УДК 519.21

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук,
С. Ф. Шевчук, канд. техн. наук

Буковинський університет, м. Чернівці

СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Отримано достатні умови стійкості та нестійкості за першим наближенням розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями вінерового та пуассонового типів у гільбертових просторах.

Ключові слова: *гільбертовий простір, стійкість за першим наближенням, твірний оператор, марковський процес.*

Вступ. Твердження про стійкість чи нестійкість за першим наближенням формулюються таким чином: якщо розв'язок лінійного рівняння, побудованого за вихідним, стійкий чи нестійкий, то і розв'язок вихідного рівняння також буде відповідно стійким чи нестійким. Таке твердження справджуватиметься при певних припущеннях, які наведено і обґрунтовано у роботі. Аналізу поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода присвячені ряд робіт, зокрема [1–6].

Постановка задачі. Нехай X — сепарабельний гільбертовий простір зі скалярним добутком (x, y) та нормою $|x|$. Розглянемо однорідний марківський процес $x(t)$ зі значеннями в X, заданий на імовірнісному базисі $(\Omega, \Im_t, \Im, P)$ стохастичним диференціальним рівнянням

$$dx(t) = a\left(x(t)\right)dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left[b_k\left(x(t)\right)dW_k(t) + \int_U c_k\left(u, x(t)\right)\tilde{\nu}_k(dt, du)\right], \quad (1)$$

де $(U, \Im)$ — деякий вимірний простір, зліченний набір незалежних вінерових процесів $\{W_k(t), k = 1, 2, ...\}$ та центрованих пуассонових мір $\{\tilde{\nu}_k(dt, du), k = 1, 2, ...\}$ з незалежними значеннями на вимірному просторі $(U \times \mathbb{R}_+; \Im \times B_{\mathbb{R}_+})$, $\tilde{\nu}_k(dt, du) = \nu_k(dt, du) - M\left\{\nu_k(dt, du)\right\}$, $a(x)$, $b_k(x) : X \to X$, $c_k(x, u) : X \times U \to X$, $k = 1, 2, ...$, $U \subset \mathbb{R}$.

Позначимо через x_t траєкторії $x(t)$, M_x і P_x — математичне сподівання та ймовірність, якщо початкове положення процесу x, A — його твірний оператор.

Означення 1. Точка $\overline{x}$ називається стаціонарною, якщо $\mathrm{A}\varphi(\overline{x}) = 0$ для всіх $\varphi \in D_A$, D_A — область визначення твірного оператора.

Точка буде стаціонарною, якщо $P_{\overline{x}}\{x_t = \overline{x}\} = 1$ для всіх $t > 0$. Для процесів, заданих рівнянням (1), точка буде стаціонарною, якщо $a(\overline{x}) = 0$, $b_k(\overline{x}) = 0$, $c_k(\overline{x}, u) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Означення 2. Стаціонарна точка $\overline{x}$ називається стійкою, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\rho > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$\sup_{|x-\overline{x}|\le\delta} P_x\{\sup_t |x_t - \overline{x}| > \rho\} < \varepsilon.$$

Означення 3. Стаціонарна точка $\overline{x}$ називається асимптотично стійкою, якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$\sup_{|x-\overline{x}|\le\delta} P_x\left\{\lim_{t\to\infty} |x_t - \overline{x}| = 0\right\} \ge 1 - \varepsilon .$$

Означення 4. Стаціонарна точка $\overline{x}$ називається асимптотично стійкою в цілому, якщо для будь-яких $x \in X$

$$P_x\left\{\lim_{t\to\infty} |x_t - \overline{x}| = 0\right\} = 1 .$$

Покладемо, що нуль є стаціонарною точкою для рівняння (1), тобто $a(0) = 0$, $b_1(0) = 0$, $b_2(0) = 0$, …, $c_1(0,u) = 0$, $c_2(0,u) = 0$, … .

Якщо коефіцієнти рівняння диференційовані за Гато в точці нуль (це лінійні оператори), то

$$a(x) = Ax + a_0(x),\ b_k(x) = B_k x + b_k^0(x),\ c_k(x,u) = C_k(u)x + c_k^0(x,u), \quad (2)$$

де $a_0(x)$, $b_k^0(x)$, $c_k^0(x,u)$, $k = 1, 2, \ldots$, малі порівняно з $|x|$ в околі точки 0. В околі точки 0 природно виділити «головну» частину рівняння — лінійне рівняння

$$d\overline{x}(t) = A\overline{x}(t)dt + \sum_{k=1}^{\infty}[B_k\overline{x}(t)dW_k(t) + \int_U C_k(u)\overline{x}(t)\tilde{\nu}_k(dt,du)] . \quad (3)$$

Означення 5. Розв’язок рівняння (3) називається першим наближенням.

Основний результат.

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови:

1. Функції $a(x)$, $b_k(x)$, $c_k(x,u)$, $k = 1, 2, \ldots$, задовольняють умову Ліпшиця

$$\left|a(x) - a(y)\right|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|b_k(x) - b_k(y)\right|^2 + \right.$$
$$\left. + \int_U \left|c_k(x,u) - c_k(y,u)\right|^2 \Pi_k(du)\right] \le l\,|x - y|^2 .$$

2. Справедливими є представлення (2), де

$$\left|a_0(x)\right| + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|\, b_k^0(x)\,| + \sqrt{\int_U \left|c_k^0(x,u)\right|^2 \Pi_k(du)} \right) +$$

$$+\sup_u \left|c_k^0(x,u)\right| \le \varepsilon\,|\,x\,| + |\,x\,|^2,$$

ε — досить мале.

3. $\sup_u \| c_k(u) \| < 1$.

4. Позначимо однорідний марковський процес на сфері $\bar{y}(t) = \dfrac{1}{|\,\bar{x}(t)\,|}$.

   Цей процес має єдиний ергодичний розподіл $\rho(dz)$.

5. Якщо $c = \int q_1(z)\rho(dz)$, де

$$q_1(y) = (y, Ay) - \sum_{k=1}^{\infty}(y, B_k y) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\, B_k y\,|^2 +$$

$$+\int_U \Big[\ln\left|y + C_k(u)y\right| - \big(y, C_k(u)y\big)\Big]\Pi_k(du) \Big),$$

то $c \ne 0$.

Тоді існує таке $\varepsilon_0 > 0$, яке залежить тільки від A, B_k, $C_k(u)$ та $\Pi_k(du)$, $k = 1, 2, \ldots$, що при $\varepsilon < \varepsilon_0$ розв'язок рівняння (1) буде стійким, якщо стійкий за імовірністю розв'язок (3), і нестійким, якщо нестійкий розв'язок (3).

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $c < 0$. Тоді розв'язок (3) буде стійким ([1]).

Отже, на підставі теореми про зв'язок між різними видами стійкості [1], існує таке $p > 0$, що $x(t)$ буде асимптотично p-стійким, тобто для деякого $\alpha > 0$

$$M_x\,|\,\bar{x}(t)\,|^p \le \frac{|\,x\,|^p}{\alpha} e^{-\alpha t}.$$

Для представлення $|\,\bar{x}(t)\,|$ скористаємось формулою

$$r(t) = r(0)\exp\left\{ \int_0^t g\big(y(s)\big)ds + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_0^t \varphi_k\big(y(s)\big)dW_k(s) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t \int_U \ln\left|y + Uy\right| \tilde{\nu}_k(ds, du) \right] - I_{\{\|U\| \le c\}}\Pi(du)ds) \right\}.$$

З цієї формули випливає, що для всіх дійсних γ існує таке $c_\gamma < \infty$, що

$$M_x \left|\overline{x}(t)\right|^\gamma \le \left|x\right|^\gamma \exp\{c_\gamma t\}\,. \tag{4}$$

Для цього досить показати, що

$$M \exp\left\{\int_0^t g(s)dW_k(s)\right\} \le \exp\left\{\frac{k^2}{2}t\right\},$$

і

$$M \exp\left\{\int_0^t \varphi(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)\right\} \le \exp\{c_2 t\}\,, \tag{5}$$

якщо $\left|\varphi(s,\theta)\right| \le k$, $\int_U \left|\varphi(s,\theta)\right|^2 \Pi(du) \le k$ для всіх s, причому стала c_2 залежить тільки від k. Достатньо встановити (5) для ступінчатих функцій $\varphi(s,\theta)$. Однак,

$$M\left(\exp\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int \varphi(t_i,u)\tilde{\nu}(ds,du)\right\} / \Im_{t_i}\right) =$$

$$= \exp\left\{(t_{i+1}-t_i)\int\left[e^{\varphi(t_i,u)} - 1 - \varphi(t_i,u)\right]\Pi(du)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{1}{2}e^k(t_{i+1}-t_i)\int \varphi^2(t_i,u)\Pi(du)\right\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}ke^k(t_2-t_1)\right\}.$$

Ми скористались тим, що міра $\tilde{\nu}(ds,du)$ не залежить від $\Im$ та нерівністю $\left|e^\lambda - 1 - \lambda\right| \le \frac{1}{2}e^k\lambda^2$ при $|\lambda| \le k$. Звідси випливає, що для ступінчатих функцій виконується нерівність (5) при $c_2 = \frac{1}{2}ke^k$. Отже, вона справедлива і для всіх функцій $\varphi(s,u)$.

Позначимо U_t^0 розв'язок операторного стохастичного диференціального рівняння

$$dU_t^0 = AU_t^0 dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k U_t^0 dW_k(t) + \int_U C_k(u)U_t^0 \tilde{\nu}_k(du,dt)\right],\ U_0^0 = I\,. \tag{6}$$

Тоді $\overline{x}(t) = U_t^0\overline{x}(0)$. Покладемо для деякого $t_0 > 0$

$$v(x) = M_x\int_0^{t_0}\left|\overline{x}(s)\right|^p ds = M\int_0^{t_0}\left|U_s^0 x\right|^p ds\,. \tag{7}$$

Звідси

$$v'(x) = M\int_0^{t_0} p\left|U_s^0 x\right|^{p-2} U_s^0 x ds\,,$$

$$v''(x) = M\int_0^{t_0}\left(p\left|U_s^0 x\right|^{p-2} U_s^0 - p(p-2)\left|U_s^0 x\right|^{p-4} U_s^0 x \circ U_s^0 x\right) ds\,.$$

На підставі оцінки (4) похідні v' і v'' визначені при $|x| \neq 0$ і виконуються наступні нерівності:

$$k_1 |x|^p \le v(x) \le k_2 |x|^p\,,\ |v'(x)| \le k_3(t_0)|x|^{p-1}\,, \qquad (8)$$

$$\| v''(x) \| \le k_4(t_0)|x|^{p-2}\,.$$

Можна покласти $k_2 = \dfrac{1}{\alpha^2}$, $k_3(t_0) = \dfrac{p}{c_{p-1}}\exp\left\{c_{p-1}t_0\right\}$, $k_4(t_0) \le$ $\le \dfrac{p^2}{c_{p-2}}\exp\left\{c_{p-2}t_0\right\}$ (для оцінок похідних скористаємось (4)) , сталу k_1 визначимо наступним чином

$$k_1 = \inf_{|y|=1} M\int_0^{t_0} |U_s^0 y|^p\, ds\,,$$

її додатність випливає з додатності при $|x| \neq 0$ та неперервності функції $M\int_0^{t} |U_s^0 x|^p\, ds$. Розглянемо інтегро-диференціальні оператори

$$\overline{L}\varphi(x) = \left(Ax, \varphi'(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\left(\varphi''(x)B_k x, B_k x\right) +$$

$$+\int_U \left(\varphi(x + C_k(u)x\right) - \varphi(x) - \left(\varphi'(x), C_k(u)x\right)\right)\Pi_k(du)\Big]\,,$$

$$L\varphi(x) = \overline{L}\varphi(x) + L_0\varphi(x)\,,$$

$$L_0\varphi(x) = \left(a_0 x, \varphi'(x)\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\left(\varphi''(x)b_k^0 x, b_k^0 x\right) +$$

$$+\int_U \left(\varphi\left(x + c_k^0(x,u)\right) - \varphi(x) - \left(\varphi'(x), c_k^0(x,u)\right)\right)\Pi_k(du)\Big]\,.$$

Оператор $\overline{L}$ є твірним на двічі неперервно-диференційовних функціях для процесу $\overline{x}(t)$, а оператор L — твірний оператор на двічі неперервно-диференційовних функціях для процесу $x(t)$. Якщо $\varphi \in C^2_{\mathbb{R}^d}$, то, позначивши $\widehat{T}_t$ напівгрупу, що відповідає процесу $\overline{x}(t)$, матимемо

$$\overline{L}M\int_0^{t_0}\varphi(U_s^0x)ds = L\int_0^{t_0}\widehat{T}_t\varphi(x_s)ds = \widehat{T}_{t_0}\varphi(x)-\varphi(x)\,.$$

Застосувавши операцію граничного переходу, отримуємо формулу

$$\overline{L}v(x) = M\left|U_{t_0}^0x\right|^p - |\,x\,|^p \le -|\,x\,|^p\left(1-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t_0}\right).$$

Виберемо t_0 таким, щоб $\overline{L}v(x) \le -\frac{1}{2}|\,x\,|^p$. Можна записати

$$L_0v(x) = \left(a_0(x),\varphi'(x)\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(v''(x)b_k^0(x),b_k^0(x)\right)+\right.$$

$$\left.+\int_U\left(v\left(x+c_k^0(x,u)\right)-v(x)-\left(v'(x),c_k^0(x,u)\right)\right)\Pi_k(du)\,.\right.$$

Використаємо умову 2:

$$|\,L_0v(x)\,| \le \left(\varepsilon\,|\,x\,|+|\,x\,|^2\right)|\,v'(x)\,|+\left(\varepsilon\,|\,x\,|+|\,x\,|^2\right)^2\|\,v''(x)\,\| \le$$

$$\le |\,x\,|^p\left(\varepsilon+|\,x\,|\right)k_3(t_0)+|\,x\,|^p\left(\varepsilon+|\,x\,|\right)^2k_4(t_0)$$

(на підставі оцінок (8) для похідних). Отже,

$$Lv(x) \le -|\,x\,|^p\left(\frac{1}{2}-\varepsilon k_3(t_0)-\varepsilon^2k_4(t_0)-k_5\left(|\,x\,|+|\,x\,|^2\right)\right).$$

Тут k_5 — деяка стала. Нехай ε_0 таке, що при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ $\frac{1}{2}-\varepsilon k_3(t_0)-\varepsilon^2k_4(t_0) > \frac{1}{4}$. Тоді існує таке $\delta > 0$, що при $|\,x\,| < \delta$ $Lv(x) \le -\frac{1}{4}|\,x\,|^p$. Тому для деякого k $Lv(x) \le -kv(x)$ і асимптотичну стійкість точки 0 для процесу $x(t)$ встановлено.

Згідно відомого твердження [1] для всіх x

$$P_x\left\{\lim_{t\to\infty}|\,\overline{x}(t)\,| = +\infty\right\} = 1\,.$$

Отже, для деяких $p > 0$ та $\alpha > 0$

$$M_x\,|\,\overline{x}(t)\,|^{-p} \le \frac{|\,x\,|^{-p}}{\alpha}\exp\{-\alpha t\}\,.$$

Покладемо

$$z(x) = M_x\int_0^{t_0}|\,\overline{x}(s)\,|^{-p}\,ds = \int_0^{t_0}M\,|\,U_s^0x\,|^{-p}\,ds\,.$$

Використавши міркування, які застосовувались для виведення оцінок (8), переконуємось, що існують такі l_1, l_2, $l_3(t_0)$, $l_4(t_0)$, що

$$l_1 \,|\, x \,|^{-p} \le |\, z(x) \,| \le l_2 \,|\, x \,|^{-p},$$

$$|\, z'(x) \,| \le l_3(t_0) \,|\, x \,|^{-p-1}, \ \|\, z''(x) \,\| \le l_4(t_0) \,|\, x \,|^{-p-2}. \qquad (9)$$

Тому

$$|\, L_0 z(x) \,| \le (\varepsilon + |\, x \,|) \,|\, x \,|^{-p} \, l_3(t_0) + (\varepsilon + |\, x \,|)^2 \,|\, x \,|^{-p} \, l_4(t_0),$$

$$\overline{L}z(x) = -|\, x \,|^{-p} + M \,|\, U_{t_0}^0 x \,|^{-p} \le -|\, x \,|^{-p} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\exp\{-\alpha t_0\}\right) \le -\frac{1}{2} |\, x \,|^{-p}$$

(при умові, що α вибирається так, як і раніше). Тому так само можна вибрати $\delta > 0$, що при $|\, x \,| < \delta$

$$Lz(x) \le -l_5 z(x), \ l_5 > 0.$$

Отже, при $0 < \lambda < l_5$ $z(x)$ є λ-супермартингалом. Значить, існує скінченна границя

$$\lim_{t \to \infty} z(x(t \wedge \tau_U)) \exp\{\lambda(t \wedge \tau_U)\},$$

тобто

$$P_x\{\tau_U < \infty\} = 1$$

для всіх $x \in U$, оскільки при $t < \tau_U$ $|\, x(t) \,| < \delta$, а $|\, x(\tau_U) \,| \le \delta(1 + c_1)$, де $c_1 = \sup\limits_{|x| \le \delta, u} c_k(x, u)$, що і доводить нестійкість у точці 0.

Висновки. Встановлено умови стійкості та нестійкості за першим наближенням розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертових просторах.

Список використаних джерел:

1. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наука. думка, 1982. — 612 с.
2. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наука. думка, 1987. — 328 с.
3. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk. — Kluwer : Dordrecht, 1999. — 185 p.
4. Koroliuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Koroliuk, N. Limnios // World Scientific Publishing. — 2005. — 330 p.
5. Хусаинов Д. Я. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциальных функциональных систем / Д. Я. Хусаинов, А. В. Шатырко. — К. : Издательство ИНТИ, 1997. — 236 с.
6. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциальных — функциональных уравнений / Е. Ф. Царьков. — Рига : Издательство «Зинатне», 1989. — 429 с.

Sufficient conditions for stability and instability after the first approaching of solutions of stochastic differential equations with winerian and poisson perturbations in Hilbert spaces are obtained.

Key words: *Hilbert space, stability after the first approaching, formative operator, Markov process.*

Отримано: 06.11.2013

УДК 518:517.948

Р. М. Пелещак, д-р фіз.-мат. наук, професор,
М. В. Дорошенко, канд. фіз.-мат. наук

Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка, м. Дрогобич

ТОПОЛОГІЯ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ПУАССОНА З НЕОДНОРІДНІСТЮ У ВИГЛЯДІ РЯДУ З УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Побудовано математичну модель топології розподілу 2D-електростатичного поля в діоді Шотткі з вбудованим шаром квантових точок, яка представляється у вигляді крайової задачі для двовимірного рівняння Пуассона з неоднорідністю у вигляді ряду з узагальнених функцій. Побудований чисельний алгоритм розв'язування крайової задачі методом послідовних надрелаксцій.

Ключові слова: *математична модель, електростатичне поле, крайові задачі, рівняння Пуассона, узагальнені функції.*

Постановка проблеми. Інтенсивний розвиток нанотехнологій в останні роки привів до необхідності побудови математичних моделей, які б описували фізико-механічні та електричні властивості нанооб'єктів (2D, 1D, 0D — наногетеросистем). Сучасні нанотехнології дозволяють вирощувати, як окремі квантові точки (КТ), так і цілі масиви когерентно-напружених КТ, на основі яких створюються нанооптоелектронні прилади (лазери, світло-діоди, діоди Шотткі) [1–6]. Побудова приладів з використанням масивів КТ (InAs/GaAs, CdTe/ZnTe) дозволяє ефективно керувати їхніми електричними та оптичними характеристиками, завдяки прогнозованому контролю технологічних параметрів таких як щільність, відстані від масиву КТ до контакту метал — напівпровідник, розміри, форма, спектр станів носіїв заряду. Зокрема, за наявності вбудованих в область просторового заряду КТ бар'єрної структури виду Шотткі за певних технологічних параметрів можливе виникнення S-подібних вольт-амперних характеристик діодів Шотткі, які можуть бути використані в високочастотній електроніці.