2}^{(1)}=\frac{D_T^{(1)}}{D_1}-\frac{\kappa_1}{\kappa_c^{(1)}},\ \aleph_{T2}^{(0)}=\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_T^{(0)}}{D_1}-\frac{C_V^{(0)}\kappa_0}{C_V^{(1)}\kappa_c^{(1)}}\right),\ \aleph_{c2}=\frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_0}{D_1}-\frac{C_V^{(0)}\kappa_c^{(0)}}{C_V^{(1)}\kappa_c^{(1)}}\right).$$

Система інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентна крайовій задачі. Уведемо в розгляд поля концентрації $c(z,t)$ і температури $T(z,t)$ для цілого тіла.

Враховуючи стрибки функції концентрації та похідних від концентрації та температури на границях контакту $z = z_{i1}$ і $z = z_{i2}$, а також рівність температур на цих же поверхнях, маємо [10]

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\} + \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_1) + \left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_2) + \right.$$
$$\left. + [c]_{z_{i1}} \delta'(z - z_1) + [c]_{z_{i2}} \delta'(z - z_2)\right),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \left\{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} + \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_1) + \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_2)\right).$$

Тут $\{...\}$ - області неперервності функції, $[...]_{z_i}$ - стрибок функції в точці z_i, n_1 - кількість включень.

Тоді система рівнянь тепломасопереносу в цілому тілі набуде вигляду

$$L_1(z,t)[c(z,t);T(z,t)] \equiv \frac{\partial c}{\partial t} - \sum_{j=0}^{1}\sum_{l=1}^{n_j} D_j \eta_{lj}(z)\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\} -$$
$$- \sum_{j=0}^{1}\sum_{l=1}^{n_j} \overline{D}_T^{(j)} \eta_{lj}(z)\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} - \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) - [c]_{z_{i1}} \delta'(z - z_{i1}) - [c]_{z_{i2}} \delta'(z - z_{i2})\right) = 0 \text{ ,(8а)}$$

$$L_2(z,t)[c(z,t);T(z,t)] \equiv \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{j=0}^{1}\sum_{l=1}^{n_j} \overline{\kappa}_c^{(j)} \eta_{lj}(z)\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\} -$$
$$- \sum_{j=0}^{1}\sum_{l=1}^{n_j} \kappa_j \eta_{lj}(z)\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} - \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) - [c]_{z_{i1}} \delta'(z - z_{i1}) - [c]_{z_{i2}} \delta'(z - z_{i2})\right) = 0 \text{ ,(8б)}$$

де $\eta_{lj}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{lj}, \\ 0, & z \notin \Omega_{lj} \end{cases}$ - випадкова функція «структури» [8], Ω_{lj} - l-тий шар фази j, $\bigcup_{l=1}^{n_j} \Omega_{lj} = \Omega_j$; n_j - кількість шарів фази j.

В системі рівнянь (8) додамо і віднімемо детерміновані оператори з коефіцієнтами, що є фізичними характеристиками фази $j = 0$:

$$L_1^{(0)}(z,t)=\frac{\partial_c}{\partial t}-D_0\frac{\partial_c^2}{\partial z^2}-D_T^{(0)}\frac{\partial_T^2}{\partial z^2}\,,\quad L_2^{(0)}(z,t)=\frac{\partial_T}{\partial t}-\kappa_c^{(0)}\frac{\partial_c^2}{\partial z^2}-\kappa_0\frac{\partial_T^2}{\partial z^2}\,.$$

Тут індекс при похідній вказує на яку функцію діє оператор.

Тоді, позначаючи

$$L_s^{(j)}(z)=L_j^{(0)}(z,t)-L_j(z,t)\,,\quad j=1;\,2,$$

отримаємо таку систему взаємозв'язаних диференціальних рівнянь

$$L_1^{(0)}(z,t)\big[c(z,t);T(z,t)\big]=L_s^{(1)}(z)\big[c(z,t);T(z,t)\big],$$
$$L_2^{(0)}(z,t)\big[c(z,t);T(z,t)\big]=L_s^{(2)}(z)\big[c(z,t);T(z,t)\big]. \tag{9}$$

Праву частину системи (9) розглядаємо як джерело, тобто неоднорідність середовища трактуємо як внутрішні джерела. Тоді крайову задачу (9), (3), (4) зводимо до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$c(z,t)=c_0(z,t)+\int_0^t\int_0^{z_0}G_1\big(z,z',t,t'\big)L_s^{(1)}\big[c(z',t');T(z',t')\big]dz'dt'\,,$$

$$T(z,t)=T_0(z,t)+\int_0^t\int_0^{z_0}G_2\big(z,z',t,t'\big)L_s^{(2)}\big[c(z',t');T(z',t')\big]dz'dt'\,, \tag{10}$$

де $c_0(z,t)$, $T_0(z,t)$ - розв'язки однорідної задачі; $G_1(z,z',t,t')$, $G_2(z,z',t,t')$ - функції Гріна задачі (9), (3), (4).

У даному випадку однорідна крайова задача має вигляд

$$\frac{\partial c_0}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2}+D_T^{(0)}\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}\,,\qquad \frac{\partial T_0}{\partial t}=\kappa_c^{(0)}\frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2}+\kappa_0\frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}\,; \tag{11}$$

$$c_0(z,t)\big|_{z=0}=c_*\,,\ \ c_0(z,t)\big|_{z=z_0}=0\,;\ \ T_0(z,t)\big|_{z=0}=T_*\,,\ \ T(z,t)\big|_{z=z_0}=T^*\,;$$

$$c_0(z,t)\big|_{t=0}=0\,,\qquad T_0(z,t)\big|_{t=0}=T^*. \tag{12}$$

Розв'язок задачі термодифузії (11)-(12) можна подати у вигляді [8]

$$c_0(z,t)=c_*\left(1-\frac{z}{z_0}\right)+\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z}{y_n(s_1-s_2)}\Big\{\big[c_*s_1+P_1\big]e^{s_1t}-\big[c_*s_2+P_1\big]e^{s_2t}\Big\},$$

$$T_0(z,t)=T_*+\big(T_*-T^*\big)\left(1-\frac{z}{z_0}\right)+\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z}{y_n(s_1-s_2)}\Big\{\big[\big(T_*-T^*\big)s_1+P_2\big]e^{s_1t}-$$
$$-\big[\big(T_*-T^*\big)s_2+P_2\big]e^{s_2t}\Big\}, \tag{13}$$

де $P_1=\big[c_*\kappa_0-D_T^{(0)}\big(T_*-T^*\big)\big]y_n^2$, $P_2=\big[D_0\big(T_*-T^*\big)-c_*\kappa_c^{(0)}\big]y_n^2$; $y_n=n\pi/z_0$; s_1, s_2 - розв'язки квадратного рівняння $s^2+\zeta_1 s+\zeta_2=0$, тут $\zeta_1=\big(D_0+\kappa_0\big)y_n^2$, $\zeta_2=\big[D_0\kappa_0-D_T^{(0)}\kappa_c^{(0)}\big]y_n^4$. Для того, щоб ряди в (13) були збіжними, s_1 і s_2 повинні бути від'ємними, тобто

$$s_{1,2}=\frac{1}{2}y_n^2\left\{-(D_0+\kappa_0)\pm\sqrt{(D_0-\kappa_0)^2+4D_T^{(0)}\kappa_c^{(0)}}\right\}<0\,.$$

Звідки випливає умова на обмеження коефіцієнтів

$$D_0\kappa_0>D_T^{(0)}\kappa_c^{(0)}\,. \tag{14}$$

Функції Гріна є розв'язками такої крайової задачі

$$\frac{\partial G_1}{\partial t}-D_0\frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2}-D_T^{(0)}\frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2}=\delta(t-t')\delta(z-z')\,,$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial t}-\kappa_c^{(0)}\frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2}-\kappa_0\frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2}=\delta(t-t')\delta(z-z')$$

з нульовими крайовими умовами

$$G_1\big|_{t=0}=G_2\big|_{t=0}=0\,;\;\; G_1\big|_{z=0}=G_2\big|_{z=0}=G_1\big|_{z=z_0}=G_1\big|_{z=z_0}=0\,.$$

А саме [8]

$$G_1(z,z',t,t')=\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z'}{s_1-s_2}\sin y_n z\left\{\left[s_1+P_1'\right]e^{s_1(t-t')}-\left[s_2+P_1'\right]e^{s_2(t-t')}\right\},$$

$$G_2(z,z',t,t')=\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z'}{s_1-s_2}\sin y_n z\left\{\left[s_1+P_2'\right]e^{s_1(t-t')}-\left[s_2+P_2'\right]e^{s_2(t-t')}\right\}, \tag{15}$$

де $P_1'=\left[\kappa_0-D_T^{(0)}\right]y_n^2$, $P_2'=\left[D_0-\kappa_c^{(0)}\right]y_n^2$.

Систему інтегро-диференціальних рівнянь (10) подамо в матричній формі

$$\mathbf{F}(z,t)=\mathbf{F}_0(z,t)+\int_0^t\int_0^{z_0}\mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}(z',t')\,dz'dt'\,, \tag{16}$$

де $\mathbf{F}(z,t)=\begin{pmatrix}c(z,t)\\ T(z,t)\end{pmatrix}$, $\mathbf{F}_0(z,t)=\begin{pmatrix}c_0(z,t)\\ T_0(z,t)\end{pmatrix}$, $\mathbf{L}_s(z)=\begin{pmatrix}L_1^c(z) & L_1^T(z)\\ L_2^c(z) & L_2^T(z)\end{pmatrix}$,

$$\mathbf{G}(z,z',t,t')=\begin{pmatrix}G_1(z,z',t,t') & 0\\ 0 & G_2(z,z',t,t')\end{pmatrix},$$

тут

$$L_i^c(z)=\sum_{l=1}^{n_1}a_i\eta_{l1}(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{l1}}\delta(z-z_{l1})+\left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{l2}}\delta(z-z_{l2})+\right.$$
$$\left.+\left[\;\right]_{z_{l1}}\delta'(z-z_{l1})+\left[\;\right]_{z_{l2}}\delta'(z-z_{l2})\right)\;;$$

$$L_i^T(z)=\sum_{l=1}^{n_1}b_i\eta_{l1}(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{l1}}\delta(z-z_{l1})+\left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{l2}}\delta(z-z_{l2})\right)\;(i=1;2);$$

а також $a_1 = D_1 - D_0$, $a_2 = \kappa_c^{(1)} - \kappa_c^{(0)}$, $b_1 = D_T^{(1)} - D_T^{(0)}$, $b_2 = \kappa_1 - \kappa_0$.

Розв'язок системи інтегродиференціальних рівнянь (10) або (16) шукаємо методом послідовних наближень. За нульове наближення $\mathbf{F}^0(z,t)$ вибираємо вектор розв'язків однорідної крайової задачі $\mathbf{F}^0(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t)$. Тоді отримаємо наступні рекурентні формули для послідовних наближень:

$$\mathbf{F}^1(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}^0(z',t')\, dz'dt',$$

$$\mathbf{F}^2(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}^1(z',t')\, dz'dt',$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{F}^n(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}^{n-1}(z',t')\, dz'dt',$$

$$\ldots$$

У побудованій послідовності вектор-функцій $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{F}^1$, ... , $\mathbf{F}^n$, ... загальний член можна подати так

$$\mathbf{F}^n(z,t) = \mathbf{F}^{n-1}(z,t) + \mathbf{R}_n(z,t),$$

де різницю між n-м та ($n-1$)-м членами послідовності запишемо у вигляді

$$\mathbf{R}_n(z,t) = \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z',z'',t',t'')\mathbf{L}_s(z'') \ldots \times$$

$$\times \int_0^{t^{(n)}} \int_0^{z_0} \mathbf{G}\left(z^{(n-1)}, z^{(n)}, t^{(n-1)}, t^{(n)}\right) \mathbf{L}_s\left(z^{(n)}\right) \mathbf{F}_0(z^{(n)}, t^{(n)})\, dz^{(n)} dt^{(n)} \ldots dz'dt'.$$

Побудованій послідовності ставимо у відповідність такий ряд

$$\mathbf{F}(z,t) \equiv \mathbf{F}_0(z,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}_n(z,t). \qquad (17)$$

Твердження. Якщо коефіцієнти системи рівнянь (1), (2) є обмеженими і справедлива нерівність (14), тоді виконуються такі умови:

1. $\left|\mathbf{G}(z,z',t,t')\right| \le K_1, \quad \forall z,z' \in [0;z_0], \quad \forall t \in [0;\tau], \quad \forall t' \in [0;t]$;

2. $\left|\mathbf{L}_s(z)\mathbf{G}(z,z',t,t')\right| \le K_2, \quad \forall z,z' \in [0;z_0], \quad \forall t \in [0;\tau], \quad \forall t' \in [0;t]$;

3. $\left|\mathbf{L}_s(z)\mathbf{F}_0(z,t)\right| \le K_3, \quad \forall z \in [0;z_0], \quad \forall t \in [0;\tau]$, (18)

де $K_1 = \max\limits_i \sup\limits_{\substack{z,z' \in [0,z_0] \\ t,t' \in [0;\tau]}} \left\{G_i(z,z',t,t')\right\}$, $K_3 = \max\limits_i \sup\limits_{\substack{z \in [0,z_0] \\ t \in [0;\tau]}} \left\{L_i^c(z)c_0(z,t) + L_i^T(z)T_0(z,t)\right\}$

$$K_2 = \max_i \sup_{\substack{z,z' \in [0,z_0] \\ t,t' \in [0;\tau]}} \left\{ L_i^c(z) G_1(z,z',t,t') + L_i^T(z) G_2(z,z',t,t') \right\}, \ i = 1;2.$$

Теорема 1. При виконанні умов Твердження ряд (17) є абсолютно і рівномірно збіжним.

Доведення. З урахуванням співвідношень (18) для загального члена ряду (17) одержимо оцінку

$$\left| \mathbf{R}_n \right| \le K_1 K_2^{n-1} K_3 \frac{(z_0 t)^n}{n!} . \tag{19}$$

Оскільки мажорантний ряд з додатним загальним членом $K_1 K_2^{n-1} K_3 \dfrac{(z_0 t)^n}{n!}$ збігається при $n \to \infty$ для довільних значень K_1, K_2, K_3, z_0, t, то послідовність часткових сум ряду (18) $\left\{ \mathbf{F}^{(n)}(z,t) \right\}$ за ознакою Вейєрштрасса є абсолютно і рівномірно збіжною при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{F}^{(n)}(z,t) = \mathbf{F}(z,t) .$$

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Вектор-функція $\mathbf{F}(z,t) \equiv \mathbf{F}_0(z,t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}_n(z,t)$ є розв'язком матричного рівняння (16).

Доведення. Помножимо зліва обидві частини співвідношення (17) на $\mathbf{G}(z,z',t,t') \mathbf{L}_s$ і проінтегруємо почленно по всій області $\left[0, z_0\right] \bigcup \left[0, t\right]$. Одержимо

$$\int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t') \mathbf{L}_s(z') \mathbf{C}(z',t') \, dz' dt' = \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t') \mathbf{L}_s(z') \times$$

$$\times \left[\mathbf{F}_0(z',t') + \int_0^{t'} \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z',z'',t',t'') \mathbf{L}_s(z'') \mathbf{F}_0(z'',t'') \, dz'' dt'' + \ldots \right] dz' \, dt' =$$

$$= \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t') \mathbf{L}_s(z') \mathbf{F}_0(z',t') \, dz' dt' +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t') \mathbf{L}_s(z') \left[\int_0^{t'} \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z',z'',t',t'') \mathbf{L}_s(z'') \mathbf{F}_0(z'',t'') \, dz'' dt'' \right] dz' \, dt' + \ldots =$$

$$= \mathbf{F}(z,t) - \mathbf{F}_0(z,t) .$$

Таким чином ми показали, що функція $\mathbf{F}(z,t)$ у вигляді (17) задовольняє систему інтегродиференціальних рівнянь (16). І Теорема 2 доведена.

Знайдемо оцінку для залишкових членів ряду (17) $\mathbf{S}_n(z,t)=\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathbf{R}_n(z,t)$.

Оскільки має місце нерівність (19), то, просумувавши праву і ліву частини співвідношення, отримаємо

$$\left|\mathbf{S}_n(z,t)\right|\le\frac{K_1K_3}{K_2}\exp\{K_2z_0\tau\}\left[1-\frac{1}{n!}\Gamma\left(n+1,K_2z_0\tau\right)\right],$$

де $\Gamma\left(n+1,K_2z_0\tau\right)=\int\limits_{K_2z_0\tau}^{\infty}x^n\exp\{-x\}dx$ - додаткова неповна гама-функція.

Усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. Для визначення усереднених полів концентрації та температури обмежимося двома першими членами рядів Неймана, тобто

$$c(z,t)\approx c_0+\int\limits_0^t\int\limits_0^{z_0}G_1(z,z',t,t')\sum_{l=1}^{n_1}\eta_{l1}(z')\left\{\left(D_1-D_0\right)\frac{\partial^2c_0}{\partial z'^2}+\left(D_T^{(1)}-D_T^{(0)}\right)\frac{\partial^2T_0}{\partial z'^2}\right\}dz'dt' \tag{20a}$$

$$T(z,t)\approx T_0+\int\limits_0^t\int\limits_0^{z_0}G_2(z,z',t,t')\sum_{l=1}^{n_1}\eta_{l1}(z')\left\{\left(\kappa_c^{(1)}-\kappa_c^{(0)}\right)\frac{\partial^2c_0}{\partial z'^2}+\left(\kappa_1-\kappa_0\right)\frac{\partial^2T_0}{\partial z'^2}\right\}dz'dt'. \tag{20б}$$

Інші доданки при дії операторів L_i^c, L_i^T дорівнюють нулю, оскільки функції $c_0(z,t)$, $T_0(z,t)$ та їхні похідні не мають стрибків в області тіла.

Усереднимо вирази (20) за ансамблем конфігурацій фаз з рівномірною функцією розподілу. Тут випадковою функцією є тільки $\eta_{l1}(z')$. Враховуючи властивості цієї функції [8], маємо

$$\left\langle c(z,t)\right\rangle_{conf}\approx c_0+\int\limits_0^t\left[\frac{v_1}{h}\int\limits_0^h z'G_1(z,z',t,t')\left\{\left(D_1-D_0\right)\frac{\partial^2c_0}{\partial z'^2}+\left(D_T^{(1)}-D_T^{(0)}\right)\frac{\partial^2T_0}{\partial z'^2}\right\}dz'+\right.$$
$$\left.+v_1\int\limits_h^{z_0}G_1(z,z',t,t')\left\{\left(D_1-D_0\right)\frac{\partial^2c_0}{\partial z'^2}+\left(D_T^{(1)}-D_T^{(0)}\right)\frac{\partial^2T_0}{\partial z'^2}\right\}dz'\right]dt', \tag{21a}$$

$$\left\langle T(z,t)\right\rangle_{conf}\approx T_0+\int\limits_0^t\left[\frac{v_1}{h}\int\limits_0^h z'G_2(z,z',t,t')\left\{\left(\kappa_c^{(1)}-\kappa_c^{(0)}\right)\frac{\partial^2c_0}{\partial z'^2}+\left(\kappa_1-\kappa_2\right)\frac{\partial^2T_0}{\partial z'^2}\right\}dz'+\right.$$
$$\left.+v_1\int\limits_h^{z_0}G_2(z,z',t,t')\left\{\left(\kappa_c^{(1)}-\kappa_c^{(0)}\right)\frac{\partial^2c_0}{\partial z'^2}+\left(\kappa_1-\kappa_0\right)\frac{\partial^2T_0}{\partial z'^2}\right\}dz'\right]dt', \tag{21б}$$

де h - характерна (середня) товщина включень.

Остаточні вирази для зв'язаних полів концентрації домішкової речовини та температури, усереднених за ансамблем конфігурацій фаз, отримаємо, підставляючи вирази для функцій Гріна (15) та відповідних полів в однорідному тілі (13) у формули (21). Враховуючи, що

$$\left(D_1 - D_0\right)\frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + \left(D_T^{(1)} - D_T^{(0)}\right)\frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} = -\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{\sin y_n z}{s_1 - s_2}\left\{Q_1 e^{s_1 t} - Q_2 e^{s_2 t}\right\},$$

$$\left(\kappa_c^{(1)} - \kappa_c^{(0)}\right)\frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + \left(\kappa_1 - \kappa_0\right)\frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} = -\frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{\sin y_n z}{s_1 - s_2}\left\{\overline{Q}_1 e^{s_1 t} - \overline{Q}_2 e^{s_2 t}\right\},$$

де $Q_1 = (D_1 - D_0)\left[c_* s_1 + P_1\right] + \left(D_T^{(1)} - D_T^{(0)}\right)\left[(T_* - T^*)s_1 + P_2\right]$,

$$Q_2 = (D_1 - D_0)\left[c_* s_2 + P_1\right] + \left(D_T^{(1)} - D_T^{(0)}\right)\left[(T_* - T^*)s_2 + P_2\right],$$

$$\overline{Q}_1 = \left(\kappa_c^{(1)} - \kappa_c^{(0)}\right)\left[c_* s_1 + P_1\right] + \left(\kappa_1 - \kappa_0\right)\left[(T_* - T^*)s_1 + P_2\right],$$

$$\overline{Q}_2 = \left(\kappa_c^{(1)} - \kappa_c^{(0)}\right)\left[c_* s_2 + P_1\right] + \left(\kappa_1 - \kappa_0\right)\left[(T_* - T^*)s_2 + P_2\right],$$

отримаємо усереднені за ансамблем реалізації структури тіла поля концентрації та температури:

$$\left\langle c(z,t)\right\rangle_{conf} = c_0(z,t) - \frac{2v_1}{hz_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z}{s_{1n} - s_{2n}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{y_k(A_{kn} - hB_{kn})}{s_{1k} - s_{2k}}\left[\left(s_{1n} + P_1'\right)\left\{\frac{Q_1}{s_{1k} - s_{1n}}\left[e^{s_{1k}t} - e^{s_{1n}t}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{Q_2}{s_{2k} - s_{1n}}\left[e^{s_{2k}t} - e^{s_{1n}t}\right]\right\} + \left(s_{2n} + P_1'\right)\left\{\frac{Q_1}{s_{1k} - s_{2n}}\left[e^{s_{1k}t} - e^{s_{2n}t}\right] - \frac{Q_2}{s_{2k} - s_{2n}}\left[e^{s_{2k}t} - e^{s_{2n}t}\right]\right\}\right]$$

$$\left\langle T(z,t)\right\rangle_{conf} = T_0(z,t) - \frac{2v_1}{hz_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z}{s_{1n} - s_{2n}}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{y_k(A_{kn} - hB_{kn})}{s_{1k} - s_{2k}}\left[\left(s_{1n} + P_2'\right)\left\{\frac{\overline{Q}_1}{s_{1k} - s_{1n}}\left[e^{s_{1k}t} - e^{s_{1n}t}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\overline{Q}_2}{s_{2k} - s_{1n}}\left[e^{s_{2k}t} - e^{s_{1n}t}\right]\right\} + \left(s_{2n} + P_2'\right)\left\{\frac{\overline{Q}_1}{s_{1k} - s_{2n}}\left[e^{s_{1k}t} - e^{s_{2n}t}\right] - \frac{\overline{Q}_2}{s_{2k} - s_{2n}}\left[e^{s_{2k}t} - e^{s_{2n}t}\right]\right\}\right]$$

Тут

$$A_{kn} = \frac{1}{(y_n + y_k)^2} - \frac{1}{(y_n - y_k)^2} - \frac{\cos(y_n + y_k)h}{(y_n + y_k)^2} + \frac{\cos(y_n - y_k)h}{(y_n - y_k)^2} - h\frac{\sin(y_n + y_k)h}{y_n + y_k} +$$

$$+ h\frac{\sin(y_n - y_k)h}{y_n - y_k}, \quad B_{kn} = \frac{\sin(y_n + y_k)h}{y_n + y_k} - h\frac{\sin(y_n - y_k)h}{y_n - y_k}; \quad s_{1n,2n} \equiv s_{1,2}, \quad s_{1k,2k} -$$

вирази $s_{1,2}$, в яких n замінено на k.

Висновки. Таким чином за допомогою теорії узагальнених функцій контактна задача термодифузії у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі, постановка якої зроблена за математичною моделлю бінарних систем, зведена до системи рівнянь, що описують процеси в усьому тілі, включаючи стрибки функції концентрації та рівність температур на границях розділу фаз, а також рівність масових і теплових потоків на цих межах. Отримання даної системи диференціальних рівнянь дозволило записати систему інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентну крайовій задачі математичної фізики, розв'язок якої побудований метом послідовних наближень. Випадкові поля температури і концентрації знайдені у вигляді рядів Неймана. Встановлені умови абсолютної та рівномірної їхньої збіжності.

Підкреслимо, що існування розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь та збіжність відповідних інтегральних рядів доведено для випадку, коли ядра оператора містять як множник випадкову функцію координат. При цьому не використовується жодних обмежень на густину функції розподілу фаз в області тіла. Тобто запропонована схема дослідження даного класу задач термодифузії справедлива за довільної конфігурації фаз.

1. *Садыков Р.А.* Расчет теплотехнических характеристик ограждающих конструкций с учетом термодиффузии и фильтрации влаги / Материалы Международной научно-технической конференции «Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции». – М.: МГСУ, 2005. – С. 115-121.
2. *Белащенко Д.К.* Явления переноса в жидких металлах и полупроводниках. – М.: Атомиздат, 1970. – 379 с.
3. *Савиных Б.В., Гумеров Ф.М.* Взаимная диффузия жидкостей в электрических полях // Химия и компьютерное моделирование. Бутлеровские сообщения. – 2002. - № 10. – С. 213-220.
4. *Лыков А.В., Михайлов Ю.А.* Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
5. *Хорошун Л.П.* Методы случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред // Прикл. механика. – 1978. – Т. 14, № 2. – С. 3-17.
6. *Lidzba D.* Homogenisation theories applied to porous media mechanics // J. Theor. and Appl. Mechanics. - 1998. – V. 36, № 3. – P. 657-679.
7. *Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – К.: Наукова думка, 2006. – 272 с.
8. *Чапля Є.Я., Чернуха О.Ю.* Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. - К.: Наук. думка, 2009. – 302 с.
9. *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. – М.: Мир, 1971. – 295 с.
10. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. – 527 с.

Поступила 18.02.2013р.