УДК 519.19; 519.929

В. К. Ясинський, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Н. П. Донець, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ІСНУВАННЯ МАЙЖЕ НАПЕВНО СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Доведена теорема існування та єдиності сильного розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння з зовнішніми випадковими збуреннями класичним методом стислих відображень.

Ключові слова: *стохастичне диференціально-функціональне рівняння, існування розв'язку, випадкове збурення.*

Вступ. У статті розкривається проблема існування сильного розв'язку нелінійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння з випадковими збуреннями довільної природи.

Постановка задачі. Нехай на імовірнісному базисі $\left(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} \equiv \left\{\mathcal{F}_t, T \ge t \ge 0\right\}, \mathbb{P}\right)$ задано випадкові процеси $x(t) \equiv$ $\equiv x(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$; $x_t(\theta) \equiv x(t+\theta) \in D(\mathbb{R}^n)$; $\varphi(\theta) \in D(\mathbb{R}^n)$, $\theta \in [-\tau, 0]$; скалярний процес броунівського руху $w(t) :=$ $:= w(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$; $\tilde{v}(dt,du,\omega) :\equiv v(dt,du) - E\{v\}$ — скалярна центрована пуассонова міра [3]; $f_j(t,\omega):[0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,3}$, — неперервні обмежені випадкові процеси, які не залежать від $w(t,\omega)$, $\tilde{v}(t,A)$ та $\varphi(\theta)$, при цьому є незалежність від подій $\sigma-$алгебри [2] $N_0(dw) \cup N_0(d\tilde{v}) \cup N_0(f_j)$, $j = \overline{1,3}$; $D \equiv D(\mathbb{R}^n)$ — простір Скорохода неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі [2, 5, 14]. $\forall t \in [-\tau, T]$ виконується рівність $x_t(\theta)\big|_{t=0} = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, а для $\forall t \in [0,T]$ має місце інтегральне стохастичне диференціально-функціональне рівняння з випадковими збуреннями (СДФР з ВЗ) [1, 4, 5, 8, 9]

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f_1(s,\omega)\, a(s, x_s(\theta))\, ds + \int_0^t f_2(s,\omega)\, b(s, x_s(\theta))\, dw(s) + \int_0^t \int_U f_3(s,\omega)\, c(s, x_s(\theta), u)\, \tilde{v}(ds, du) \qquad (1)$$

за початковою умовою

$$x_t\left(\theta\right)\Big|_{t=0}=\varphi\left(\theta\right)\in D(\mathbb{R}^n)\,. \qquad (2)$$

$a:\left[0,T\right]\times D\to\mathbb{R}^n;\quad b:\left[0,T\right]\times D\to\mathbb{R}^n;\quad c:\left[0,T\right]\times D\times U\to\mathbb{R}^n$ — є неперервні за сукупністю змінних функціонали; $x_t\left(\theta\right)=$ $=\left\{x\left(t+\theta\right),\theta\in\left[-\tau,0\right]\right\}\subset D\left(\mathbb{R}^n\right)$ — неперервні справа функції, що мають лівосторонні границі (НПЛГ) [2], [7].

Запишемо інтегральне СДФР з ВЗ (1) у вигляді стохастичного диференціала

$$\begin{gathered}dx\left(t\right)=f_1\left(t,\omega\right)a\left(t,x_t\left(\theta\right)\right)ds+f_2\left(t,\omega\right)b\left(t,x_t\left(\theta\right)\right)dw\left(t\right)+\\+\int\limits_U f_3\left(t,\omega\right)c\left(t,x_t\left(\theta\right),u\right)\tilde{v}\left(dt,du\right)\end{gathered} \qquad (3)$$

за початковою умовою (2).

Зауваження 1. Будемо говорити, що рівняння (3) має єдиний сильний розв’язок за початкової умови (2), якщо всі розв’язки стохастично еквівалентні.

Надалі сильний розв’язок задачі (1), (2) будемо позначати $x\left(t\right)\equiv x\left(t,s,\varphi\right)$ для $0\le s\le t\le T$.

Про введення нормування. Позначимо через $\mathcal{F}$ мінімальну σ-алгебру, стосовно якої вимірні прирости броунівського руху, пуасонівські міри та зовнішні випадкові процеси — збурення $f_i\left(t,\omega\right)$, $j=\overline{1,3}$, на відрізку $\left[0,T\right]$ за заданими законами розподілу

$$F_j\left(t\right)\equiv P\left\{\omega:f_j\left(t,\omega\right)\langle c\right\}$$

для $\forall c\in\mathbb{R}$.

Позначимо через G^S простір випадкових процесів $\varphi\left(s\right)\equiv\varphi\left(s,\omega\right)$, які є $\mathcal{F}^s\subset\mathcal{F}^t\subset\mathcal{F}$ — вимірними для довільних $t\ge s\ge 0$ та інтегровані в середньому квадратичному

$$\int\limits_0^t E\left\{\left|\varphi\left(s\right)\right|^2\right\}ds\langle\infty.$$

У просторі Скорохода D крім звичайної метрики Скорохода [2]

$$\rho_D\left(\varphi,\psi\right)\equiv\inf_{\lambda}\left(\sup_{-h\le t\le 0}\left|\varphi\left(t\right)-\psi\left(\lambda\left(t\right)\right)\right|+\sup_{-h\le t\le 0}\left|\lambda\left(t\right)-t\right|\right), \qquad (4)$$

де $\left\{\lambda\left(t\right),\forall t\in\left[-h,0\right]\right\}\subset\Lambda$ — простір всіх зростаючих, неперервних відображень відрізка $\left[-h,0\right]$ на себе, $\lambda\left(0\right)=0,\,\lambda\left(-h\right)=-h,$ розглядаємо норму [14]

$$\|\varphi\|_0^2 \equiv |\varphi(0)|^2 + \int_{-h}^{0} |\varphi(\theta)|^2 \, d\theta, \tag{5}$$

а у просторі $G \equiv G^0$ відповідно

$$\|\varphi\|_G^2 \equiv E\left\{\|\varphi\|_0^2\right\} \langle \infty.$$

Простір Скорохода D є сепарабельним, бо в якості зліченої всюди щільної множини можна взяти множину, визначену такими елементами φ, які мають раціональні значення для деякого цілого k на кожному інтервалі $\left[\frac{\tau-1}{k}, \frac{i}{k}\right), 0 \le i \le k$ [3].

Однак простір Скорохода D не є повним відносно метрики $\rho(\sigma)$, але цей простір буде повним у еквівалентній метриці [2]

$$\rho_1(\varphi,\psi) \equiv \inf\left(\sup_{-h \le t \le 0} \left|\varphi(t) - \psi(\lambda(t))\right| + \sup_{t \ne s} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \right).$$

Надалі простір D за нормою (5) будемо позначати через D^0. Очевидно, що D^0 лінійний простір за нормою (5) [8].

Доведемо твердження про зв'язок норм. Для цього розглянемо класичну рівномірну метрику для $\forall \varphi \in D^0$:

$$\|\varphi\| \equiv \sup_{-\tau \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|.$$

Теорема 1. Нехай на імовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ задано:

1) $\forall \varphi \in D \equiv D([-\tau, 0])$;
2) послідовність елементів $\{\varphi_m, m \in N\} \subset D$;
3) виконується рівність

$$\lim_{m \to \infty} \rho_D(\varphi_m, \varphi) = 0.$$

Тоді

$$\lim_{m \to \infty} \|\varphi_m - \varphi\| = 0.$$

Доведення. За означенням метрики ρ_D для $\forall m \in N$ виберемо монотонну послідовність $\{\lambda_m(\theta) \ge 0\}$, щоб виконувалася нерівність

$$\left|\varphi_m(\theta) - \varphi(\lambda_m(\theta))\right| + \left|\lambda_m(\theta) - \theta\right| < \rho_D(\varphi_m, \varphi) + \frac{1}{m}.$$

За означенням метрики ρ_1 випливає

$$\rho_D(\varphi_m,\varphi) \ge \left|\varphi_m(0)-\varphi(0)\right|^2 .$$

Значить $\forall\theta \in [-\tau, 0]$ маємо нерівність

$$\left|\varphi_m(\theta)-\varphi(\theta)\right|^2 \le 2\left|\varphi_m(\theta)-\varphi(\lambda_m(\theta))\right|^2 + 2\left|\varphi(\lambda_m(\theta))-\varphi_m(\theta)\right|.$$

Звідки випливає виконання нерівності

$$\left\|\varphi_m(\theta)-\varphi(\theta)\right\|^2 \le \rho_D^2(\varphi_m,\varphi)+2\int_{-h}^{0}\left|\varphi_m(\theta)-\varphi(\lambda_m(\theta))\right|^2 d\theta +$$

$$+2\int_{-h}^{0}\left|\varphi(\lambda_m(\theta))-\varphi_m(\theta)\right| d\theta \le$$

$$\le (4h+1)\rho_D^2(\varphi_m,\varphi)+\frac{4h}{m^2}+2\int_{-h}^{0}\left|\varphi(\lambda_m(\theta))-\varphi_m(\theta)\right| d\theta.$$

Внаслідок неперервності справа $\{\varphi(\theta)\}$, збіжності послідовності $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda_m(\theta)=\theta$ та рівності $\lambda_m(0)=0$ після застосування теореми Лебега [15] про граничний перехід під знаком інтеграла останнього співвідношення матимемо доведення теореми 1.

Існування майже напевно сильного розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння з випадковими збуреннями. Принцип стислих відображень за Колмогоровим [2–3, 15] можна застосувати для встановлення достатніх умов існування та єдиності розв'язку задачі Коші СДФР з ВЗ (1), (2).

Нехай побудовано базис $\left(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F}\equiv\{\mathcal{F}_t, t\ge 0\},\mathbb{P}\right)$ за Колмогоровим для задачі Коші розв'язку СДФР з ВЗ (1), (2). На імовірнісному базисі задано процес броунівського руху $\{w(t)\equiv w(t,\omega)\}\subset R^n$; $\{\tilde{v}(dt,A)\}\subset\mathbb{R}$ — центрована пуассонова міра, $f_j(t,\omega)\subset\mathbb{R},\ j=\overline{1,3}$ та незалежний від подій $\sigma-$алгебри $N_0(w)\cup N_0(\tilde{v})\cup N_0(f_j(\xi))$ $n-$вимірний випадковий процес $\varphi(\theta)\equiv\varphi(\theta,\omega)\in[-h,0]$ з реалізаціями, які не мають розривів другого роду [2].

Теорема 2. Для коефіцієнтів-функціоналів СДФР з ВЗ виконуються умови:

1) $a(t,\varphi), b(t,\varphi)$ та $c(t,\varphi,u)$ неперервні за сукупністю змінних для будь-яких $\varphi\in D,\ t\in[0,T]$;

2) $a,\ b,c,\ f_j$ задовольняють умови Ліпшиця

$$\left|a\left(t,\varphi\right)-a\left(t,\psi\right)\right|^2+\left|b\left(t,\varphi\right)-b\left(t,\psi\right)\right|^2+ \\ +\int\limits_U\left|c\left(t,\varphi,u\right)-c\left(t,\psi,u\right)\right|^2\Pi\left(du\right)\le K\left\|\varphi-\psi\right\|^2, \tag{6}$$

$$\left|f_j\left(t,\varphi\right)-f_j\left(t,\psi\right)\right|^2\le K\left\|\varphi-\psi\right\|^2 \tag{7}$$

для будь-яких $\varphi,\psi\in D,\ j=\overline{1,3}$;

3) випадкові збурення $f_j\left(t,\omega\right),\ j=\overline{1,3}$ неперервні за сукупністю змінних;
4) існують математичні сподівання для $\forall t\in\left[0,T\right]$: $\mathrm{E}\left\{f_j^2\left(t,\omega\right)\right\}$, $\mathrm{E}\left\{\left|f_j\left(t,\omega\right)\right|^4\right\}<\infty,\ j=\overline{1,3}$;
5) випадкові функції $a\left(t,\xi\right),b\left(t,\xi\right),c\left(t,\xi,u\right)$ не залежать від випадкових функцій $f_j\left(t,\xi\right),\ j=\overline{1,3},$ де $\xi\equiv\xi\left(\omega\right)\in R^n$ — довільна випадкова величина з імовірнісного базису;
6) існують четверті моменти для початкових процесів

$$E\left\{\left\|\varphi\right\|^4\right\}<\infty.$$

Тоді для будь-якого $T>0$ існує сильний розв'язок з точністю до стохастичної еквівалентності задачі (1), (2) на $\left[0,T\right]$.

Доведення (базується на принципі стислих відображень) [2, 5].

І) Доведення повноти простору Σ.

Позначимо через $M^t\equiv N\left(\varphi\right)\cup N_0^t\left(dw\right)\cup N_0^t\left(\tilde{v}\right)\cup N_0^t\left(f_j\left(\xi\right)\right)$ простір випадкових процесів $\varphi,\ \tilde{v},\ f_j$.

Введемо простір Σ випадкових процесів $\left\{\xi\left(t\right)\equiv\xi\left(t,\omega\right)\right\}\subset\mathbb{R}^n$, $\forall t\in\left[-\tau,T\right]$, які M^t-вимірні з реалізаціями в просторі D та задовольняють умови:

1) норма в Σ задана наступним чином

$$\left\|\xi\right\|_\Sigma^2\equiv E\left\{\sup_{-h\le t\le T}\left|\xi\left(t,\omega\right)\right|^2\right\}<\infty; \tag{8}$$

2) $\xi\left(t,\omega\right)\equiv\varphi\left(t,\omega\right)$ для $\forall t\in\left[-\tau,0\right]$.

Простір Σ можна розглядати як підпростір простору випадкових величин зі значеннями у D для кожного фіксованого $t\in\left[0,T\right]$.

Нехай числова послідовність величин $\{\xi_n, n \in N\}$ збігається за нормою простору Σ (8). Тоді відповідна послідовність випадкових величин $\{\xi_n(\omega), n \in N, \omega \in \Omega\}$ збігається за ймовірністю [2], а значить існує випадкова величина $\{\xi(\omega), \omega \in \Omega\}$ зі значеннями в D до якої збігається $\{\xi_n(\omega), n \in N, \omega \in \Omega\}$. Ця випадкова величина $\xi(\omega)$ задана на D за побудовою імовірнісного базису.

Ця випадкова величина $\xi(\omega)$ визначає M^t -вимірний випадковий процес $\xi(t,\omega)$ з Σ^0, а значить випливає повнота цього простору Σ.

II. Побудова оператора $S\eta$, що стискається

Визначимо для $\alpha, \eta \in \Sigma$ оператор

$$(S\eta)(t) \equiv \begin{cases} \varphi(t) \quad для \quad \forall t \in [-\tau, 0]; \\ \varphi(0) + \int\limits_0^t f_1(s,\alpha) a(s, \eta_s(\theta)) ds + \\ + \int\limits_0^t f_2(s,\alpha) b(s, \eta_s(\theta)) dw(s) + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_U f_3(s,\alpha) c(s, \eta_s(\theta), u) \tilde{v}(ds, du) \quad для \quad \forall t \in [0, T]. \end{cases} \tag{9}$$

Оператор S переводить простір Σ у простір Σ. Це випливає з властивостей інтеграла Вінера-Іто та інтеграла за випадковою мірою [2–6, 8–12] та умов теореми 2.

Згідно [15], розв'язок рівняння (1) еквівалентний рівнянню

$$\eta = S\eta.$$

Тому доведення існування та єдиності сильного розв'язку (1), (2) еквівалентне доведенню існуванню та єдиності нерухомої точки оператора S^m у просторі Σ [15].

III. Побудова оператора $S^m \left(m \in N\right)$

Визначимо оператор S^m як $m-$кратне послідовне застосування оператора S (див (9)). Використавши умови Ліпшиця (6) та (7) для $\{\eta_1, \eta_2\} \subset \Sigma^0$ легко одержати нерівність для $\forall t \in [0, T]$, а саме

$$E\left\{ \sup_{-h \le s \le t} \left| (S\eta_1)(s) - (S\eta_2)(s) \right|^2 \right\} \le 3K(T + 4K_1) Kt \|\eta_1 - \eta_2\|_\Sigma^2, \tag{10}$$

де $K_1 = 1 + \int\limits_U \Pi(du) < \infty.$

Значить для S^m за нерівністю (10) для довільних $m \in N$ матимемо

$$\left\|S^m \eta_1 - S^m \eta_2\right\|_\Sigma^2 = E\left\{\sup_{0\le s\le T}\left|\left(S^m \eta_1\right)(s) - \left(S^m \eta_2\right)(s)\right|^2\right\} \le$$

$$\le \frac{\left(3K^2\left(T+4K_1\right)Kt\right)^m}{m!}\left\|\eta_1-\eta_2\right\|_\Sigma^2 .$$

З цієї нерівності випливає, що для фіксованого довільного $T > 0$ та достатньо великого $m \in N$ оператор S^m є стискаючим [15], а тому існує єдина нерухома точка η у просторі Σ, тобто $S^m \eta = \eta.$

Цей випадковий процес буде сильним розв'язком СДФР з ВЗ (1), оскільки для довільних $k \in N$ з (10) випливає нерівність

$$0 \le \left\|\eta - s\eta\right\|_\Sigma = \left\|S^{km}\eta - S^{km+1}\eta\right\|_\Sigma \le \frac{\left(3K^2\left(T+4K_1\right)K\right)^{km} T^{km}}{(mk)!}\left\|\eta - s\eta\right\|_\Sigma . \quad (11)$$

Тоді, з (11) матимемо

$$\left\|\eta - s\eta\right\|_\Sigma = 0,$$

що і доводить теорему 2.

Основні нерівності для сильних розв'язків СДФР з ВЗ. Припустимо, що до попередніх обмежень додається умова рівномірної обмеженості

$$\sup_{t\ge 0}\left(\left|a(t,0)\right|^2 + \left|b(t,0)\right|^2 + \int_U \left|c(t,0,u)\right|^2 \Pi(du) a^2\right) < \infty . \quad (12)$$

Поряд з глобальною інтегральною для $\forall t \ge 0$ і $\varphi,\psi \in D$ умовою Ліпшиця вигляду

$$\begin{gathered}\left|a(t,\varphi) - a(t,\psi)\right|^2 + \left|b(t,\varphi) - b(t,\psi)\right|^2 + \\ + \int_U \left|c(t,\varphi,u) - c(t,\psi,u)\right|^2 \Pi(du) \le K \int_{-h} \left|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\right|^2 \beta(d\theta)\end{gathered} \quad (13)$$

виконується локальна інтегральна умова Ліпшиця

$$\begin{gathered}\left|a(t,\varphi) - a(t,\psi)\right|^2 + \left|b(t,\varphi) - b(t,\psi)\right|^2 + \\ + \int_U \left|c(t,\varphi,u) - c(t,\psi,u)\right|^2 \Pi(du) \le K \int_{-h} \left|\varphi(\theta) - \psi(\theta)\right|^2 \beta(d\theta)\end{gathered} \quad (14)$$

для $\forall t \ge 0,\ r > 0$ і $\varphi,\psi \in S_r^{(\beta)} \equiv \left\{\varphi \in D \middle| \left\|\varphi\right\|_\beta < r\right\}.$

Умови (12), (13), (14) задовольняють умови теореми 2, а значить за умовами (12), (13) або (12), (14) існує сильний розв'язок СДФР з ВЗ (1), (2).

Лема 1. Для $\forall\varphi\in D$ та для деяких $L\in(0,1]$ виконується нерівність

$$\|\varphi\|_{\beta}^{2}\equiv\int_{-h}^{0}\left|\varphi(\theta)\right|^{2}\beta(d\theta)\geq\frac{1}{2}\left|\varphi(0)\right|^{2}.$$

Доведення. Має місце нерівність

$$L\int_{-h}^{0}\left|\varphi(\theta)\right|^{2}\beta(d\theta)\leq L\left(\left|\varphi(\theta)\right|^{2}+\int_{-h}^{0}\left|\varphi(\theta)\right|^{2}\beta(d\theta)\right)\leq 2L\int_{-h}^{0}\left|\varphi(\theta)\right|^{2}\tilde{\beta}(d\theta).$$

Де міра $\tilde{\beta}$ на $[-\tau,0]$ визначена рівністю

$$\int_{-h}^{0}l(\theta)\tilde{\beta}(d\theta)=\frac{1}{2}l(0)+\int_{-h}^{0}l(\theta)\beta(d\theta)$$

для $l\in C\left([-\tau,0]\right)$.

Для спрощення викладення доведення наступних теорем у СДФР з ВЗ (1) покладемо $f_j(t,\cdot)\equiv 1,$ тобто розглядаємо СДФР без ВЗ

$$dx(t)=a\left(t,x_t(\theta)\right)ds+b\left(t,x_t(\theta)\right)dw(t)+\int_{U}c\left(t,x_t(\theta),u\right)\tilde{v}(dt,du)\qquad(15)$$

за початковою умовою (2) вигляду

$$x_t(\theta)\Big|_{t=0}=\varphi(\theta,\omega)\in D\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Теорема 3. Нехай виконано умови (12) та (13) або (12), (14). Тоді для $\forall\varphi\in G^s$ та $t\in[s,s+T]$ виконуються нерівності

$$E\left\{\sup_{s\leq t\leq s+T}\left\{\left|x(t,s,\varphi)\right|^{2}\Big|M_s\right\}\right\}\leq C(T)\left(\|\varphi\|+\alpha^{2}\right),\qquad(16)$$

$$E\left\{\sup_{\substack{s\leq t\leq s+T-\Delta\\0\leq\tau\leq\Delta}}\left\{\left|x(t+\tau,s,\varphi)-x(t,s,\varphi)\right|^{2}\Big|M_s\right\}\right\}\leq C(T)\Delta\left(\|\varphi\|_{0}^{2}+\alpha^{2}\right),\qquad(17)$$

де $C(T)$ залежить також від сталої Ліпшиця та числа α^2, $\forall s\geq 0,$ $T\in(0,\infty]$.

Доведення. Спочатку перепишемо (15) для $t\geq s\geq 0$ в інтегральній формі

$$x(t,s,\varphi)=\varphi(0)+\int_{s}^{t}a\left(\tau,x_\tau(\theta)\right)d\tau+\int_{s}^{t}b\left(\tau,x_\tau(\theta)\right)dw(\tau)+$$

$$+\int_{s}^{t}\int_{U}c\left(\tau,x_\tau(\theta),u\right)\tilde{v}(d\tau,du),$$

а для $\forall t \in [-\tau + s, s]$ покладемо $x(t, s, \varphi) = \varphi(t, s)$.

Далі для $m(t) \equiv E\left\{ \sup\limits_{s \le \tau \le s+t} \left| x(\tau, s, \varphi) \right|^2 \middle| M_s \right\}$ з попередньої рівності, використовуючи мартингальну властивість інтеграла Вінера-Іто та інтеграла за пуассоновою мірою [2, 8] матимемо нерівність

$$m(t) \le 4\Bigg(\left|\varphi(0)\right|^2 + (4+T)2\alpha^2 T +$$

$$+2L(T+4)\int_0^t \int_{-h}^0 E\left\{ \left| x(\tau + \theta + s) \right|^2 \middle| M_s \right\} \beta(d\theta) \Bigg) \le$$

$$\le 4\Bigg(\left|\varphi(0)\right|^2 + 2\alpha^2 T(T+4) + 2L(T+4) \int_{-h}^0 \int_0^{-\theta} \left|\varphi(\tau+\theta)\right|^2 d\tau \beta(d\theta) + \tag{18}$$

$$+2L(T+4)\int_0^t m(\tau)\,d\tau \Bigg)$$

Враховуючи

$$\int_0^{-\theta} \left|\varphi(\tau+\theta)\right|^2 d\tau \le \int_{-h-\theta}^{-\theta} \left|\varphi(\tau+\theta)\right|^2 d\tau = \int_{-h}^0 \left|\varphi(\tau)\right|^2 d\tau,$$

нерівність (18) дає першу нерівність цієї теореми (16).

Нерівність (17) випливає із наступної нерівності:

$$E\left\{ \sup_{s \le t \le s+T-\Delta} \left\{ \left| x(t+\tau, s, \varphi) - x(t, s, \varphi) \right|^2 \middle| M_s \right\} \right\} \le 6(\Delta+4)\Delta\left(L+\alpha^2\right) m(T).$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Якщо виконуються умови теореми 3, то для довільних $\{\varphi, \psi\} \in G^s$, $T \ge 0$ та $s \ge 0$ має місце нерівність

$$E\left\{ \sup_{s \le t \le s+T} \left\{ \left| x(t, s, \varphi) - x(t, s, \psi) \right|^2 \middle| M_s \right\} \right\} \le C(T) \left\| \varphi - \psi \right\|_0^2, \tag{19}$$

де $C(T) = 4\left(1 + (T+4)L\right)e^{4LT(T+4)}$.

Доведення.

Позначимо $$m(t) \equiv E\left\{ \sup_{0 \le \tau \le t} \left\{ \left| x(s+\tau, s, \varphi) - x(s+\tau, s, \psi) \right|^2 \middle| M_s \right\} \right\}.$$

Тоді з нерівності Ліпшиця (17) та мартингальних властивостей стохастичних інтегралів, як функцій верхньої межі [3] матимемо нерівність

$$m(t) \le 4\Bigg(\left|\varphi(0)-\psi(0)\right|^2 + L(T+4)\times$$

$$\times\int_0^t\int_{-h}^0 E\left\{\left|x(\tau+\theta+s,s,\varphi)-x(\tau+\theta+s,s,\psi)\right|^2\middle|M_s\right\}\beta(d\theta)\,d\tau+$$

$$+L(T+4)\int_0^t m(t)\,d\tau\Bigg) \le 4\left(1+L(T+4)\|\varphi-\psi\|_0^2+L(T+4)\int_0^t m(t)\,d\tau\right).$$

Залишилося скористатися нерівністю Гронуолла [15] для останньої нерівністю що і дасть оцінку (17) теореми 3.

Зауваження 2. Теорема 4 дає змогу одразу одержати єдиність сильного розв'язку задачі (15), (2), якщо взяти $\varphi(\theta)\equiv\psi(\theta)$ для $\forall\theta\in[-\tau,0]$.

Наслідок 1. За виконання умов теореми 4 для $\forall t\ge s\ge 0$ виконується нерівність

$$E\left\{\sup_{0\le\tau\le t}\left\{\left\|x(\theta,s,\varphi)-x(\theta,s,\psi)\right\|_0^2\middle|M_s\right\}\right\}\le C_2(T)\|\varphi-\psi\|_0^2. \qquad (20)$$

Доведення. Використовуючи нерівність (17) за означенням норми (5) одержимо

$$E\left\{\sup_{0\le\tau\le t}\left\{\left|x(s+\tau,s,\varphi)-x(s+\tau,s,\psi)\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_{\tau-h}^{\tau}\left|x(\theta+s,s,\varphi)-x(\theta+s,s,\psi)\right|^2\right\}d\theta\middle|M_s\right\}\Bigg\}\le$$

$$\le E\left\{\sup_{0\le\tau\le t}\left\{\left|x(s+\tau,s,\varphi)-x(s+\tau,s,\psi)\right|^2\middle|M_s\right\}\right\}+$$

$$+E\left\{\int_{\tau-h}^{\tau}\left|x(\theta+s,s,\varphi)-x(\theta+s,s,\psi)\right|^2d\theta\middle|M_s\right\}+$$

$$+E\left\{\int_{\tau-h}^{\tau}\left|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right|^2d\theta\middle|M_s\right\}\le$$

$$\le E\left\{\sup_{0\le\tau\le t}\left\{\left|x(s+\tau,s,\varphi)-x(s+\tau,s,\psi)\right|^2\middle|M_s\right\}\right\}(1+t)+\int_{\tau-h}^{\tau}\left|\varphi(\theta)-\psi(\theta)\right|^2d\theta.$$

Далі слід врахувати нерівність (19), що дасть (20) з $C_2(t)=1+C(t)(1+t)$.

Теорема 5. Нехай $\varphi \in G^s$ та виконуються умови (16) та (17). Тоді $\forall s \geq 0$

$$\lim_{\Delta \to 0} E\left\{ \sup_{s \leq t \leq \Delta + s} \left\| x_t\left(\theta, s, \varphi\right) - \varphi \right\|_0^2 \right\} = 0 .$$

Доведення. Маючи означення сильного розв'язку СДФР (15) без випадкових збурень, можна записати для $\forall t \in \left[s, s+h\right]$ нерівність

$$\begin{gathered} \left\| x_t\left(\theta, s, \varphi\right) - \varphi \right\|_0^2 \leq \left| x\left(t, s, \varphi\right) - \varphi\left(0\right) \right|^2 + \int_{-h}^{s-t} \left| \varphi\left(\theta + t - s\right) - \varphi\left(0\right) \right| d\theta + \\ +2 \int_{s-t}^{0} \left| x\left(\theta + t, s, \varphi\right) - \varphi\left(0\right) \right|^2 d\theta + 2 \int_{s-t}^{0} \left| \varphi\left(\theta\right) - \varphi\left(0\right) \right|^2 d\theta. \end{gathered} \tag{21}$$

Згідно нерівності (17), матимемо

$$\begin{gathered} E\left\{ \sup_{s \leq t \leq s+\Delta} \left\{ \left| x\left(t, s, \varphi\right) - \varphi\left(0\right) \right|^2 + \int_{-h}^{s-t} \left| x\left(t+\theta, s, \varphi\right) - \varphi\left(0\right) \right| d\theta \middle| M_s \right\} \right\} \leq \\ \leq C_3 \Delta \left(E\left\{ \left\| \varphi \right\|_0^2 \right\} + \alpha^2 \right) \end{gathered}$$

для деякого $C_3 = C_3\left(L, h\right)$.

Отже,

$$\lim_{\Delta \to 0} E\left\{ \int_{-\Delta}^{0} \left| \varphi\left(\theta\right) - \varphi\left(0\right) \right|^2 d\theta \right\} = 0$$

для $\forall \varphi \in G^s$.

Для оцінки другого доданку у (21) продовжимо функцію φ вправо, поклавши $\varphi\left(\theta\right) = \varphi\left(0\right)$ для $\theta \geq 0$, одержимо

$$\int_{-\tau}^{s-t} \left| \varphi\left(\theta + t - s\right) - \varphi\left(\theta\right) \right|^2 d\theta \leq \int_{-h}^{0} \left| \varphi\left(\theta + t - s\right) - \varphi\left(\theta\right) \right|^2 d\theta .$$

Далі слід використати теорему Лебега [2] про граничний перехід під знаком інтеграла, бо підінтегральна функція сумовна в середньому квадратичному та належить простору D.

Розв'язок $x\left(t, s, \varphi\right)$ рівняння (15) є M_s — вимірним випадковим процесом за умови, що $\varphi \in G^s$, причому він є неперервним справа, що має лівосторонню границю. При цьому існує $E\left\{ \left| x\left(t, s, \varphi\right) \right|^2 \right\} < \infty$.

Тому $\forall t \geq s \geq 0 \;\; x\left(t, s, \varphi\right) \in G^t$.

Звідки випливає, що $x_t\left(\theta,s,\varphi\right)$ є випадковим процесом зі значеннями у D_0. Дійсно, це випливає з нерівності (6) для $t \ge \tau \ge s \ge 0$ у вигляді

$$\left\|x_t\left(\theta,s,\varphi\right)-x_\tau\left(\theta,s,\varphi\right)\right\|_0^2=\left\|x_t\left(\theta,\tau,\psi\right)-\psi\right\|_0^2\le$$

$$\le\left|x\left(t,\tau,\psi\right)-\psi\left(0\right)\right|^2+\int\limits_{-h}^{\tau-t}\left|\psi\left(\theta+t-s\right)-\psi\left(\theta\right)\right|^2 d\theta+$$

$$+2\int\limits_{\tau-t}^{0}\left|x\left(\theta+t,\tau,\psi\right)-\psi\left(0\right)\right|^2 d\theta+2\int\limits_{\tau-t}^{0}\left|\psi\left(\theta\right)-\psi\left(0\right)\right|^2 d\theta\,,$$

де $\psi=x_\tau\left(\theta,s,\varphi\right)\in G^\tau$.

Висновок. Доведено теорему існування і єдиності сильного розв'язку СДФР з ВЗ. Основні нерівності сильного розв'язку СДФР отримано без випадкових збурень.

Список використаних джерел:

1. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, В. Б. Колмановский, Л. Е. Шайхет. — М. : Наука, 1992. — 336 с.
2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. — М. : Наука, 1977. — 352 с.
3. Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. — М. : Физматлит, 2005. — 408 с.
4. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : Из-во Уральской академии путей сообщения, 1998. — 222 с.
5. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
6. Свердан М. Л. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем / М. Л. Свердан, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Снятин : Видавничий відділ «Над Прутом», 1996. — 448 с.
7. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 541 с.
8. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1980. — 612 с.
9. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1968. — 358 с.
10. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 328 с.
11. Свердан М. Л. Устойчивость стохастических импульсных систем / М. Л. Свердан, Е. Ф. Царьков. — Рига : Изд-во Рижского технического университета, 1994. — 300 с.

12. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях или параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 368 с.
13. Хусаинов Д. Линейные динамические системы с последействием / Д. Хусаинов, Й. Диблик, М. Ружичкова. — К. : ГП информ.-аналит. агенство, 2015. — 252 с.
14. Ясинський В. К. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський, І. В. Юрченко. — Чернівці : Золоті литаври, 2011. — 738 с.
15. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М. : Мир, 1984. — 421 с.

It has been proved the existence and uniqueness theorem almost certainly for strong solution of stochastic functional differentional equation with external random perturbations by classic method of contraction mappings.

Key words: *stochastic functional differentional equation, existence of solution, external perturbation.*

Отримано: 16.03.2016