УДК 51-75,519.63

І. В. Малик, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Дорошенко, канд. фіз.-мат. наук,
С. В. Антонюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ МОДЕЛІ КОКСА-РОССА-РУБІНШТЕЙНА ТА ВІДПОВІДНИЙ НЕПЕРЕРВНИЙ АНАЛОГ

У статті запропоновано одне узагальнення дискретної моделі Кокса-Росса-Рубінштейна функціонування акцій в дискретному випадку та відповідний їй неперервний аналог.

Ключові слова: *напівмарковський процес, модель Кокса-Росса-Рубінштейна, непевний аналог, слабка збіжність.*

Постановка задачі. У класичній моделі Кокса-Росса-Рубінштейна (CRR-модель) [1] вартість акцій, що змінюється у дискретні моменти часу, підпорядковується закону

$$S_n = S_0(1+\rho_1)(1+\rho_2)...(1+\rho_n)\,, \qquad (1)$$

де S_0 — початкова вартість акції, $\{\rho_i\}_{i=1}^{\infty}$ — незалежні випадкові величини з розподілом

ρ_i	a	b
P	p	$1-p$

, (2)

де $-1 < a < r < b$, r відсоткова ставка, $p \in [0,1]$.

Перепишемо представлення вартості акції (1) у термінах напівмарковського процесу. Для цього визначимо напівстохастичне ядро [2], що визначає напівмарковський процес (1):

$$Q(u, dv, t) := P\{\Delta S_{n+1} \in dv, \theta_{n+1} \le t \ \left| S_n = u\right\} = \Gamma(u, dv) F_u(t), \qquad (3)$$

$$\Gamma(u, dv) := P\left\{\Delta S_{n+1} \in dv \middle| S_n = u\right\}, \qquad (4)$$

$$F_u(t) := P\{\theta_{n+1} \le t \ \left| S_n = u\right\}\,, \qquad (5)$$

де $\Delta S_{n+1} := S_{n+1} - S_n, u \in R^1, dv \in \beta^1$, β^1 — борелева σ -алгебра на R^1 , $\theta_n := \tau_n - \tau_{n-1}$ — час перебування в стані, τ_n — моменти відновлення. Згідно [2] напівмарковський процес $S_t = S_n, n \le t < n+1$ породжується процесом марковського відновлення (ПМВ)

$$(S_n, \tau_n), n \ge 0$$

та

$$S_t = S_{\nu(t)}\,, \qquad (6)$$

де $\nu(t) := \max\limits_{n\ge 0}\{n : \tau_n < t\}$.

Для класичної CRR-моделі (1) не важко обчислити розподіл стрибків вартості акції $\Gamma(u,dv)$ та функцію розподілу часу перебування в станах $F_u(t)$:

$$F_u(t)=\begin{cases}0,\ t\le 1,\\ 1, t>1;\end{cases}\quad \Gamma(u,v)=\begin{cases}0, v\le ua,\\ p, ua<v\le ub,\\ 1, v>ub.\end{cases}$$

Основний результат.

Означення 1. Під неперервним усередненим аналогом для дискретної моделі (6) будемо розуміти випадковий процес

$$S_t^0=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon S_{t/\varepsilon}\,, \tag{7}$$

де під S_t^0 слід розуміти слабку границю.

Нормування, яке задає (7), аналогічне нормуванню, яке забезпечує перехід в інших моделях від дискретного до неперервного часу [1; 3].

Накладемо на величину зміни вартості облігації, крім умови (4), ще одну природну умову: при $U\ge U_0$ справедливе представлення

$$\Gamma(u,v)=\begin{cases}0, v\le 0,\\ 1, v>0.\end{cases} \tag{8}$$

Умова (8) означає, що вартість облігації не може перевищувати деякого рівня U_0 і не змінюється зовсім, досягнувши даного рівня.

Сформулюємо твердження з [4], на основі якого знайдемо неперервний усереднений аналог (7) для деякої узагальненої CRR-моделі.

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови:

1) обмеженість другого момента величини стрибка:

$$\int_{R^1} v^2\Gamma(u,dv)<\infty\,;$$

2) час перебування в стані є рівномірно інтегрований:

$$\lim_{T\to\infty}\sup_{u\in R^1}\int_T^\infty dF_u(t)=0\,;$$

3) існує $C>0$ така, що для $\forall\ u\in R^1$ та $\forall\ \varepsilon>0$

$$Ee^{-\varepsilon\theta_n}\le 1-C\varepsilon\,;$$

4) має місце збіжність початкових умов при $\varepsilon\to 0$:

$$S_0^\varepsilon\to S_0^0\,.$$

Тоді для $\forall\ T>0$ має місце слабка збіжність в просторі Скорохода $D\big(\big[0,T\big]\big)$:

$$\varepsilon S_{t/\varepsilon} \underset{\varepsilon \downarrow 0}{\Rightarrow} S_t^0 , \qquad (9)$$

де S_t^0 — розв'язок задачі Коші

$$dS_t^0 = C(S_t^0)dt ,$$

$$C(u) := \int_{R^1} v\Gamma(u, dv) \left(\int_{R^1} s dF_u(s) \right)^{-1} .$$

Використовуючи дану теорему знайдемо (7) у класичній CRR-моделі:

Лема 1. Неперервний усереднений аналог (7) задається рівністю

$$S_t^0 = S_0 e^{E\rho_1 t} \text{ при } S_t^0 < U_0 .$$

Доведення. Обчислимо середнє значення величини стрибка та часу перебування в стані

$$\int_{R^1} v\Gamma(u, v) = uE\rho_1 ,$$

$$\int_{R^1} t dF_u(t) = 1 .$$

Тоді $C(u) = uE\rho_1$.

Умова 1 та 2 теореми 1 виконуються згідно накладеної умови (8). Умова 3 та 4 виконуються, оскільки $\theta_n \equiv 1$. Умова 5 також виконується, оскільки при $\forall\ \varepsilon > 0$ початкові умови не змінюються.

При $u < U_0$ поле швидкостей має вигляд $C(u) = uE\rho_1$, тоді S_t^0 є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} dS_t^0 = S_t^0 E\rho_1, \\ S_t^0 \big|_{t=0} = S_0, \end{cases}$$

тобто $S_t^0 = S_0 e^{E\rho_1 t}$ при $S_t^0 < U_0$.

Лема 1 доведена.

Розглянемо узагальнення моделі (1) та відповідний йому неперервний усереднений аналог. Для цього накладемо умови на елементи ПМВ:

1) час перебування в стані залежить від величини акції, тобто $F_u(t)$ залежить від u. Припустимо, що зміна вартості акції, як і у класичній CRR-моделі, також є невипадковою та має вигляд

$$F_u(t) = \begin{cases} 0,\ t \le u^{-\alpha} , \\ 1, t > u^{-\alpha} , \end{cases}$$

де $\alpha > 0$.

Вибір саме такого представлення зумовлений тим, що при високій ціні акції попит на неї є більшим, отже і зміна її вартості відбувається частіше.

2) Для величини стрибка виконується умова (8);
3) Величина стрибка вартості акції задається розподілом

$$\Gamma(u,v)=\begin{cases}0, v\le u^{-\beta+1}a,\\ p, u^{-\beta+1}a<v\le u^{-\beta+1}b,\\ 1, v>u^{-\beta+1}b,\end{cases}$$

де $\beta>0$.

Дана умова гарантує, що акції високої ціни мають меншу флуктацію, оскільки акції великих компаній є більш захищені від великих стрибків. Дану модель назвемо узагальненою CRR-моделлю. Тоді має місце така теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються припущення 1)—3). Тоді при $\alpha\ne\beta$ неперервний усереднений аналог для узагальненої CCR-моделі має вигляд

$$S_t^0=\sqrt[\beta-1]{(\beta-\alpha)E\rho_1 t+S_0^{\beta-\alpha}}\ . \tag{10}$$

Доведення. Знайдемо $C(u)$:

$$\int\limits_{R^1} tdF_u(t)=u^{-\alpha}\ ,$$

$$\int\limits_{R^1} v\Gamma(u,v)=pu^{-\beta+1}a+(1-p)u^{-\beta+1}b=u^{1-\beta}E\rho_1\,.$$

Таким чином,

$$C(u)=u^{\alpha}u^{1-\beta}E\rho_1=E\rho_1u^{1+\alpha-\beta}\,.$$

Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$dS_t^0=E\rho_1(S_t^0)^{1+\alpha-\beta}dt\ ,$$

тобто неперервний аналог збігається з неперервним усередненим аналогом для класичної CRR-моделі.

При $\alpha=\beta$ розв'язок даного рівняння має вигляд

$$S_t^0=Ce^{E\rho_1 t}\,.$$

При $\alpha\ne\beta$ матимемо

$$S_t^0=\sqrt[\beta-1]{(\beta-\alpha)E\rho_1 t+C}\ .$$

Використовуючи початкову умову, отримуємо твердження теореми 2.

Теорема 2 доведена.

Зауваження 1. Неперервний усереднений аналог узагальненої CCR-моделі функціонує при $\alpha>\beta$ скінченний проміжок часу, при $\alpha\le\beta$ — нескінченний.

Висновки. Одержано узагальнення дискретної моделі Кокса-Росса-Рубінштейна функціонування акцій та відповідний їй неперервний аналаг.

Список використаних джерел:

1. Ясинський В. К. Детерміновані та стохастичні моделі фінансової математики / В. К. Ясинський, Л. І. Ясинська. — Чернівці : Прут, 2003. — 512 с.
2. Koroliuk V.S. Stochastic systems in merging phase space / V. S. Koroliuk, N. Limnios. — Singapore : World Scientific Publishers, 2005. — 331 с.
3. Мішура Ю.С. Математика фінансів / Ю. С. Мішура, Г. М. Шевченко. — К. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2009. — 352 с.
4. Малик І. В. Напівмарковські випадкові еволюції з марковськими переключеннями / І. В. Малик // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — 2012. — Т.2, № 2-3. — С.123–129.

The paper presents one generalization of a discrete model of Cox-Ross-Rubinstein functioning shares in a discrete case and the continuous analog.

Key words: *semi-Markov process, Cox-Ross-Rubinstein model, continuous analog, weak convergence.*

Отримано: 10.04.2013

УДК 517.956

О. В. Мартинюк, канд. фіз.-мат. наук

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЗЛІЧЕННО-НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ НЕСКІНЧЕННО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ. IV

У статті визначаються нові класи функцій-символів та нові класи псевдодиференціальних операторів, які будуються за такими символами за допомогою прямого та оберненого перетворення Бесселя. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з псевдо-Бесселевими операторами з початковими функціями з просторів типу розподілів Соболєва-Шварца.

Ключові слова: *перетворення Бесселя; простори основних функцій; простори узагальнених функцій, задача Коші, псевдо-Бесселеві оператори, оператор узагальненого зсуву аргументу.*

Ця робота є продовженням одноіменних статей [1—3]. Тут досліджується структура та вивчаються властивості фундаментального розв'язку задачі Коші. Встановлюється коректна розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями скін-