УДК 517.9

О. В. Капустян, д-р фіз.-мат. наук, професор,
А. В. Паньков, аспірант
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ЯКІСНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ МОДИФІКОВАНОЇ 3D СИСТЕМИ БЕНАРДА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

У статті доведено існування глобального φ-атрактору в слабкій топології фазового простору для м-напівпотоку, породженого розв'язками модифікованої $3\mathrm{D}$ системи Бенарда в необмеженій області, для якої виконується нерівність Пуанкаре.

Ключові слова: $3\mathrm{D}$ *система Бенарда, м-напівпотік, глобальний* φ*-атрактор*

Вступ. У багатьох гідродинамічних моделях, зокрема, в тривимірних системах Навьє-Стокса і Бенарда, в класі глобальної розв'язності невідомими є результати про єдиність розв'язку початкової задачі [1—2]. Дослідження граничних режимів в таких системах може бути проведене шляхом вивчення властивостей ω-граничних множин відповідного многозначного напівпотоку [3—7]. Основні результати класичної теорії глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем були одержані для м-напівпотоків в роботах В. С. Мельника та його учнів [3—5]. Використовуючи цей підхід, в даній роботі вивчається питання про існування та властивості глобального φ-атрактора [6—7] для м-напівпотоку, породженого розв'язками модифікованої $3D$ системи Бенарда [7—8] в необмеженій chanel-like області, тобто в області, де залишається вірною нерівність Пуанкаре. Для двовимірної системи Бенарда в таких областях існування глобального атрактору доведено в [9].

Постановка задачі. Розглядається модель типу Бенарда, що описує в кожний момент часу швидкість, тиск і температуру вязкої нестисненої рідини в області $\Omega \subset R^3$, що задовольняє нерівність Пуанкаре:

$$\exists \lambda_1 > 0 \ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \ \int_\Omega \varphi^2(x)dx \le \frac{1}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 \ (x)dx.$$

Використовуючи стандартні функціональні простори

$$\Upsilon = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \mid divu = 0\}, \ H = cl_{(L^2(\Omega))^3}\Upsilon, \ V = cl_{(H_0^1(\Omega))^3}\Upsilon,$$

з нормами $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ і скалярними добутками $(\cdot,\cdot)$, $((\cdot,\cdot))$ відповідна система має вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + F_N(\|u\|)(u\nabla)u + \xi\omega = f - \nabla p, \\ divu = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega + (u\nabla)\omega = g, \\ \omega|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $\nu > 0$, $\xi \in R^3$ — константи, $f : \Omega \to R^3$, $g : \Omega \to R$ задані функції, $u\nabla = \sum_{i=1}^{3} u_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, для $N \geq 1$ $F_N(r) = \min\{1, \dfrac{N}{r}\}$. Введемо для розгляду форми

$$b(u, v, z) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j dx, \ c(u, \omega, \eta) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \eta dx$$

та форму $b_N(u, v, z) = F_N(\|v\|) b(u, v, z)$. Розв'язком (1), (2) на $(0, +\infty)$ будемо називати $\varphi = \{u, \omega\}$ таку, що $\forall T > 0$ $\varphi \in W_T$, де

$$W_T = (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)) \times (L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))),$$

та для всіх $v \in V$, $\eta \in H_0^1(\Omega)$, в сенсі скалярних розподілів на $(0, T)$

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu((u, v)) + b_N(u, u, v) + (\xi\omega, v) = (f, v), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}(\omega, \eta) + ((\omega, \eta)) + c(u, \omega, \eta) = (g, \eta). \tag{4}$$

Метою роботи є встановити розв'язність (1), (2) та виділити клас розв'язків, що породжує м-напівпотік, який має в фазовому просторі $X = H_w \times L_w^2(\Omega)$ мінімальну множину, що притягує всі траєкторії напівпотоку — глобальний φ-атрактор.

Основні результати. Введемо поняття многозначної напівгрупи (м-напівпотоку) та її глобального φ-атрактора. Нехай X — означений вище простір $H \times L^2(\Omega)$ зі слабкою топологією, K — сукупність відображень $\varphi : R_+ \to X$, що задовольняють умови:

(К1) $\forall \varphi_0 \in X\ \exists \varphi \in K$ таке, що $\varphi(0) = \varphi_0$;

(К2) $\forall \varphi \in K\ \ \forall s \geq 0\ \ \varphi_s(\cdot) = \varphi(\cdot + s) \in K$.

Розглянемо відображення $G(t, \varphi_0) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in K, \varphi(0) = \varphi_0\}$.

Означення. Множина $A \subset X$ називається глобальним φ-атрактором м-напівпотоку G, якщо:

1) $\forall \varphi \in K\ \varphi(t) \to A, \to \infty$ в X;
2) $A \subset G(t, A)\ \forall t \geq 0$;
3) A є мінімальною в класі замкнених множин, що задовольняють 1).

Переходимо до побудови м-напівпотоку на розв'язках задачі (1), (2).

Теорема 1. Для довільних $\varphi_0 = \{u_0, \omega_0\} \in H \times L^2(\Omega)$ існує принаймні один розв'язок $\varphi = \{u, \omega\}$ задачі (1), (2) з $\varphi(0) = \varphi_0$, причому $\forall T > 0\ \ \varphi \in C([0,T]; X)$.

Доведення. Нехай $\{w_i\} \subset \Upsilon,\ \{\overline{w_i}\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ — системи лінійно-незалежних елементів, тотальні в V і $H_0^1(\Omega)$ відповідно. Означимо наближені розв'язки $\varphi^n = \{u^n, \omega^n\}$ наступним чином [2]: $u^n = \sum_{i=1}^{n} l_{in}(t) w_i,\quad \omega^n = \sum_{i=1}^{n} \bar{l}_{in}(t)\overline{w_i}$, де $\{l_{in}(t)\}, \{\bar{l}_{in}(t)\}$ визначаються із системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} (\dfrac{du^n}{dt}, w_j) + \nu((u^n, w_j)) + b_N(u^n, u^n, w_j) + (\xi\omega^n, w_j) = (f, w_j), \\ (\dfrac{d\omega^n}{dt}, \overline{w_j}) + ((\omega^n, \overline{w_j})) + c(u^n, \omega^n, \overline{w_j}) = (g, \overline{w_j}),\ j = \overline{1, n} \end{cases} \tag{5}$$

та початкових даних $u^n(0) = u_0^n \in \Upsilon,\quad \omega^n(0) = \omega_0^n \in C_0^\infty(\Omega),\quad \varphi_0^n \to \varphi_0$ в X. За теоремою Пеано задача Коші (5) має розв'язок φ^n на $[0, t_n]$. Одержимо для нього апріорні оцінки. З рівностей $b_N(u, v, v) = 0$, $c(u, \omega, \omega) = 0$ маємо:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u^n|^2 + \nu\left\|u^n\right\|^2 + (\xi\omega^n, u^n) = (f, u^n), \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega^n|^2 + \left\|\omega^n\right\|^2 = (g, \omega^n). \tag{7}$$

З (6), (7) і нерівності Пуанкаре для $t \geq s \geq 0$ одержуємо:

$$V_f^n(t) = \frac{1}{2}|u^n(t)|^2 + \nu\int_0^t \left\|u^n(p)\right\|^2 dp + \int_0^t (\xi\omega^n, u^n)dp - \int_0^t (f, u^n)dp \leq V_f^n(s), \tag{8}$$

$$\Psi^n(t) = (|u^n(t)|^2 - \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2)e^{\nu\lambda_1 t} - \frac{2|\xi|^2}{\nu\lambda_1}\int_0^t |\omega^n(p)|^2 e^{\nu\lambda_1 p} dp \leq \Psi^n(s), \tag{9}$$

$$V_g(\omega^n)(t) = \frac{1}{2}|\omega^n(t)|^2 + \int_0^t \left\|\omega^n(p)\right\|^2 dp - \int_0^t (g,\omega^n)dp \le V_g(\omega^n)(s), \qquad (10)$$

$$F(\omega^n)(t) = (|\omega^n(t)|^2 - \frac{|g|^2}{\lambda_1^2})e^{\lambda_1 t} \le F(\omega^n)(s). \qquad (11)$$

З (8)—(11) φ^n визначаться системою (5) на $[0,+\infty)$ і $\forall T>0$ $\{\varphi^n\}$ обмежена в W_T. В силу (8)—(11) за допомогою перетворення Фур'є аналогічно [2] можемо скористатись лемою про компактність і стверджувати існування $\varphi \in W_T$ такої, що по підпослідовності

$\varphi^n \to \varphi^*$ — слабо в $L^\infty(0,T;H\times L^2(\Omega))$, слабо в $L^2(0,T;V\times H_0^1(\Omega))$, (12)

та для довільної підобласті $\Omega_r = \Omega \cap \{|x|<r\}$

$$\varphi_n \to \varphi \text{ сильно в } L^2(0,T;(L^2(\Omega_r))^4). \qquad (13)$$

Тоді компактність носіїв функцій w_j, $\overline{w_j}$ дозволяє перейти до границі в (5) і одержати, що φ — розв'язок (1), (2) з $\varphi(0)=\varphi_0$. Крім того, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*\times H^{-1}(\Omega))$, отже $\varphi \in C([0,T];X)$. Теорема доведена.

Нехай K^n — множина розв'язків $\varphi^n = \{u^n,\omega^n\}$ системи (5), $K = \{\varphi \mid \exists \varphi^{n_k} \in K^{n_k}$ такі, що $\forall T>0$ $\varphi^{n_k} \to \varphi$ в сенсі (12), $\varphi^{n_k}(0) \to \varphi(0)$ в $X\}$. Тоді в силу попередньої теореми будь-який $\varphi \in K$ є розв'язком (1), (2). Покладемо

$$G(t,\varphi_0) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in K, \varphi(0)=\varphi_0\}. \qquad (14)$$

Теорема 2. Формула (14) визначає м-напівпотік, що має в просторі $X = H_w \times L_w^2(\Omega)$ глобальний φ-атрактор, обмежений в $H\times L^2(\Omega)$.

Доведення. Перевіримо умови К1), К2). В силу попередньої теореми $\forall \varphi_0 \in H\times L^2(\Omega)$ $\exists \varphi \in K : \varphi(0)=\varphi_0$. Нехай $\varphi \in K$, $s>0$ фіксовані. Тоді $\exists \varphi^n \in K^n : \varphi^n \to \varphi$ в силу (12)—(13) $\varphi^n(0) \to \varphi(0)$ в X. Покладемо $\varphi_s^n(\cdot) = \varphi^n(\cdot+s) \in K^n$ (бо (5) — автономна). Тоді $\varphi_s^n \to \varphi_s(\cdot) = \varphi(\cdot+s)$ в сенсі (12)—(13). Доведемо, що $\varphi^n(t) \to \varphi(t)$ в X $\forall t\ge 0$. Дійсно, з (13) $\forall r>0$ $\varphi^n(t)\to\varphi(t)$ в $(L^2(\Omega_r))^4$ для м.в. $t\ge 0$. Тоді $\forall j\ge 1$

$$(u^n(t),w_j) \to (u(t),w_j), (\omega^n(t),\overline{w_j}) \to (\omega(t),\overline{w_j}) \text{ для м.в. } t\ge 0. \qquad (15)$$

Використовуючи обмеженість $\{\varphi^n\}$ в W_T, з (5) одержуємо нерівність:

$$|(u^n(t+h)-u^n(t),w_j)|+|(\omega^n(t+h)-\omega(t),\overline{w_j})|\le C(T)h^{\frac{1}{4}}(\|w_j\|+\|\overline{w_j}\|) \quad (16)$$

Таким чином, послідовності $\{(u^n(t),w_j)\}$ і $\{(\omega^n(t),\overline{w_j})\}$ є рівномірно обмеженими і рівностепенево неперервними, тому збіжність в (15) має місце $\forall\, t\ge 0$. Тоді за критерієм слабкої збіжності $\varphi^n(t)\to\varphi(t)$ в X $\forall t\ge 0$. Звідси, зокрема, $\varphi_s^n(0)=\varphi^n(s)\to\varphi_s(0)=$ $=\varphi(s)$ в X і, таким чином, $\varphi(\cdot+s)\in K$. Тоді формула (14) коректно визначає м-напівпотік. Згідно [7] для доведення теореми достатньо перевірити потраекторну обмеженість та наступну властивість (A): якщо для $\varphi\in K,\ t_n\uparrow\infty\ \varphi(t_n)\to\xi$ в X, то для $\varphi_n(\cdot)=\varphi(\cdot+t_n)\in K$ існує $\bar\varphi\in K$ така, що по підпослідовності $\forall t\ge 0\ \varphi_n(t)\to\overline{\varphi}(t)$ в X. Для $\forall\varphi=\{u,\omega\}\in K$ властивості функції F_N гарантують $\dfrac{du}{dt}\in L^2(0,T;V^*)$, отже $u\in C([0,T];H)$ і для м.в. t задовольняє рівняння (6), що означає виконання для $\{u,\omega\}$ оцінок (8), (9) $\forall t\ge s\ge 0$. Для функції ω маємо, що $\exists\omega^n\in K^n$ такі, що ω^n задовольняють (10), (11), $\omega^n\to\omega$ в сенсі (12)—(13) і $\omega^n(t)\to\omega(t)$ слабо в $L^2(\Omega)$. Тоді $\exists R=R(\omega)>0$ таке, що $\forall n\ge 1\,|\omega^n(0)|+|\omega(0)|\le R$ і переходячи до слабкої границі в (11), одержуємо, що $\forall t\ge 0\,|\omega(t)|^2\le R^2e^{-\lambda_1 t}+\dfrac{|g|^2}{\lambda_1^2}$. Звідси маємо, що послідовність $\varphi(t_n)$ для $\forall t_n\uparrow\infty$ є предкомпактною в X, а множина $\bigcup\limits_{\varphi\in K}\omega(\varphi)$ є обмеженою в $H\times L^2(\Omega)$. Перевіримо умову (A). Розглянемо послідовність $\varphi_n(\cdot)=\varphi(\cdot+t_n)\in K,\ \varphi(t_n)\to\xi$ в X. З оцінок (8), (9) послідовність $\{\varphi_n\}$ обмежена в W_T. Тоді з послідовність $\{\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial t}\}$ обмежена в $L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*\times H^{-1}(\Omega))$ і для довільних $v\in V,\eta\in H_0^1(\Omega)$ аналогічно (16) маємо:

$$|(u_n(t+h)-u_n(t),v)|+|(\omega_n(t+h)-\omega_n(t),\eta)|\le C(T)(\|v\|+\|\eta\|)h^{\frac{1}{4}} \quad (17)$$

Підставляючи в (17) $v=u_n(t+h)-u_n(t),\ \eta=\omega_n(t+h)-\omega_n(t)$ та інтегруючи на $[0,T-h]$, з урахуванням обмеженості $\{\varphi_n\}$ в $L^2(0,T;V\times H_0^1(\Omega))$, маємо:

$$\int_0^{T-h} (|u_n(t+h)-u_n(t)|^2 + |\omega_n(t+h)-\omega_n(t)|^2)dt \le \tilde{C}(T)h^{\frac{1}{4}} \qquad (18)$$

Тоді $\forall r>0$ послідовність $\{\varphi_n|_{\Omega_r}\}$ обмежена в $L^2(0,T;(H^1(\Omega_r))^4)$. Тому за теоремою про компактність [9] послідовність $\{\varphi_n\}$ — предкомпактна в $L^2(0,T;(L^2(\Omega_r))^4)$. Таким чином, існує $\overline{\varphi}\in W_T$ таке, що по підпослідовності $\varphi_n\to\overline{\varphi}$ в сенсі (12)—(13), $\overline{\varphi}(0)=\xi$. З попередніх міркувань $\exists R=R(\varphi)\ \forall t\ge 0\ \forall n\ge 1\ \ \varphi^n(t),\ \varphi(t),\overline{\varphi}(t)\in B_R =$ $=\{\varphi=\{u,\omega\}\,|\,|u|\le R, |\omega|\le R\}$. В множині B_R слабка топологія може бути описана метрикою ρ_R, в множині $S=\{\varphi\in L^\infty(0,T;H\times L^2(\Omega))\,|\times$ $\times \sup\limits_{t\in(0,T)} |\varphi(t)|\le R\}$ *-слабка топологія може бути описана метрикою ρ_T.

Тоді $\forall n\ge 1\,\exists m_n\ \exists\varphi^{m_n}\in K^{m_n}$ такі, що

$$\rho_R(\varphi^{m_n}(0),\varphi_n(0))\le\frac{1}{n},\quad \rho_T(\varphi^{m_n},\varphi_n)\le\frac{1}{n}.$$

Тоді $\rho_R(\varphi^{m_n},\overline{\varphi}(0))\to 0,\ \rho_T(\varphi^{m_n},\overline{\varphi})\to 0,\ n\to\infty$. Вибираючи $T_k\uparrow\infty$, діагональною процедурою виділяємо підпослідовність $\varphi^{m_k}\in K^{m_k}$ таку, що $\forall T>0\ \ \varphi^{m_k}\to\overline{\varphi}(t)$ в сенсі (12), $\varphi^{m_k}(0)\to\overline{\varphi}(0)$ в X, тобто $\overline{\varphi}\in K$. Оскільки $\varphi_n(t)\to\overline{\varphi}(t)\ \forall t\ge 0$ в X, то виконана умова (А) і теорема доведена.

Висновки. У статті доведена розв’язність модифікованої 3D системи Бенарда та існування глобального $\varphi-$атрактора для м-напівпотоку, породженого її розв'язками в необмеженій області, де залишається вірною нерівність Пуанкаре.

Список використаних джерел:

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 450 с.
2. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса / Р. Темам. — М. : Мир, 1981.
3. Мельник В. С. Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем / В. С. Мельник. — К., 1994. — 60 с. — (Препр. Ин-та кибернетики НАНУ. — № 94-17).
4. Kapustyan O. V. A weak attractors and properties of solutions for the three-dimensional Benard problem / O. V. Kapustyan, V. S. Melnik, J. Valero // DCDS. — 2007. — Vol. 18. — P. 449–481
5. Evolution inclusions and variational inequalities for Earth data processing III / M. Z. Zgurovsky, P. O. Kasyanov, O. V. Kapustyan, J. Valero, N. V. Zadoianchuk. — N.Y. : Springer, 2012.

6. Simsen J. On attractors for multivalued semigroups defined by generalized semiflows / J. Simsen, C. Gentile // Set-Valued Anal. — 2008. — Vol. 16. — P. 105–124
7. Kapustyan O. V. On global attractors of multivalued semiflows generated by the 3D Benard system / O. V. Kapustyan, A. V. Pankov, J. Valero // Set-Valued and Variational Analysis. — 2012. — Vol. 20, № 3. — P. 445–465.
8. Caraballo T. Unique strong solution and V-attractor of a three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equation / T. Caraballo, P. E. Kloeden, J. Real // Advanced Nonlinear Studies. — 2006. — Vol.6. — P. 411–436.
9. Cabral M. Existence and dimension of the attractor for the Benadr problem on chanel-like domains / M. Cabral, R. Rosa, R. Temam // DCDS. — 2004. — Vol.10, №1. — P. 89–116.

In this paper we prove the existence of global φ-attractor in the weak topology of the phase space for a multivalued semiflow generated by solutions of the modified 3D Benard system in an unbounded domain, for which the Poincarй inequality holds.

Key words: *modified* 3D *Benard system, multivalued semiflow, global* φ *-attractor.*

Отримано: 12.02.2013

УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В ОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЯХ

Методом функції впливу та функції Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру гіперболічних крайових задач в напівобмежених багатошарових (кусково-однорідних) просторових областях. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є на декартових осі, півосі та сегменті, а також інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті з n точками спряження.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуаль-

