

transport have been compared. In the second case moisture distribution in the soil is much more irregular. It reflects more accurately the setting of the problem and is explained by the impact of mentioned above variable parameters. The results of the numerical experiments attest the importance of considering mass transfer and accompanying factors for that kind of problems.

Key words: *mathematical model, porous medium, moisture transport, mass transfer, finite element method.*

Отримано: 18.05.2018

УДК 004.942+681.62

Я. Ю. Коляно*, канд. фіз.-мат. наук,

Є. Г. Іваник**, канд. фіз.-мат. наук,

О. В. Сікора***, канд. техн. наук,

М. В. Дорошенко***, канд. фіз.-мат. наук

*Українська Академія друкарства, м. Львів,

**Національна академія сухопутних військ
імені гетьмана Петра Сагайдачного, м. Львів,

***Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка, м. Дрогобич

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В КОМПОЗИТНИХ ПОЛІГРАФІЧНИХ СТРУКТУРАХ

Сформульовано математичну модель процесу кондуктивно-го нагрівання композитних поліграфічних систем, яка зводиться до розв'язування початково-крайової задачі для однорідного нестационарного рівняння теплопровідності для двошарової пластини з несиметричними граничними умовами. Отриману початково-крайову задачу для нестационарного рівняння теплопровідності розв'язано методом інтегральних перетворень Лапласа, а саме: методом інтегральних перетворень Лапласа в аналітичному вигляді отримано трансформанти розподілів температури в спряжених шарах. Трансформанти розподілів температури представляються у вигляді лінійних комбінацій гіперболічних тригонометричних функцій. Проведено чисельні обрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини щодо кондуктивного сушіння; для дослідження взято композитні структури полімер-картон і полімер-папір. Визначено теплофізичні параметри картону, паперу і поліуретану, що дає змогу моделювати процес кондуктивного нагрівання картону різної товщини на основі встановленого стаціонарного розподілу температури в двошарових композитах типу поліуретан-папір, поліуретан-картон, внаслідок чого виникає можливість удосконалення процесу кондуктивного нагрівання двоша-

рових поліграфічних матеріалів і процесу припресування полімерних плівок. Встановлено, що папір є кращим теплоізолятором, ніж картон, оскільки під час нагрівання двошарової пластини, виготовленої з поліуретану і паперу виникають більші градієнти температури, ніж при нагріванні двошарової пластини такої ж товщини з поліуретану і картону. Також, встановлено, що шар поліуретану, товщиною 1 мм втримує приблизно таку ж температуру, як і картон чи папір, товщиною 5 мм. Чисельні розрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини дозволяють перевірити адекватність розв'язків поставленої нестаціонарної задачі.

Ключові слова: *теплова обробка, математична модель, поліграфічні системи, нестаціонарна задача термовологопровідності, композитні матеріали, термодинамічні параметри.*

Вступ. Конвективний підвід тепла широко застосовується при сушінні капілярно-пористих колоїдних тіл (дерево, картон, папір, целюлоза та ін.). Цей спосіб сушіння застосовується при виробництві пиломатеріалів, деревостружкових та деревоволокнистих плит, шпону, меблів тощо. Конвективний спосіб сушіння широко використовується у поліграфічному виробництві [3–6].

Стан поліграфічних матеріалів, як і будь-якого вологого матеріалу, визначається його температурою і вологістю. Якісно висушення поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів з врахуванням умов експлуатації можуть служити 50–100 і більше років. Сушіння поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів дає значний економічний і екологічний ефект. Але проблема сушіння поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів повністю не розв'язана.

Тому, побудова та дослідження математичних моделей процесу тепломасоперенесення в композитних поліграфічних структурах є актуальною та відповідає сучасним тенденціям наукових досліджень у поліграфії.

Постановка проблеми. Значна кількість поліграфічних матеріалів і напівфабрикатів піддаються сушінню та тепловій обробці на різних етапах поліграфічного виробництва. Сушіння в природних умовах значно збільшує тривалість технологічного процесу, тому необхідно застосовувати штучне висушування.

Процес сушіння — це складний теплофізичний і технологічний процес [1]. Основою теорії сушіння є закономірності переносу тепла і вологи у вологих матеріалах при взаємодії їх з нагрітими газами (конвективне сушіння), з гарячими поверхнями (контактне сушіння), а також в процесах опромінення тепловими і електромагнітними хвилями (терморадіаційне сушіння) при наявності фазових перетворень. Теорія сушіння є важливим розділом теплофізичної науки про тепло- і масообмін. Проте

процес сушіння вологих матеріалів є одночасно і технологічним процесом, в якому міняються структурно-механічні, технологічні і біохімічні властивості матеріалів. Зміна цих властивостей обумовлена тим, що в процесі сушіння відбувається зміна форм зв'язку вологи з матеріалом і її часткове видалення шляхом випаровування. Тому теорія сушіння включає в себе не тільки розділи тепло- і масоперенесення в тілі, але і вчення про форми зв'язку вологи з вологими матеріалами, ряд основних розділів фізико-хімічної механіки і деякі розділи технології і біохімії.

Аналіз попередніх публікацій. В середині ХХ сторіччя академіком О.В. Ликовим були закладені математичні основи теорії сушіння, згідно яких процес сушіння матеріалу характеризується зміною в часі трьох основних функцій: 1) температури (температурна крива в залежності від часу), 2) вологовмісту (вологості) матеріалу (крива сушіння в залежності від часу), 3) швидкості сушіння (крива швидкості сушіння) [1–3]. Першим кроком для аналізу процесу сушіння є отримання температурних кривих в залежності від часу, на основі яких можна встановити основні закономірності процесу сушіння [1, 3]. Наступний етап — отримання кривої вологості спостереження за тим, як вони взаємозв'язано змінюються в часі залежно від швидкості нагріву [1, 2]. Важливим етапом розвитку теорії сушіння є встановлення Ликовим О. В. явища термодифузії надлишкової вологи (термовологопровідності).

Тісний зв'язок з практикою є запорукою вирішення будь-якої наукової проблеми. При цьому першочергове значення має сама технологія процесу, розроблена на підставі аналізу складних виробничих ситуацій. Завдання технології теплової обробки (нагрівання, сушіння) полягає в розробці методів керування процесами, які відбуваються у матеріалі, з метою отримання готового продукту або напівфабрикату високої якості, скорочення тривалості процесу, термінів випуску продукції, а також оптимізації витрат енергії. Розробка методів штучного висушування і нагрівання базується на теорії нагрівання, теорії сушіння і фізико-хімічній механіці [4, 5].

Мета статті: дослідження математичної моделі кондуктивного нагрівання композитних поліграфічних систем та визначення теплофізичних параметрів картону, паперу та поліуретану.

Виклад основного матеріалу. Значна кількість матеріалів, що використовуються у поліграфії є складеними з кількох різноманітних шарів тілами, тобто композитами [4–10]. Більшість з них піддаються сушінню та теплової обробці на різних стадіях поліграфічного виробництва (гідротермічна обробка — ГТО); оптимізація цього процесу є актуальною проблемою процесу отримання різноманітної поліграфічної продукції. Найтипівішими композитами, що піддаються різноманітним видам ГТО, є: деякі види паперу (крейдований папір (паперова основа та покриття на

основі крейди чи каніфолію); картографічний папір); картону (шаруватий картон, що складається з різних шарів (целюлоза, деревна маса, картон) [7], картон із захисною плівкою); сучасні пакувальні матеріали (папір-лак, папір-фольга, папір-поліетилен тощо) [6, 9, 10]; ламіновані відбитки (нанесення полімеру методом розплаву, припресування полімерних плівок) [6]; палітурні кришки (картон, клейовий шар, покрівельний матеріал) [3, 4]; обкладинки (паперова основа і полімерне покриття) [11]; корінці книжкових блоків при вставленні книжкового блоку в обкладинку [4]; друкарські форми (полімерні та фотополімерні друкарські форми на основі металу, гуми та полімеру) [11] та багато інших.

Математична постановка задачі вивчення процесів тепломасоперенесення реалізується на моделі пластинчатих структур і здійснена згідно з теорією нестационарної термовологопровідності А. В. Ликова, розглядається у вигляді початково-крайової задачі для температури $t(z, \tau)$ з несиметричними граничними умовами.

Отже, розглянемо необмежену плиту товщиною h , що складається з двох шарів (рис. 1), які мають різні теплофізичні параметри (коефіцієнти) і товщини z_1, z_2 . Початкова температура цих шарів однакова і дорівнює t_0 . У початковий момент часу $\tau=0$ її верхня поверхня $z=h$, що взаємодіє з оточуючим середовищем згідно закону конвективного теплообміну, піддається дії температурою t_c , а нижня поверхня $z=0$ нагрівається тепловим потоком q . На границі розділу $z=z_1$ приймаються умови ідеального теплового контакту. Потрібно знайти розподіл температури в довільній точці z цієї двохшарової плити залежно від часу.

Математична постановка поставленої задачі, згідно з класичною теорією нестационарної теплопровідності Ликова А. В. [1, 8], виглядає наступним чином:

$$\frac{\partial^2 t_j}{\partial z^2} = \frac{1}{a_j} \frac{\partial t}{\partial \tau} (j=1,2), \quad (1)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial z} + \alpha (t_2 - t_c) = 0 \text{ при } z=h, \quad (2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial z} = -q S_+ (\tau) \text{ при } z=0, \quad (3)$$

$$t_j(z, \tau) = t_0 \text{ при } \tau=0 \quad (4)$$

на границі розділу $z=z_1$ приймаємо умови ідеального теплового контакту:

$$\begin{aligned}
 t_1(z_1, \tau) &= t_2(z_1, \tau), \\
 \lambda_1 \frac{\partial t_1(z_1, \tau)}{\partial z} &= \lambda_2 \frac{\partial t_2(z_1, \tau)}{\partial z}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

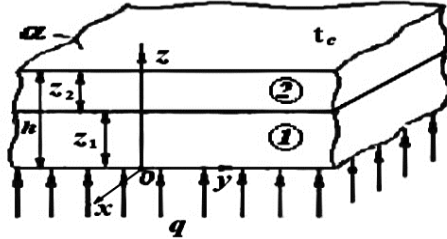


Рис. 1. Схема перерізу двошарової пластини, що кондуктивно нагрівається тепловим потоком

Тут a_j, λ_j — коефіцієнти температуропровідності і теплопровідності відповідно шарів 1 і 2; α — коефіцієнт теплообміну між шаром 2 і контактуючим з ним зовнішнім середовищем; q — величина густини теплового потоку; $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0, \end{cases}$ — асиметрична функція Гевісайда [12].

Розв'язок поставленої крайової задачі (1)–(5) отримується з використанням інтегрального перетворення Лапласа [13] по часу τ ; виконуючи необхідні перетворення отримуємо трансформанти розподілів температури в спряжених шарах:

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_1(z, s) &= \bar{T}_1^{(1)}(z, s) + \bar{T}_1^{(2)}(z, s) = \frac{\varphi(z, s)}{\psi(s)} - \frac{\Phi_1(z, s)}{\Psi_1(s)}; \\
 \bar{T}_2(z, s) &= -\frac{\Phi_2(z, s)}{\Psi_2(s)}; \\
 \varphi(z, s) &= \frac{q}{\lambda_1} \cdot \frac{\text{sh}S_1(z - z_1)}{S_1}; \quad \psi(s) = \text{sch}S_1 z_1; \\
 \Phi_1(z, s) &= \left[\frac{q}{\lambda_1} \left(S_2 \text{ch}S_2 z_2 + \frac{\alpha}{\lambda_2} \text{sh}S_2 z_2 \right) + \frac{\alpha}{\lambda_2} K t_c \text{ch}S_1 z_1 \right] \frac{\text{ch}S_1 z}{\text{ch}S_1 z_1}; \\
 \Phi_2(z, s) &= \frac{q}{\lambda_1 S_1} \left[S_2 \text{ch}S_2 (h - z) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\alpha}{\lambda_2} \text{sh}S_2 (h - z) \right] + \frac{\alpha}{\lambda_2} t_c \left[K \text{ch}S_1 z_1 \text{ch}S_2 (z - z_1) + \text{sh}S_1 z_1 \text{sh}S_2 (z - z_1) \right];
 \end{aligned}$$

$$\Phi_1(s) = \Psi_1(s) = s\Delta(s);$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases} \text{ — символ Кронекера [14]; } iS_1 z_1 = i\sqrt{\frac{s}{a_1}} z_1 = \nu.$$

Проведено чисельні обрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини щодо кондуктивного сушіння; для дослідження взято композитні структури полімер-картон і полімер-папір (рис. 2).

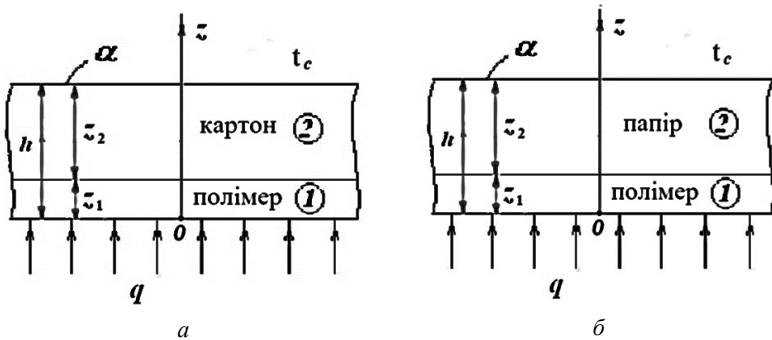


Рис. 2. Схема перерізу двошарової пластини, що кондуктивно нагрівається тепловим потоком: а) полімер-картон; б) полімер-папір

Приймемо, що перший шар пластини виготовлений з поліуретану ($\lambda = 0,026 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{С})$) [16, 17]), а другий з картону ($\lambda = 0,2 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{С})$, $\alpha \approx 11,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{С})$) [1, 16, 17]) чи паперу ($\lambda = 0,14 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{С})$, $\alpha \approx 11,7 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{С})$) [1]); пластини має початкову температуру $t_0 = +10^\circ\text{С}$, нагрівається через нижню поверхню тепловим потоком $q = 1000 \text{ Вт}/\text{м}^2$. Температура оточуючого середовища $t_c = +30^\circ\text{С}$. Обрахунки виконано для наступних товщин поліуретану (z_1) і картону (z_2): 1) $z_1 = 1 \text{ мм.}$, $z_2 = 9 \text{ мм.}$ ($h = 10 \text{ мм.}$); 2) $z_1 = 1 \text{ мм.}$, $z_2 = 5 \text{ мм.}$ ($h = 6 \text{ мм.}$); 3) $z_1 = 1 \text{ мм.}$, $z_2 = 1 \text{ мм.}$ ($h = 2 \text{ мм.}$); обрахунки проведено для наступних товщин поліуретану (z_1) і паперу (z_2): 1) $z_1 = 1 \text{ мм.}$, $z_2 = 9 \text{ мм.}$ ($h = 10 \text{ мм.}$); 2) $z_1 = 1 \text{ мм.}$, $z_2 = 5 \text{ мм.}$ ($h = 6 \text{ мм.}$); 3) $z_1 = 1 \text{ мм.}$, $z_2 = 1 \text{ мм.}$ ($h = 2 \text{ мм.}$).

На графіках, зображених на рис. 3, рис. 4, дано розподіл стаціонарної температури по товщині матеріалу під час нагрівання пластин (плит) різної товщини; спостереження проводилось за трьома поверхнями пластини: $z = 0$ — нижня поверхня пластини, $z = z_1$ — поверхня розділу між матеріалами, $z = h$ — верхня поверхня пластини.

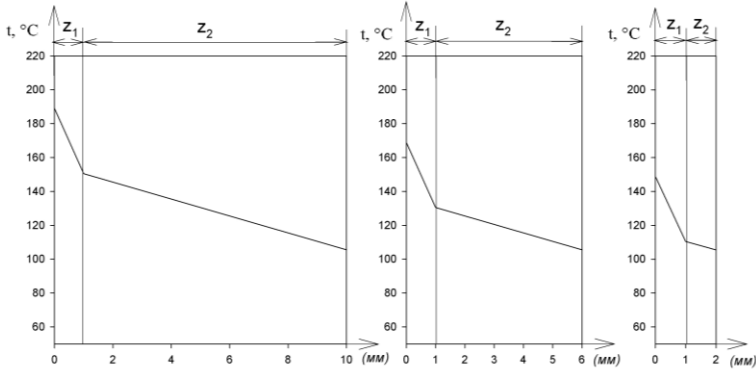


Рис. 3. Розподіли температури по товщині при кондуктивному нагріванні двошарових пластин (поліуретан-картон) товщиною:
а) $h = 10$ мм.; б) $h = 6$ мм.; в) $h = 2$ мм.

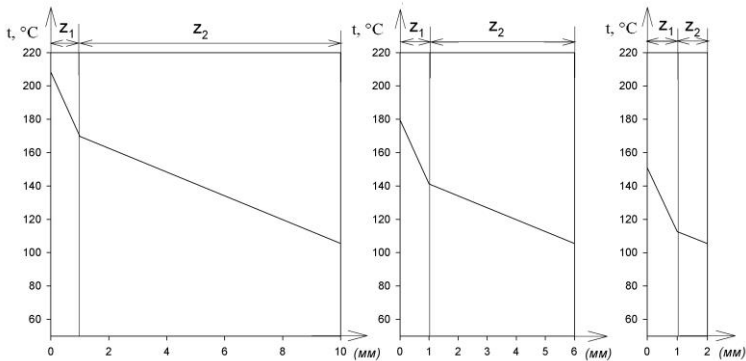


Рис. 4. Розподіли температури по товщині при кондуктивному нагріванні двошарових пластин (поліуретан-папір) товщиною:
а) $h = 10$ мм. б) $h = 6$ мм. в) $h = 2$ мм.

Як видно із графіків, поведінка розподілу температури для пластин різної товщини відрізняється. При товщині пластини поліуретан-картон $h = 10$ мм. перепад (градієнт) температури між верхньою і нижньою поверхнею складає 83°C , причому перепад температури в шарі поліуретану — 38°C , а в картонному шарі — 45°C . При товщині пластини $h = 6$ мм. перепад (градієнт) температури між верхньою і нижньою поверхнею складає 63°C . Стационарна температура на верхній (вільній) поверхні у всіх випадках однакова — 105°C , тоді як на нижній поверхні зменшується зі зменшенням товщини пластини (плити) за рахунок зменшення картонного шару. Поліуретан є добрим теплоізолятором, бо добре затримує тепло, порівняно із картоном.

Висновки.

1. Сформульовано математичну модель процесу кондуктивного нагрівання композитних поліграфічних систем.
2. Методом інтегральних перетворень Лапласа отримано трансформанти розподілів температури в спряжених шарах.
3. Проведено чисельні розрахунки стаціонарної задачі теплопровідності для двошарової нескінченної пластини щодо кондуктивного сушіння.

Як видно із наведених графіків, папір є кращим теплоізолятором, ніж картон, оскільки під час нагрівання двошарової пластини, виготовленої з поліуретану і паперу виникають більші градієнти температури, ніж при нагріванні двошарової пластини такої ж товщини з поліуретану і картону. Шар поліуретану, товщиною 1 мм втримує приблизно таку ж температуру, як і картон чи папір, товщиною 5 мм. Відзначимо, що стаціонарні графіки температури дозволяють перевірити адекватність розв'язків поставленої нестационарної задачі.

Список використаних джерел:

1. Лыков А. В. Теория сушки / А. В. Лыков. — М. : Энергия, 1968. — С. 472.
2. Алабовский А. Н. Теплотехника / А. Н. Алабовский, С. М. Константинов, И. А. Недужий. — К. : Вища школа, 1986. — С. 255.
3. Шот Р. І. Теплові процеси в поліграфії : навч. посіб. / Р. І. Шот, І. Т. Стрелко. — Львів : УАД «Фенікс», 1998. — С. 202.
4. Воробьев Д. В. Технология послепечатных процессов / Д. В. Воробьев. — М. : МГУП, 2000. — С. 392.
5. Озарків І. М. Науково-технічні основи конвективно-радіаційного сушіння деревини: автореф. дис. ... д-ра техн. наук : спец. 05.05.07 / І. М. Озарків. — Львів, 2006. — С. 26.
6. Гавенко С. Ф. Технологія ламінування друкарських відбитків / С. Ф. Гавенко, М. С. Мартинюк. — Львів : УАД, 2008. — С. 79.
7. Загаринская Л. А. Полиграфические материалы: учебник / Л. А. Загаринская, Б. Н. Шахкельдян. — М. : Книга, 1975. — С. 351.
8. Коляно Я. Ю. Нестационарна задача теплопровідності для двошарової плити щодо сушіння поліграфічної продукції / Я. Ю. Коляно, Т. С. Сасс // Комп'ютерні технології друкарства : зб. наук. праць — Львів : УАД, 2009. — № 21. — С. 226–234.
9. Угрин Я. М. Основи пакувальної справи. Металева тара: навч.-метод. посіб. / Я. М. Угрин, Ю. Й. Хведчин, І. І. Регей. — Львів : Укр. акад. друкарства, 2011. — С. 119.
10. Угрин Я. М. Основи пакувальної справи. Полімерна тара : навч.-метод. посіб. / Я. М. Угрин, Ю. Й. Хведчин, І. І. Регей. — Львів : Укр. акад. друкарства, 2011. — С. 142.
11. Йордан Г. М. Основи поліграфії / Г. М. Йордан. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2007. — С. 176.
12. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, В. А. Ломакин — М. : Наука, 1984. — С. 366.

13. Дурняк Б. В. Математична модель нестационарної стрічкопровідної ділянки / Б. В. Дурняк, І. М. Хмельницька, М. М. Луцків // Поліграфія і вид. справа : наук.-техн. зб. — Львів : УАД, 2008. — № 2. — С. 123–131.
14. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1975. — 832 с.
15. Ильинский В. М. Строительная теплофизика / В. М. Ильинский — М. : Высшая школа, 1974. — С. 320.
16. Луцки П. П. Массотермическое деформирование капиллярно-пористых коллоидных тел в процессах сушки / П. П. Луцки // Теплообмен-VII. — Минск : 1984. — С. 90–93.
17. Исаченко В. П. Теплопередача / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — М. : Энергоиздат, 1981. — С. 416.

SIMULATION OF THE PROCESS OF HEAT AND MASS TRANSFER IN COMPOSITE POLYGRAPH STRUCTURES

A mathematical model of the conductive heating process of composite polygraphic systems is formulated, which reduces to the solution of the initial boundary value problem for a homogeneous non-stationary thermal equation for a two-layer plate with asymmetric boundary conditions. The obtained initial boundary value problem for a non-stationary heat equation is solved by the method of Laplace integral transformations, namely: the transformation of temperature distributions in conjugate layers is obtained in the analytical form by the method of integral transformations of Laplace. Transformants of temperature distributions are represented in the form of linear combinations of hyperbolic trinometric functions. Numerical calculations of the stationary heat conduction problem for a double-layer infinite plate in relation to conductive drying are carried out; To study the composite structures of polymer-cardboard and polymer-paper are taken. The thermophysical parameters of cardboard, paper and polyurethane have been determined, which allows to simulate the process of conductive heating of cardboard of different thickness on the basis of the established stationary temperature distribution in two-layer composites of polyurethane-paper type, polyurethane-cardboard, which leads to the possibility of improving the process of conductive heating of two-layer printing materials and process compression of polymer films. It has been established that paper is the best thermal insulator than cardboard, since during the heating of a two-layer plate made of polyurethane and paper there are large temperature gradients than when heating a double-layer plate of the same thickness of polyurethane and cardboard. It has also been established that a layer of polyurethane with a thickness of 1 mm holds about the same temperature as a cardboard or paper, 5 mm thick. Numerical calculations of the stationary heat conduction problem for a two-layer infinite plate allow us to verify the adequacy of the solutions of the set nonstationary problem.

Key words: *thermal processing, mathematical model, polygraphic systems, non-stationary thermal conductivity problem, composite materials, thermodynamic parameters.*

Отримано: 21.05.2018