УДК 004.722

Ю.В.Кравченко, С.А.Микусь, м. Київ

МЕТОД ПОЕТАПНОГО ЗМЕНШЕННЯ ПОТУЖНОСТІ БАЗИ МАТРОІДА В ЗАДАЧАХ ПОБУДОВИ ТОПОЛОГІЇ СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗКУ

The method of gradual decrease power base k-uniform matroids to topology optimization problems of communication and automated command and control.

*Keywords***:** base k-uniform matroids, topology, communication system and automated command and control.

Вступ. При синтезі складних технічних систем, до яких в повної мірі відноситься системи зв'язку і автоматизованого управління військами (АУВ) виникає необхідність рішення задач дискретної оптимізації. Для цих задач, як відоме, важлива боротьба за точність. Дослідження показали що в багатьох випадках тільки повний або направлених перебір можуть дати точне рішення. Як завжди, повний перебір не можливий через проблему великої розмірності. Відомо, що серед методів та алгоритмів направленого перебору той найкращий для якого до початку перебору або його протягом можливо відшкодувати, як можна більше, неперспективних варіантів (елементів множені допустимих рішень). Для складних систем множина допустимих рішень при завданні оптимізації структури є комбінаторним об'єктом, а цільова функція визначається алгоритмічно. В таких умовах актуальним є розробка найбільш ефективних методів пошуку точного рішення. Існуюча теорія дискретної оптимізації, яка досить повно описана в багатьох наукових роботах вимагає розвитку, щодо конкретних технічних завдань. Це пов'язано з тім що основою процедури, яка дозволяє зменшити область допустимих рішень є апріорна інформація, яка безпосередньо залежить від конкретної ситуації або технічної системи [1-9].

Метою статті є доведення результатів досліджень щодо розробки методу поетапного зменшення потужності бази k-однорідного матроїда для організації направленого перебору в задачах дискретної оптимізації на прикладі оптимізації топології системи зв'язку і автоматизованого управління військами.

Основна частина. Введемо поняття матроїда топології системи зв'язку і АУВ.

Визначен ня 1. Матроід – комбінаторний об'єкт, що представляє собою пару $M=(E,\varepsilon)$, де E – кінцева непуста множина елементів багатогранника, а ε – непуста множина його підмножин (які назвемо базами), задовольняючим наступним двом умовам:

В1). Ніяка з баз не міститься в іншій базі.

B2). Якщо B_1 і B_2 – бази, то для будь-якого елемента $b \in B_1$ існує такий елемент $c \in B_1$, що $(B_1 \setminus b) \cup c$ – також база.

Існують інші еквівалентні визначення матроїда. Поняття матроїда відіграє важливу роль у комбінаторній теорії.

База (базіс) матроїда – максимальне по включенню незалежна множина елементів багатогранника.

Незалежні множини елементів матроїда – сімейство ε підмножин елементів з *E*, що задовольняють наступним аксіомам:

I0). $\varnothing \in \varepsilon$;

I1). Якщо $X \in \varepsilon$ й $Y \subseteq X$, то $Y \in \varepsilon$;

I2). Якщо *X*, *Y* – елементи з ε такі, що $|X| = |Y| + 1$, то існує $X \in X \setminus Y$ такий, що $Y \cup \{x\} \in \varepsilon$.

Підмножина з *E*, не приналежна ε , називається залежною. Тому що I0 треба з I1, то як система аксіом можна взяти I1 і I2. Крім того, існують варіанти аксіоми I'2, I"2, еквівалентні I2:

I'2). Якщо *X*, $Y \in \varepsilon$ і $|Y| < |X|$, то в $X \setminus Y$ існує елемент *x* такий, що $Y \cup \{x\} \in \varepsilon$.

I"2). Якщо *X*, $Y \in \varepsilon$ і $|Y| < |X|$, то в *X* існує така підмножина *Z*, що $Y \cup Z \in \varepsilon$ і $\left|Y \cup Z\right| = \left|X\right|$.

Рангом M будемо називати число елементів його бази. Поняття рангу матроїда введено у зв'язку з тим, що будь-які дві бази містять однакову кількість елементів. Дана властивість є результатом багаторазового застосування B2.

Визначення 2. Матроїдом топології системи зв'язку і АУВ називається пара $M = (E, \varepsilon)$, де *E* – кінцева непуста множина елементів матроїда, що представляють собою зв'язки між елементами, а ε – непуста множина його підмножин (названих базами).

Матроїд топології системи зв'язку і АУВ є *k-однорідний* матроїд на *E*, базами якого є всі незалежні між собою підмножини множини *E*, що містять рівно *k* елементів.

Нескладно помітити, що потужність множини допустимих рішень *A*, елементами якого є варіанти побудови топології системи зв'язку і АУВ $\left|A\right| = 2^N$, отже, область можливих варіантів *A* – булеан. Як відомо, булеан – окремий випадок такого комбінаторного об'єкту, як матроїд. У роботі [2] запропонований комбінаторний підхід у дискретній оптимізації, що для синтезу складної технічної системи розглядається, як сукупність методу часткових порядків, концепції опуклості в частково впорядкованих множинах і схеми побудови серії градієнтних алгоритмів.

Суть методу часткових порядків у тім, що з елементів припустимої множини можливих рішень задачі дискретної оптимізації формується така частково впорядкована множина (*у-множина*), для якої цільові функції є порядково-випуклими, тобто і функції й їхні градієнти монотонні уздовж ланцюгів, побудованих частковим порядком. Процедуру формування частково впорядкованої множини іноді називають зануренням допустимої множини рішень задачі дискретної оптимізації в частково впорядковану множину. У методі часткових порядків інформація про клас цільових функцій задається у вигляді часткового порядку на припустимій множині *A*.

Нехай $\prec$ − інформація про клас *F*, тоді при рішенні задачі дискретної оптимізації із цільовою функцією із класу *F* звертання до *f-оракула* необхідно лише в точках, що є максимальними елементами *у-множини A*, тому що серед них перебуває хоча б один оптимальний елемент. Тому трудомісткість будь-якого алгоритму *Al*, що вирішує довільну задачу дискретної оптимізації із цільовою функцією *f* із класу *F*, оцінюється потужністю максимальної бази: $\varphi(Al, f) = \left|A^{\max}\right|$.

Нагадаємо, що елемент *x* з *A* називається максимальним елементом *у-множини (A,* $\prec$*)*, якщо не існує іншого елемента *y* з *A*, що $x \prec y$. Множина всіх максимальних елементів *у-множини (A,* $\prec$*)* називаємо максимальною базою і позначаємо A_{max}. Аналогічно вводиться мінімальний елемент і максимальна база A_{min}. Дати конструктивний опис елементів максимальної бази вдається не для кожної задачі дискретної оптимізації. Особливий інтерес представляють задачі, у яких максимальний елемент єдиний. У таких задачах максимальний елемент є оптимальним, і немає необхідності обчислювати цільову функцію в яких-небудь точках.

Побудова максимальної бази A_{max} більшості *у-множин (A,* $\prec$*)* натрапляє на істотні ускладнення. Основні з них пов'язані із проблемою конструктивного опису множини *A*. Звичайно добре описана тільки деяка множина *H*, що містить *A*. Такою множиною може бути булевий куб, ґрати Z^N цілих точок в R^N. Функцію *g* на *H*, що володіє властивістю $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$, називають *g-оракулом* (*g-оракул* може перевірити приналежність множині *A* будь-якому елементу з *H).* Трудомісткість алгоритму *Al* побудови максимальної бази будемо оцінювати числом $\psi(Al, g)$ викликів *g-оракула*. *У-множину (H,* $\prec$*)* зручно представляти за допомогою діаграми Хассе, у якій точки зображують елементи з *H*, причому якщо $a \prec b$, то *a* розташовують під *b* і з'єднують *a* і *b* відрізком. Це з'єднання роблять лише тоді, коли з того, що $z \in H$ і $a \prec z \prec b$, слідує, що $a = z$ або $z = b$. У цьому випадку говорять, що елемент *b* слідує за *a*, елемент *a* безпосередньо передує *b*. Отже, метод часткових порядків дозволяє одержати оптимальне або субоптимальне рішення задачі дискретної оптимізації без трудомісткого обчислення цільової функції по відомій апріорній інформації про клас цільової функції через відношення часткового порядку.

Доведено, що на матроїді градієнтні алгоритми знаходять, як правило, оптимальне рішення. В основі доказу лежить ідея широко відомої для передгеометрії теореми Радо-Едмонса [3].

Той факт, що множина допустимих рішень ототожнюється з матроідом, означає, що для рішення поставленої задачі можна застосовувати жадібний алгоритм, однак із цього не слідує, що не може існувати ще більш ефективного алгоритму. З іншого боку, якщо (E, ε) не є матроідом, то це ще не означає, що жадібний алгоритм не знайде правильного рішення, все залежить від властивості конкретної функції ω [3]. Жадібні алгоритми і їхні властивості досліджені дуже добре та їхнє знання при рішенні оптимізаційних задач важливо. Якщо вдається звести подібну задачу до того, що множина допустимих рішень є матроідом, то в більшості випадків варто застосовувати жадібний алгоритм, оскільки він досить ефективний у практичному змісті. Якщо ж виявиться навпаки і множина можливих варіантів не утворить матроід, тоді, швидше за все, градієнтний алгоритм не буде ефективний.

Нехай є кінцева множина $У = E, |E| = n$, вагова функція $\omega : E \to R_{+}$ і сімейство $\varepsilon \subset 2^{E}$.

Розглянемо задачу: знайти $X \in \varepsilon$, за умови $\omega(X) = \max\limits_{Y \in t} \omega(Y)$, де $\omega(Z) := \sum\limits_{e \in Z \subset E} \omega(e)$. Інакше кажучи, необхідно відшукати в зазначеному сімействі підмножину найбільшої ваги.

Нехай $\omega(e_1) \geq ... \geq \omega(e_n) > 0$, тоді жадібний алгоритм має вигляд:

вхід: множина $E = \{e_1, ..., e_n\}$, сімейство його підмножин ε і вагова функція ω. Множина *E* впорядкована в порядку убування ваг елементів.

Вхід: множина *X*.

X: = $\varnothing$ {початкова множина *X* порожньо}.

for *i* from 1 to *n* do.

if $X \cup \{e_i\} \in \varepsilon$ then.

$X := X \cup \{e_i\}$ {додаємо в *X* перший підходящий елемент}.

end if end for.

Очевидно, що при побудові остаточна множина $X \in \varepsilon$. Також очевидно, що жадібний алгоритм є надзвичайно ефективним і лінійним, не вважаючи витрат на сортування множини *E* і перевірку незалежності $X \cup \{e_i\} \in \varepsilon$. Основне питання полягає в тому, у яких випадках жадібний алгоритм дійсно вирішує поставлену задачу [3].

Ідея застосування градієнтних алгоритмів при оптимізації топології системи зв’язку і АУВ заснована на особливостях функціонування системи. Тому як градієнтом виступає відношення мажоризації, дійсно, для такої системи збільшення кількості елементів (зв'язків між елементами) однозначно веде до росту (або не до зниження) значення показників ефективності функціонування.

Пропонується пошук рішення здійснювати за принципом послідовного зменшення кількості надлишкових елементів і зв'язків структури для забезпечення відновлення максимальних функціональних можливостей при мінімальному використанні ресурсу (надмірності) (рис. 1). На всіх етапах занурення множини допустимих рішень в частково впорядковану множину здійснюється на основі відношення мажоризації. Спочатку формується *k*-однорідний топології системи зв'язку і АУВ з елементів і зв'язків, множина баз, яких є множиною всіх можливих структур з максимальної кількості елементів і зв'язків $\mathrm{M} = (\mathrm{E}, \varepsilon); \mathrm{A} \subseteq \varepsilon; \rho(\mathrm{A}) = |\mathrm{A}|$. Далі застосування *greedy*-алгоритму дозволяє знайти найкраще рішення, для якого розраховується значення показника ефективності. Слід зазначити, що перебір варіантів здійснюється по всіх видах надмірності $\alpha^* = \arg\max P(\alpha)\ \forall \alpha \in A_1$ при $P(\alpha^*) \geq P_{ЗАД}$.

На наступному етапі відбувається зменшення потужності бази матроїд на одиницю

$$\mathrm{M}_{-1} = (\mathrm{E} \setminus \mathrm{e}, \varepsilon_{-1}); \mathrm{A}_{-1} \subseteq \varepsilon_{-1}; \rho(\mathrm{A}_{-1}) = |\mathrm{A}_{-1}|; \rho(\mathrm{A}) - \rho(\mathrm{A}_{-1}) = 1,$$

і попередня процедура повторюється із застосуванням градієнтного алгоритму і розрахунком значення показника функціональної стійкості. Далі виконується по показнику функціональної стійкості порівняння знайденого рішення із заданим рівнем функціональної стійкості.

Для рішення, що задовольняє по показнику ефективності, послідовно перевіряються варіанти, включені за допомогою відносини порядку в даний варіант із метою пошуку рішення з мінімальним застосуванням надмірності і заданим рівнем функціональної стійкості. Процедура поетапного зменшення потужності бази матроїда буде тривати доти, поки рішення не вийде за межі потрібної ефективності. У цьому випадку оптимальним буде рішення, отримане на попередньому етапі $\alpha^* = \arg\max P(\alpha)\ \forall \alpha \in A$.

Даний метод класифікується як точний метод дискретної оптимізації, а саме градієнтний метод спрямованого перебору.

Оцінка ефективності розробленого методу.

Ефективність розробленого методу оцінимо по кількості звернень до *f-оракула* і визначимо виграш у порівнянні з повним перебором.

Тому що при повному переборі число звертань до цільової функції для алгоритму $B_П$ дорівнює потужності множини можливих рішень $\varphi(B_П, F) = |A|$, то при булевих змінних $\varphi(B_П, F) = 2^N$; де N − кількість можливих елементів у топології системи зв'язку і АУВ.

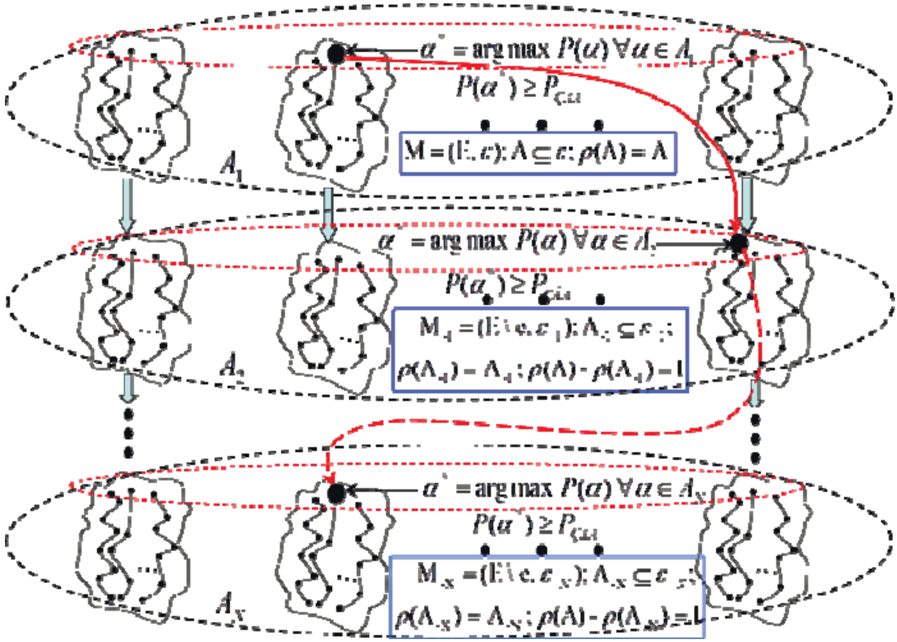

Рис.1. Схема пошуку рішення по методу поетапного зменшення потужності бази (базису) матроїда

Нескладно помітити, що виграш Δ при застосуванні розробленого алгоритму B_P у звертанні до *f-оракула* в порівнянні з алгоритмом $B_П$ повного перебору дорівнює

$$\Delta = \varphi(B_П, F) - \varphi(B_P, F) \approx k(2^N - \frac{N!}{m!(N-m)!}) ,$$

де:

k – коефіцієнт пропорційності;

m – кількість типів надмірності в структурі системи.

Результати моделювання виграшу при різних варіаціях N, m показані на графіках (рис. 2,3). Вони підтверджують ефективність розробленого методу, а також збіжність отриманих результатів з відповідними, відомими раніше, результатами дискретної оптимізації.

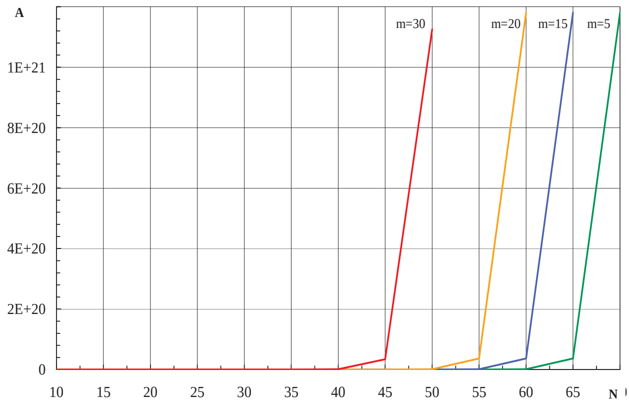

Рис. 2. Залежність виграшу від максимально можливої кількості елементів у топології системи зв'язку і АУВ

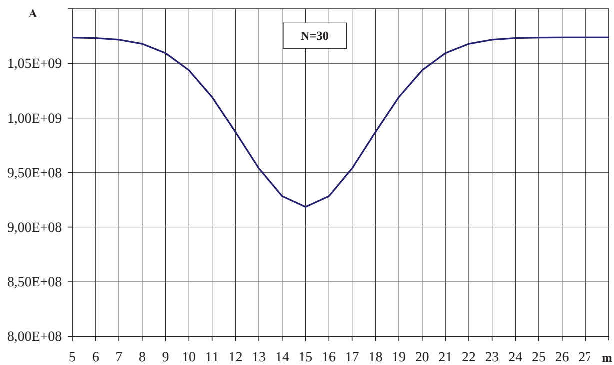

Рис. 3. Залежність виграшу від кількості типів надмірності в топології системи зв'язку і АУВ при N=30

Висновки

Таким чином, запропоновано метод поетапного зменшення потужності бази (базиса) матроїда, який класифікується як точний метод дискретної оптимізації, побудований за принципом направленого або неявного перебору. В основі методу є науково-обґрунтоване положення про те, що область допустимих рішень асоціюється з таким комбінаторним об'єктом, як матроїд, та про те, що максимальна за включенням незалежна підмножина множини допустимих рішень, тобто база (базис) матроїда, відображає мінімально-необхідний склад топології системи. Запропонований метод дозволив розробити методику оптимізації топології системи зв'язку і АУВ.

1. *Емеличев В. А.* Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников/ В. А. Емеличев, М. М. Ковалев, М. А. Кравцов. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 344 с.
2. *Ковалев М. М.* Матроиды в дискретной оптимизации / М. М. Ковалев. – Минск: Изд-во «Университетское», 1987. – 222 с.
3. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов. – 2-е изд. / Ф.А. Новиков // – СПб.: «Питер», 2005. – 364 с.
4. *Баранов Г. Л.* Структурное моделирование сложных динамических систем / Г. Л. Баранов, А. В. Макаров. – К.: Наукова думка, 1986. – 272 с.
5. Большие технические системы: проектирование и управление / Л. М. Артюшин, Ю. К. Зиатдинов, И. А. Попов, А. В. Харченко / Под ред. И. А. Попова. – Харьков: Факт, 1997. – 284 с.
6. *Ковалев М. М.* Дискретная оптимизация (целочисленное программирование) / М. М. Ковалев. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.
7. *Кравченко Ю. В.* Методология многокритериальной дискретной оптимизации сложных технических систем на матроидных структурах / Ю. В. Кравченко, В. В. Афанасьев // Збірник наукових праць ІПМ в Е ім. Г. Є. Пухова. – Вип. 22 – 1. – К.: ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова – 2003. – С. 73 – 78.
8. *Кравченко Ю. В.* Применение метода последовательного увеличения ранга k-однородного матроида в задаче синтеза структуры псевдоспутниковой радионавигационной системы / Ю. В. Кравченко // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. – К.: 2008. – №2(2). – С. 19 – 22.
9. *Неділько С. М.* Основи теорії функціональної стійкості автоматизованої системи управління повітряним рухом / С. М. Неділько. – Кіровоград: ДЛАУ, 2011. – 220 с.

Поступила 16.9.2013р.

УДК 007.355

І.О.Ляшенко, м. Київ

ПОШУК МІНІМАЛЬНОГО РОЗРІЗУ ЗА РЕБРАМИ НА МУЛЬТИПОЛЮСНІЙ МЕРЕЖІ ПРАВИЛ МОДЕЛІ КВАНТОВОГО ПРЕДСТАВЛЕННЯ БАГАТОВИМІРНОГО ІНФОРМАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ ІНФОРМАЦІЙНО-УПРАВЛЯЮЧИХ СИСТЕМ СПЕЦІАЛЬНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ

We pr opose a method of graphs to check the route inference мultipole network of rules to multidimensional information space of information and control systems for special purposes in order to ensure their survivability with minimum cut of ribs

Keywords: information and control systems, quantum, method counts, minimal incision, rib, route inference.

Постановка проблеми в загальному вигляді. Невпинний науково-технічний прогрес на сучасному етапі передбачає бурхливий розвиток та