ефективно ідентифікувати об'єкт, незважаючи на зміну умов його спостереження, наприклад освітлення, перекриття його частин, зміни кута зору і ін. Розробка такої системи чи її окремих елементів є перспективним та актуальним напрямком наукових досліджень. Описаний метод триангуляції є перспективним з точки зору досліджень та дозволяє побудувати карту віддалей від точки спостереження до об'єкта для подальшого вирішення задач класифікації та розпізнавання зображення.


1. *J.Y. Aloimonos, I. Weiss and A. Bandopadhay.* "Active Vision", International Journal on Computer Vision, pp. 333-356, 1987.
2. *R. Bajcsy.* "Active Perception", IEEE Proceedings, Vol. 76, No 8, pp. 996-1006, August 1988.
3. *Вудвортс Р. С.* Зрительное восприятие глубины / Психология ощущений и восприятия. –М.: ЧеРо, 1999. –с.343-382.
4. *Trucco E; Verri A.* "Introductory Techniques for 3-D Computer Vision." Prentice Hall, 1998.
5. *Hartley R; Zisserman A.* "Multiple View Geometry in Computer Vision." Cambridge University Press, 2003.
6. *Hartley R; Zisserman A.* "Multiple View Geometry in Computer Vision." Cambridge University Press, 2003.
7. *Moravec H.* **"**Robot Spatial Perception by Stereoscopic Vision and 3D Evidence Grids" Carnegie Mellon University, 1996.
8. National Instruments "Robotics Fundamentals Series: Stereo Vision" , 2008.



*Поступила 21.02.2013р.*



УДК 621.391.24



Ю.М. Романишин[1),2)], д.т.н., С.Р. Петрицька[1)], Р.М. Якимів[1)], Т.В. Копина[3)]
[1)] Національний університет "Львівська політехніка"
[2)] University of Warmia and Mazury in Olsztyn, Poland
[3)] Національний авіаційний університет, м. Київ


# МОЖЛИВОСТІ ПОБУДОВИ ОРТОГОНАЛЬНОГО ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСУ НА ОСНОВІ ЗАДАНОЇ ВЕЙВЛЕТ-ФУНКЦІЇ


Розглянуто задачу синтезу ортогонального вейвлет-базису на основі заданої вейвлет-функції. Для її розв'язання використовуються кратномасштабні співвідношення та оптимізаційна задача найкращого наближення заданої функції вейвлет-функцією. Отримано рівняння для ітераційної процедури визначення масштабуючої функції та коефіцієнтів реконструкції.



*Ключові слова*: ортогональний вейвлет-базис, вейвлет-функція, масштабуюча функція, сімейство функцій Добеші

Рассмотрена задача синтеза ортогонального вейвлет-базиса на основе заданной вейвлет-функции. Для ее решения используются кратномасштабные соотношения и оптимизационная задача наилучшего приближения заданной функции вейвлет-функцией. Получены уравнения для итерационной процедуры определения масштабирующей функции и коэффициентов реконструкции.

*Ключевые слова*: ортогональный вейвлет-базис, вейвлет-функция, масштабирующая функция, семейство функций Добеши

The problem of orthogonal wavelet basis synthesis on the base of specified wavelet function is considered. For the solving of it the multiscale formulas and optimization task of the best approaching of the specified function by wavelet function are used. The equations for iteration procedure of calculation of scaling function and reconstruction coefficients are obtained.

*Keywords*: orthogonal wavelet basis, wavelet function, scaling function, Daubechies family functions

**Вступ.** Вейвлет-аналіз сигналів має очевидні переваги над їх спектральним аналізом і широко використовується в різних задачах перетворення та масштабно-часового дослідження сигналів [1-4]. Особливо важливим вейвлет-базисом сигналів є ортогональний та біортогональний. Перетворення сигналів в таких базисах реалізуються швидкодіючими алгоритмами. Використання дискретних вейвлет-перетворень звичайно базується на застосуванні відомих ортогональних вейвлет-базисів (масштабуючих та вейвлет-функцій), наприклад, вейвлет-базисів сімейства Добеші **dbn** [5]. При цьому виникає задача вибору відповідного вейвлет-базису, а для сімейства базисів ще й вибір номера представника сімейства. Однак часто відомі ортогональні вейвлет-базиси можуть бути достатньо далекими за формою від заданих функцій, які потрібно розкласти в ортогональному вейвлет-базисі. Синтез ортогонального вейвлет-базису може здійснюватися різними методами, наприклад, вейвлет-базис Добеші синтезується на основі рівності нулю моментів відповідних порядків. Однак при цьому не враховується форма відповідних масштабуючих та вейвлет-функцій, хоча в практичних задачах звичайно буває необхідність побудови ортогонального вейвлет-базису, базисна вейвлет-функція якого близька за формою до досліджуваного сигналу. У зв'язку з цим виникає задача побудови ортогонального вейвлет-базису на основі заданої вейвлет-функції.

**Метою роботи** є синтез ортогонального вейвлет-базису для заданого сигналу, який розглядається як вейвлет-функція.

**Постановка задачі.** В [6] для побудови ортогонального базису використовується процедура Грама-Шмідта системи функцій, утворених послідовними зміщеннями в часі заданого імпульсу. Для визначення часових зміщень використано перший та другий моменти функції, що описує сигнал. Як зміщення використовується ефективна тривалість імпульсу (подвійне значення часової невизначеності сигналу). Однак при такій побудові ортогонального базису задану форму зберігає лише перший незміщений імпульс. Всі інші, отримані в результаті ортогоналізації Грама-Шмідта, звичайно мають іншу форму.

Нехай задана деяка функція $\psi^*(x)$, яка, задовольняючи умовам:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)dx = 0 ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\psi^*(x))^2 dx = 1 , \tag{1}$$

може розглядатися як вейвлет-функція.

Поставимо задачу знаходження масштабуючої функції $\varphi(x)$, відповідної їй вейвлет-функції $\psi(x)$ та деяких наборів коефіцієнтів реконструкції $c_0$, $c_1$ ,…, $c_{n-1}$ та $d_0$, $d_1$,…, $d_{n-1}$, таких, які повинні задовольняти умовам:

$$\varphi(x) = c_0\varphi(2x) + c_1\varphi(2x-1) + ... + c_{n-1}\varphi(2x-(n-1)) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\varphi(2x-i) ; \tag{2}$$

$$\psi(x) = d_0\varphi(2x) + d_1\varphi(2x-1) + ... + d_{n-1}\varphi(2x-(n-1)) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i\varphi(2x-i) ; \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx = 0 ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(x))^2 dx = 1 ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi(x))^2 dx = 1 ; \tag{4}$$

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} (\psi(x) - \psi^*(x))^2 dx \to \min . \tag{5}$$

Перші два співвідношення відображають відомі властивості кратного масштабування для масштабуючих та вейвлет-функцій, формули (4) визначають нормування функцій, а співвідношення (5) формулює оптимізаційну задачу найкращого наближення заданої вейвлет-функції.

**Визначення масштабуючої і вейвлет-функції та коефіцієнтів реконструкції.** Коефіцієнти реконструкції $c_i$, $d_j$ пов’язані між собою. Так, наприклад, для сімейства вейвлетів Добеші **dbn** кількість коефіцієнтів є парною ($n = 2m$), ці коефіцієнти пов’язані, зокрема, співвідношенням $d_i = (-1)^i c_{2m-1-i}$, $i = \overline{0;2m-1}$. Це дає змогу звести невідомі коефіцієнти до одного виду, наприклад $c_i$, та в два рази зменшити кількість невідомих коефіцієнтів. При цьому вейвлет-функція $\psi(x)$ представляється у вигляді:

$$\psi(x) = c_{n-1}\varphi(2x) - c_{n-2}\varphi(2x-1) + ... - c_0\varphi(2x-(n-1)) . \tag{6}$$

Умова екстремуму $\Delta$ по коефіцієнтах $c_i$, $i = \overline{0;n-1}$ :

$$\frac{\partial\Delta}{\partial c_i}=0\,,\ i=\overline{0;n-1}\,. \tag{7}$$

У відповідності з цією умовою та представленням $\psi(x)$, отримаємо систему рівнянь:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\psi(x)-\psi^*(x))\varphi(2x-i)dx=0\,,\ i=\overline{0;n-1}\,. \tag{8}$$

Використовуючи представлення $\varphi(x)$ та $\psi(x)$, отримаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j c_{n-1-j}\varphi(2x-j)-\psi^*(x))\varphi(2x-i)dx=0\,,\quad i=\overline{0;n-1} \tag{9}$$

або

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j c_{n-1-j}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(2x-j)\varphi(2x-i)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\varphi(2x-i)dx\,,\ i=\overline{0;n-1}\,. \tag{10}$$

Отримана система є системою $n$ лінійних алгебраїчних рівнянь щодо $n$ невідомих коефіцієнтів розкладу $c_i$, $i=\overline{0;n-1}$.

В цих рівняннях невідомою є також функція $\varphi(x)$. У зв'язку з цим для знаходження функції $\varphi(x)$ та коефіцієнтів $c_i$, $i=\overline{0;n-1}$ використовується ітераційна процедура. Задається деяке початкове наближення функції $\varphi(x)=\varphi_0(x)$, розв'язується система рівнянь (10) щодо коефіцієнтів $c_i$, за виразом (2) обчислюється наступне наближення $\varphi_1(x)$ з наступним нормуванням $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\varphi_1(x))^2dx=1$ і т.д. до отримання заданої точності.

**Тестування процедури синтезу ортогонального вейвлет-базису.** Перевірка можливості застосування такої процедури для синтезу ортогонального вейвлет-базису проводилася на відомій масштабуючій і вейвлет-функції **db4** на кількох тестах. Для цього базису відомими є коефіцієнти реконструкції цих функцій за відомою масштабуючою функцією з подвійним аргументом та відповідними зміщеннями.

Першим тестом є ітераційна процедура визначення масштабуючої функції при заданих коефіцієнтах реконструкції $c_i$, $i=\overline{0;7}$ у відповідності зі співвідношенням (2). При цьому задавалося деяке початкове наближення функції $\varphi_0(x)$ (було вибрано прямокутний імпульс тривалістю, що дорівнює половині тривалості масштабуючої функції). При кількості ітерацій 8 спостерігаються високочастотні осциляції функцій $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ (рис.1,а). Ці осциляції можна усунути, використовуючи відповідну фільтрацію.

При кількості ітерацій 10 отримані масштабуюча $\varphi(x)$ та вейвлет-функція $\psi(x)$ практично співпали з отриманими за допомогою функції **wavefun('db4',10)** [7, 8] системи MATLAB (рис. 1,б), які обчислюються за іншим ітераційним алгоритмом.

Наступним тестом було визначення коефіцієнтів реконструкції при заданих масштабуючій та вейвлет-функції, як розв'язків системи лінійних рівнянь (10) з реалізацією процедури числового інтегрування. Отримані при цьому коефіцієнти реконструкції з максимальною відносною похибкою 3% співпали зі значеннями коефіцієнтів реконструкції для ортогонального базису **db4**, обчисленими функцією **wfilters('db4')**.

Останньою повною тестовою задачею було визначення масштабуючої і вейвлет-функції та коефіцієнтів реконструкції за заданою функцією як вейвлет-функцією на основі наведеної ітераційної процедури з багаторазовим розв'язуванням системи лінійних рівнянь (10). Як початкове значення масштабуючої функції використовувалася відповідна вейвлет-функція. Необхідна кількість ітерацій (при якій осциляції результатів практично були відсутні) становила 60.

**Узагальнення задачі.** В класичних ортогональних вейвлет-базисах вважається, що масштаб є степенем 2, а крок аргументу (при одиничному масштабі) дорівнює 1. В загальному випадку масштабуюча та вейвлет-функція представляються у вигляді:

$$\varphi(x) = c_0\varphi(ax) + c_1\varphi(ax-b) + \ldots + c_{n-1}\varphi(ax-(n-1)b) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\varphi(ax-ib)\,; \quad (11)$$

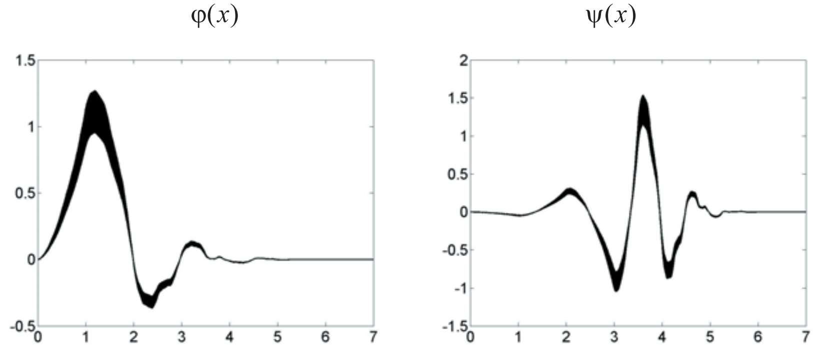
$$\psi(x) = d_0\varphi(ax) + d_1\varphi(ax-b) + \ldots + d_{n-1}\varphi(ax-(n-1)b) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i\varphi(ax-ib)\,, \quad (12)$$

де $a$ - масштаб; $b$ - зміщення.

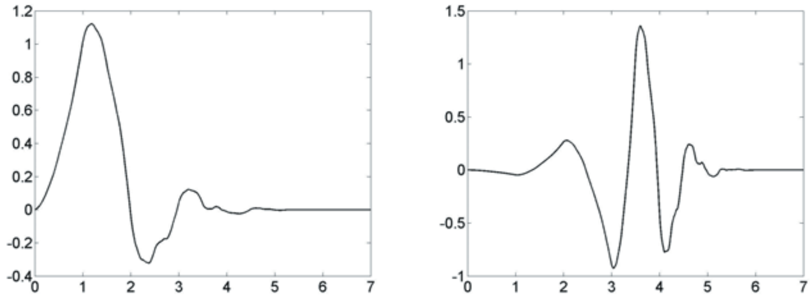
Аналогічним чином формулюється задача знаходження масштабуючої функції $\varphi(x)$, відповідної їй вейвлет-функції $\psi(x)$, масштабу $a$, зміщення $b$ та деяких наборів коефіцієнтів реконструкції $c_0$, $c_1, \ldots$, $c_{n-1}$ та $d_0$, $d_1, \ldots$, $d_{n-1}$, таких, які повинні задовольняти умові оптимального наближення (5).

Умови екстремуму $\Delta$ по коефіцієнтах $c_i$, $i = \overline{0; n-1}$, масштабу $a$ та зміщення $b$ (коефіцієнти $d_j$ виражаються через $c_i$):

$$\frac{\partial\Delta}{\partial c_i} = 0\,,\ i = \overline{0; n-1}\,; \quad \frac{\partial\Delta}{\partial a} = 0\,; \quad \frac{\partial\Delta}{\partial b} = 0\,. \quad (13)$$




а)



б)

Рис. 1. Реконструкція масштабуючої $\varphi(x)$ та вейвлет-функції $\psi(x)$ при 8 (а) та 10 (б) ітераціях

В результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j c_{n-1-j}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(ax-jb)\varphi(ax-ib)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\varphi(ax-ib)dx\ ,\ i=\overline{0;n-1}\ ;\ (14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j c_{n-1-j}\varphi(ax-jb)-\psi^*(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i c_{n-1-i}\varphi'(ax-ib)x\right)dx=0\ ;\ \ (15)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j c_{n-1-j}\varphi(ax-jb)-\psi^*(x)\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i c_{n-1-i}\varphi'(ax-ib)i\right)dx=0\ .\ \ (16)$$

На відміну від системи рівнянь (10), ця система рівнянь є нелінійною, у зв'язку з чим ітераційні процедури необхідні як для визначення послідовних наближень функції $\varphi(x)$, так і для визначення коефіцієнтів реконструкції $c_0$,

$c_1, \ldots, c_{n-1}$, масштабу $a$ та зміщення $b$. Крім того, при цьому необхідно реалізовувати в числовому вигляді як інтегрування, так і диференціювання масштабуючої функції.

Інший можливий варіант побудови ортогонального базису полягає в часовому масштабуванні заданої функції таким чином, щоб можна було використати співвідношення (2), (3). При цьому також потрібно розв'язувати оптимізаційну задачу щодо масштабів за критерієм (5).

**Висновки.** При практичних застосуваннях дискретних вейвлет-перетворень виникає задача вибору відповідного ортогонального (або біортогонального) вейвлет-базису, причому найбільш доцільним є вибір такого базису, в якому материнська вейвлет-функція (або масштабуюча функція) була близька за формою до досліджуваного сигналу, що забезпечує невелику кількість ненульових коефіцієнтів розкладу сигналу в цьому базисі. Як правило, в практичних задачах складно знайти відповідний базис, що обумовлює доцільність синтезу відповідного базису. Для синтезу ортогонального вейвлет-базису можуть бути використані співвідношення кратного масштабування та розв'язок відповідної оптимізаційної задачі. У випадку використання класичних співвідношень з масштабом 2 та зміщенням 1 розв'язок задачі здійснюється ітераційною процедурою, в якій розв'язується система лінійних рівнянь щодо коефіцієнтів реконструкції. В більш загальному випадку довільних масштабів та зміщень відповідні системи рівнянь є нелінійними.

1. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
2. *Чуи Ч.* Введение в вэйвлеты: Пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
3. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории: Пер. с нем. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2004. – 280 с.
4. *Воробьев В.И., Грибунин В.Г.* Теория и практика вейвлет-преобразования. – С.-Петербург: Военный университет связи, 1999. – 204 с.
5. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. – 464 с.
6. *Новиков Л.В.* Адаптивный вейвлет-анализ сигналов // Научное приборостроение. - 1999. - Т. 9, № 2. – 13 с.
7. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 448 с.
8. *Смоленцев Н.К.* Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.

*Поступила 21.02.2013р.*