

М. Є. Фриз, М. А. Стадник, м. Тернопіль

## ЛІНІЙНИЙ ПЕРІОДИЧНИЙ ВИПАДКОВИЙ ПРОЦЕС ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УСТАЛЕНОГО ЗОРОВОГО ВИКЛИКАНОГО ПОТЕНЦІАЛУ

**Abstract.** The mathematical model of steady-state visual evoked potential as a linear periodical random process is justified. Creation mechanism of steady-state visual evoked potential from individual neurons of the human brain is described. The periodicity of mathematical model characteristics function is proved.

### Вступ

Зоровим викликаним потенціалом (ЗВП) називається відповідь зорової системи людини (зорового аналізатора і зорових відділів мозку) на зовнішнє світлове подразнення. В загальній практиці в залежності від частоти стимуляції його поділяють на фазовий (1-4 Гц) та усталений (5-30 Гц).

Детальний біофізичний опис механізму генерації ЗВП, методів та умов реєстрації, застосування у медицині наведено у роботах [1, 2]. У повсякденній клінічній практиці офтальмологи використовують усереднені реалізації усталених ЗВП для визначення наступних характеристик: максимумів, мінімумів, точок переходу через нуль, площі під кривою.

Враховуючи дослідження останніх 40 років, можна стверджувати, що усталені ЗВП застосовуються у багатьох парадигмах: когнітивній, клінічній неврології, інженерній (використання у нейро-комп'ютерному інтерфейсі). Метод усталених ЗВП є досить популярним у клінічній діагностиці [3].

Отже дослідження усталених ЗВП є актуальною проблемою, а завдання побудови адекватної математичної моделі є першочерговим. Важливо щоб модель була придатною не лише для визначення діагностичних характеристик досліджуваного сигналу, але і відображала біофізичну суть процесу генерування усталених ЗВП.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Першою і найпростішою моделлю, що застосовували науковці є адитивна. Її складовими є детермінована функція, що представляє ЗВП, та центрований слабостационарний випадковий процес, що відображає фонову електроенцефалограму (ЕЕГ). Основне застосування такої моделі полягає у виконанні усереднення на множині постстимульних реалізацій сигналу і виділення викликаного потенціалу [1,4]. Недоліком адитивної моделі є обмежена можливість використання ймовірнісних методів, що полягає лише у визначенні першої моментної функції, що при сучасній адекватній діагностиці є недостатньо.

Поширеною моделлю є компонентна, складовими якої є сигнали, породжені окремими відділами мозку людини [2]. Для того щоб виділити

ЗВП у рамках цієї моделі використовують відомі методи PCA (аналіз головних компонент) та ICA (аналіз незалежних компонент). В результаті дослідник отримує набір компонент, до кожної з яких необхідно побудувати модель і відповідні методи аналізу, що є дуже трудомістким процесом.

У роботі [2] описано використання моделі штучної нейронної мережі. Така модель не враховує стохастичність усталеного ЗВП, процес навчання є досить тривалим для досягнення оптимальних вагових коефіцієнтів.

Використання GARCH моделі (узагальнена авторегресійна умовна гетероскедастичність) описано у статті [5]. Основною її перевагою є те, що вона використовується для моделювання стохастичних процесів із швидкою зміною спектральних властивостей. Проте для математичного опису усталених ЗВП її використовувати недоцільно, адже вона не враховує циклічність подання стимулів.

У роботі [6] детально описано використання лінійного випадкового процесу (ЛВП) в якості моделі ЗВП. Результируючий сигнал автори подають як суму кусково-стаціонарного випадкового процесу і детермінованої функції, при цьому досліджують сигнал лише на інтервалах стаціонарності. Як відомо, процес електричної активності мозку є нестаціонарним, а тому необхідно обґрунтувати та експериментально визначити межі стаціонарності. Великою перевагою цієї моделі, порівняно із іншими, є її біофізичне підґрунтя, опис сигналу за допомогою моментних функцій вищих порядків.

Для опису усталеного ЗВП використовується модель стохастичного періодичного випадкового процесу, що подана у [7]. Ймовірнісні характеристики цієї моделі є періодичними функціями часу, а тому враховано циклічність подання стимулів, проте не взято до уваги біофізичні особливості формування сигналу.

### **Постановка завдання**

В статті [8] було побудовано та обґрунтовано математичну модель усталених ЗВП у вигляді лінійного випадкового процесу. Основним завданням даної статті є удосконалення раніше використаної моделі із врахуванням наступних вимог: можливість врахування циклічних властивостей усталених ЗВП, зумовлених ритмічністю фотостимуляції, врахувати стохастичність ЗВП, можливість відображення біофізичного механізму формування сигналу, визначення інформативно-діагностичних параметрів, які б відображали біофізичну суть досліджуваного процесу, можливість використання в задачах офтальмологічної діагностики та комп'ютерного імітаційного моделювання.

### **Періодичні випадкові процеси**

Властивість періодичності часто зустрічається як у фізичних так і штучних процесах, що викликають значний дослідницький інтерес. Реалізації періодичних випадкових процесів не є періодичними функціями від часу, проте ймовірнісні характеристики сигналів періодично змінюється у часі. Такі процеси називають періодичними, ритмічними, циклостаціонарними,

періодично нестационарними, періодично корельованими [9].

Згідно означення поданого у [10,11] сепарабельний випадковий процес  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$  називається періодичним за Слущким (коротко  $T$ -періодичним), якщо існує таке число  $T > 0$ , що  $n$ -вимірна функція розподілу є періодичною з періодом  $T$  за сукупністю часових аргументів ( $l \in \mathbf{Z}$ ):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + lT, t_2 + lT, \dots, t_n + lT). \quad (1)$$

У рамках кореляційної теорії випадковий процес описують беручи до уваги лише перші дві його моментні функції. У випадку, коли математичне сподівання та кореляційна функція розглядуваного процесу будуть періодичними за сукупністю своїх аргументів, то такий випадковий процес називають періодично корельованим (ПКВП).

### Механізм генерації усталеного ЗВП

Розглянемо коротко процес формування викликаного потенціалу (більший детальний опис наведено у [1, 2, 8]). Після подразнення нервової клітини генерує імпульс, що називається потенціалом дії (ПД). Останній за рахунок енергії клітини поширюється по нервовому волокну, змінюючи потенціал сусідніх ділянок та спричиняючи виникнення збуджуючих та гальмівних післясинаптичних потенціалів (ЗПСП, ГПСП). Наступний нейрон знову отримує потенціали і, підсумовуючи їх, формує новий ПД. Такий процес генерації активності мозку є справедливим і для формування усталеного ЗВП, що схематично зображений на рисунку 1.

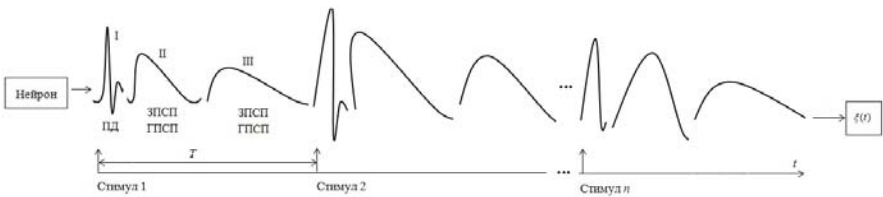


Рис. 1. Схематичне зображення механізму генерації усталеного ЗВП (ПД – потенціал дії, ЗПСП, ГПСП – збуджуючий та гальмівний післясинаптичний потенціал; I, II, III – компоненти ЗВП згідно [3])

Важливо, що усталений ЗВП формується під дією циклічної стимуляції зорового апарату із певною частотою подання фотостимулів. Відповідно, процес генерування потенціалів кожним нейроном буде періодичним, тобто після кожного стимулу мозок буде продукувати нові потенціали, які в результаті складуть усталений ЗВП.

У роботі [3] автори стверджують, що до складу результуючого усталеного ЗВП входять наступні три компоненти: основна, що знаходиться у діапазоні високих частот (гамма-ритм 25-60 Гц) із типовою приблизною тривалістю 30-60 мс; вторинна компонента із частотою 15-25 Гц, більш високою індивідуальною варіабельністю і тривалістю близько 85-120 мс;

ритмічна із частотою нижче 15 Гц і тривалістю 135-350 мс.

### Обґрунтування періодичних властивостей моделі усталеного ЗВП

У роботі [8] автори на основі наукових робіт, сучасних теорій електрогенезису обґрунтували математичну модель усталеного ЗВП як лінійний випадковий процес (ЛВП) та представили її у наступному вигляді:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau, t) d\pi_1(\tau), \quad (2)$$

де  $\pi_1(\tau)$ ,  $\tau \in (-\infty, \infty)$ ,  $\mathbf{P}\{\pi_1(0) = 0\} = 1$  – узагальнений пуассонівський процес;  $\varphi(\tau, t)$  – ядро ЛВП, невідповідна функція, що представлена виразом:

$$\varphi(\tau, t) = e^{-\beta(\tau)(t-\tau)} \sin(\omega(\tau)(t-\tau))U(t-\tau), \quad (3)$$

$U(s)$  – функція Хевісайда;  $\beta(\tau) > 0$  – невідповідна функція, що характеризує коефіцієнт затухання імпульсу;  $\omega(\tau) > 0$  – невідповідна функція, що характеризує частоту імпульсу.

Згідно зображення (2) ЗВП є сумою імпульсів виду (3), що виникають у послідовні випадкові моменти часу  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  (моменти стрибків процесу  $\pi_1(\tau)$ ) і мають амплітуди  $\alpha_n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  (величини стрибків процесу  $\pi_1(\tau)$ ).

Для обґрунтування періодичних властивостей запропонованої математичної моделі скористаємось теоремою, що наведена у роботі [10]: якщо існує дійсне число (період)  $T > 0$  таке, що для породжуючого процесу  $\pi(\tau)$ ,  $\pi(0) = 0$  виконуються умови  $da(\tau) = da(\tau + T)$  і  $d_x d_\tau K(x; \tau) = d_x d_\tau K(x; \tau + T)$ , де  $a(\tau) = \mathbf{M} \pi_1(\tau)$ ;  $K(x; \tau)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$  – пуассонівський спектр стрибків у формі А.М. Колмогорова, а ядро  $\varphi(\tau, t)$  має властивість  $\varphi(\tau, t) = \varphi(\tau + T, t + T)$ , то ЛВП є періодичним (за Слуцьким) випадковим процесом. Інакше кажучи, ЛВП буде періодичним тоді, коли ядро є періодичне і породжуючий процес буде процесом із незалежними періодичними приростами.

Для доведення періодичності приростів породжуючого процесу скористаємось твердженням, наведеним у роботі [3], згідно якого фотостимуляція з певною частотою подання спричиняє виникнення імпульсів у мозку із тією ж частотою. Через це можна стверджувати що інтенсивність появи імпульсів буде періодичною, тобто:  $\lambda(\tau) = \lambda(\tau + T)$ . На рис.1 схематично показано, що після подання першого стимулу виникають імпульси спершу із великою амплітудою, згодом із меншою, подібна тенденція зберігається після кожного фотостимулу. Це призводить до того, що амплітудні значення будуть ритмічно повторюватись у часі, а відповідно до цього їх функція розподілу буде періодичною:  $F_\alpha(x; \tau) = F_\alpha(x; \tau + T)$ . Таким

чином, породжуючий процес  $\pi_1(\tau)$  є процесом із незалежними періодичними приростами.

Згідно з [3], усталений ЗВП генерується за допомогою компонент, частотні характеристики яких повторюються у часі. Після збудження зорового аналізатора виникають спочатку імпульси із високою частотою і швидкою тенденцією до зменшення амплітуди, згодом вторинні імпульси із меншою частотою і нижчим коефіцієнтом затухання (рис. 1). Така тенденція до генерування імпульсів повторюється циклічно відповідно до частоти фотостимуляції. На основі вищенаписаного, будемо стверджувати, що:

$$\omega(\tau) = \omega(\tau + T), \quad \beta(\tau) = \beta(\tau + T). \quad (4)$$

Запишемо ядро ЛВП (3) з врахуванням періодичності (4):

$$\begin{aligned} \varphi(\tau + T, t + T) &= e^{-\beta(\tau+T)(t+T-\tau-T)} \sin(\omega(\tau+T)(t+T-\tau-T))U(t+T-\tau-T) = \\ &= e^{-\beta(\tau+T)(t-\tau)} \sin(\omega(\tau+T)(t-\tau))U(t-\tau) = \\ &= e^{-\beta(\tau)(t-\tau)} \sin(\omega(\tau)(t-\tau))U(t-\tau) = \varphi(\tau, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Вираз (5) показує, що також і для ядра ЛВП (3) виконується умова про періодичність:  $\varphi(\tau, t) = \varphi(\tau + T, t + T)$ . Оскільки, доведено періодичність приростів породжуючого процесу і ядра (3), тоді згідно теореми [10] процес  $\xi(t)$  (2) буде лінійним періодичним (за Слуцьким) випадковим процесом і відповідно будь-яка  $m$ -вимірна ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) характеристична функція такого процесу є  $T$ -періодичною за сукупністю своїх часових аргументів [10,12], тобто виконується і (1). З властивості періодичності характеристичної функції випливає, що математичне сподівання та кореляційна функція процесу  $\xi(t)$  [10] також є  $T$ -періодичними:

$$\mathbf{M} \xi(t) = \mathbf{M} \xi(t+T), \quad R_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1+T, t_2+T). \quad (6)$$

Тому, випадковий процес  $\xi(t)$  (2) є також періодично корельованим випадковим процесом.

### **Оцінювання ймовірнісних характеристик усталеного ЗВП**

Для перевірки адекватності обраної моделі здійснимо оцінювання ймовірнісних характеристик досліджуваного сигналу. Процес  $\xi(t)$  (2) є періодичним ЛВП, тому доцільно перш за все обчислити оцінку періоду, що є однією із найважливіших характеристик періодичних процесів. На рис.2 зображено значення “пробних періодів” та обчислено для них статистику  $h_p$ , використовуючи метод, описаний у [13], який дозволяє отримати асимптотично незсунену та конзистентну оцінку періоду  $T$ .

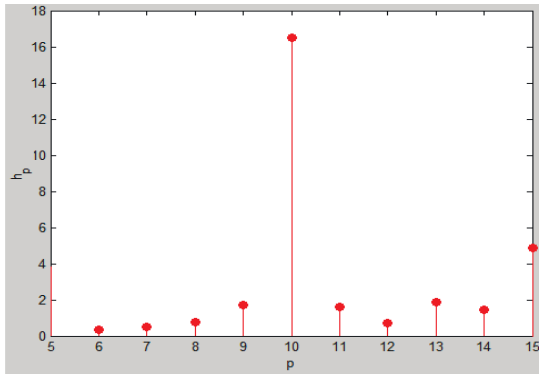


Рис. 2. Реалізація статистики  $h_p$

Оцінка періоду визначається за формулою:  $\hat{T} = \max_p h_p \cdot \Delta t$ . У нашому випадку було використано вибірку, що охоплювало 90 циклів сигналу, при цьому реалізація оцінки періоду становить  $\hat{T} = 10 \cdot 0,01 = 0,1$  с. Оцінка  $\hat{T}$ , обчислена на основі спостережуваного ЗВП, співпадає з періодом використаної при цьому фотостимуляції, що є аргументом для підтвердження адекватності побудованої моделі ЗВП.

Отримавши реалізацію оцінки періоду для  $T$ -періодичного гільбертового випадкового процесу  $\xi(t), t \in (-\infty, \infty)$  знайдемо оцінку математичного сподівання та кореляційної функції, використавши при цьому метод  $\varphi$ -серій [14]. Основна властивість  $\varphi$ -серій полягає у тому, що вони є стаціонарними та стаціонарно зв'язаними випадковими послідовностями, що дозволяє будувати оцінки їх ймовірнісних характеристик за допомогою відомих методів статистичного аналізу стаціонарних випадкових процесів.

Для оцінювання математичного сподівання використаємо статистику:

$$\hat{M}_k = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \xi_{kl}, \quad k = \overline{0, L-1}, \quad (7)$$

де  $\xi_{kl} = \xi(k\Delta t + lT)$  -  $k$ -та  $\varphi$ -серія послідовності  $\xi_t$ , при  $k = \overline{0, L-1}, l \in \mathbf{Z}$ ,  $L = \frac{T}{\Delta t} > 1, m$  - обсяг  $\varphi_k$ -серії. Статистика (7) є незсуненою і слухною оцінкою відліків математичного сподівання  $\mathbf{M}\xi(k\Delta t)$  [14].

Для оцінювання кореляційної функції  $R(t_1, t_2)$  процесу  $\xi(t)$  використаємо статистику виду:

$$\hat{R}_{ij} = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} (\xi_{il} - \hat{M}_i)(\xi_{jl} - \hat{M}_j), \quad i, j = \overline{0, L-1}. \quad (8)$$

Статистика (8) є асимптотично незсуненою та конзистентною оцінкою відліків кореляційної функції  $R(i\Delta t, j\Delta t)$ .

Нижче наведено графіки реалізацій оцінок математичного сподівання (рис.3) та кореляційної функції (рис.4) усталеного ЗВП при використанні частоти фотостимуляції 10 Гц.

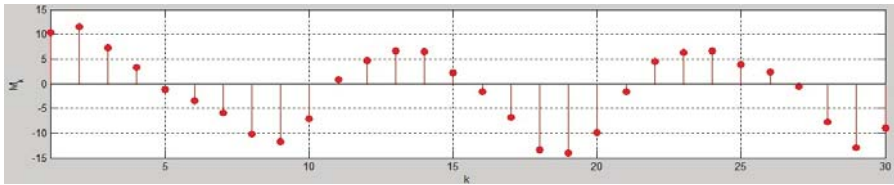


Рис. 3. Реалізація оцінки математичного сподівання процесу  $\xi(t)$

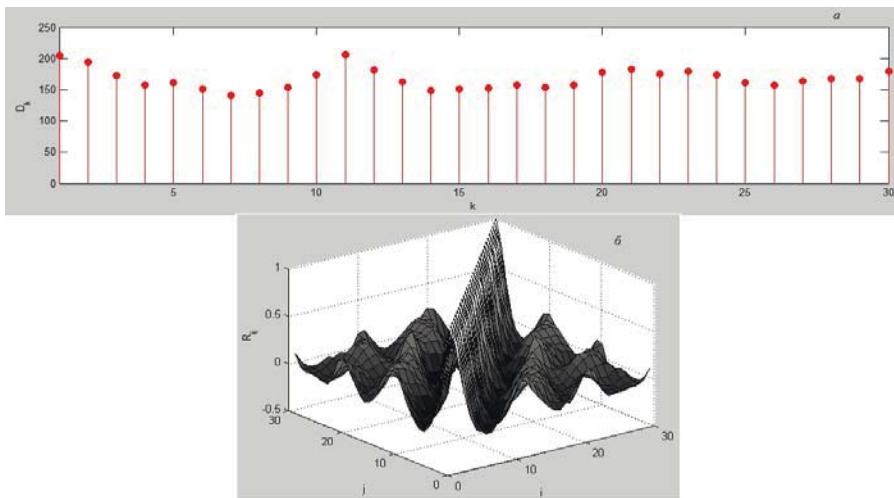


Рис. 4. Реалізація оцінки дисперсії (а) та нормованої кореляційної функції (б) процесу  $\xi(t)$

Аналіз результатів оцінювання математичного сподівання та кореляційної функції доводить правильність використання періодичного ЛВП у якості моделі усталеного ЗВП.

### Висновки

Здійснено опис механізму генерації окремими корковими нейронами усталеного ЗВП із врахуванням циклічної фотостимуляції. Доведено періодичність побудованої математичної моделі, врахувавши періодичність

інтенсивності появи імпульсів та функцій, що характеризують частоту та коефіцієнт затухання імпульсів. Така модель відображає біофізичний механізм формування ЗВП і дозволяє здійснювати ймовірнісний аналіз сигналів у рамках багатовимірних характеристичних функцій.

Обґрунтовано періодичність характеристичної функції математичної моделі усталеного ЗВП і здійснено оцінювання періоду, математичного сподівання та кореляційної функції випадкового процесу, аналіз оцінок яких аргументує адекватність побудованої моделі усталеного ЗВП.

1. *Гнездицкий В. В.* Вызванные потенциалы мозга в клинической практике / В. В. Гнездицкий. — М.: МЕДпресс-информ, 2003. — 264 с.
2. *Saeid S.* EEG signal processing / S. Saeid and J. Chamers. — Chichester: John Wiley & Sons. Ltd., 2007 — 313p.
3. *Vialatte F.-B.* Steady-state visually evoked potentials: Focus on essential paradigms and future perspectives / F.-B. Vialatte, M. Maurice, J. Dauwels, A. Cichocki // Elsevier. — Progress in neurobiology. — Vo.90. — PP. 418-438.
4. *Davila C.* Subspace averaging of steady-state visual evoked potentials / C. Davila, R. Srebro // IEEE transaction on biomedical engineering. — 2000. — Vo. 47 (6). — PP. 720-728.
5. *Wong K. F. K.* Modelling non-stationarity variance in EEG time series by state space GARCH model / K.F.K. Wong, A. Galka, O. Yamashita, T. Ozaki // Computers in Biology and medicine. — Elsevier. — 2006. — No. 36 (12). — PP.1-9.
6. *Марченко Б. Г.* Математичні моделі й обробка сигналів в офтальмології / Б. Г. Марченко, О. В. Мацюк, М. Є. Фриз. — Тернопіль: В-во ТДТУ ім. І. Пулюя, 2005. — 183 с.
7. *Стадник М.* Статистичний аналіз зорових викликаних потенціалів стійкого стану / М. Стадник // Матеріали XVI наукової конференції ТНТУ ім. І. Пулюя. — 2012. — Т.1. — С. 63.
8. *Fryz M.* Justification of mathematical model of the steady-state visual evoked potential in a form of the linear random process // M. Fryz, M. Stadnyk // K.: Electronics and control systems. — 2013. — No 1(35). — PP. 100 – 106.
9. *Serpedin E.* Bibliography on cyclostationarity / E.Serpedin, F. Panduru, I. Sari, G. B. Giannakis // Elsevier. — Signal processing. — Vo. 85. — PP. 2233-2303.
10. *Марченко Б. Г.* Лінійні періодичні процеси /К.: Праці Інституту електродинаміки НАН України, 1999. — С.172-185.
11. *Марченко Б. Г.* Линейные случайные процессы и их приложения / Б. Г. Марченко, Л. Н. Щербак. — К.: Наукова думка, 1975. — 143 с.
12. *Марченко Б. Г.* Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике / Б. Г. Марченко. — К.: Наукова думка, 1973. — 191 с.
13. *Гузий В.* Исследование возможности измерения периода корреляции периодически коррелированного случайного процесса по одной наблюдаемой реализации / В. И. Гузий, Н. В. Приймак // Вестник Киевского института. Электроника и звукотехника. — 1984, №8. — С.31-33.
14. *Марченко Б. Г.* Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем / Б. Г. Марченко, М. В. Приймак // Праці інституту електродинаміки Національної академії наук України. — 1991, - В.1. — С. 129-153.

*Поступила 5.03.2014р.*