задачі параметричної ідентифікації для кожної з цих сіток. Реконструйоване зображення розподілу тензора провідності у внутрішності досліджуваного об'єкта, отримане в результаті числових розрахунків, проведених на основі розробленого алгоритму, з достатньою точністю відповідає еталонному. Метод характеризується порівняно швидкою комп'ютерною збіжністю (оскільки, на відміну від багатьох використовуваних методів, не потребує знаходження похідних функції розподілу тензора провідності у визначених точках та уточнення граничних вузлів на кожному ітераційному кроці). Суттєвою його особливістю є можливість порівняно легкого його розпаралелення та зупинки процедури обчислення за умови виконання лише деяких із умов закінчення процесу з автоматичним визначенням тих ділянок фізичної області, де мають місце великі похибки обчислень, що дає змогу економніше використовувати машинний час. Розроблений алгоритм реконструкції зображення може бути поширений не тільки на середовища з відомою сумою власних значень тензора провідності, але й на випадки досить широких інших залежностей між ними. Зокрема підхід забезпечує можливість представлення його деякою комплексно значною функцією як це вимагає біомедична практика.

Ключові слова: *томографія прикладених квазіпотенціалів, квазіконформні відображення, анізотропія, ідентифікація, нелінійні задачі.*

Data received 30.01.2019

УДК 519.6:004.02
DOI: 10.32626/2308-5916.2019-19.17-24

Л. П. Вакал*, канд. техн. наук,
Є. С. Вакал,** канд. фіз.-мат. наук

*Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ,
**Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

НАЙКРАЩЕ РІВНОМІРНЕ НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ

Розглянуто задачу найкращого рівномірного наближення функцій поліноміальними сплайнами з фіксованими вузлами. Для її розв'язання запропоновано підхід на основі еволюційних алгоритмів — потужного класу стохастичних пошукових методів оптимізації. Для знаходження сплайна найкращого рівномірного наближення адаптовано алгоритм диференціальної еволюції. Це один із кращих еволюційних алгоритмів, який стабільно знаходить глобальний оптимум цільової функції (критерію оптимізації) за мінімальний час. Еволюційний процес в алгоритмі починається з генерації популяції випадкових векторів, координати яких представляють собою можливі значення коефіцієнтів сплайна. Далі вектори постійно модифікуються за допомогою операцій мутації, схрещування та селекції з метою зменшення значення цільової функції (похибки наближення сплайном). Алгоритм завершується, якщо вичерпано задане максимальне число популяцій або відбувається стагнація еволюційного процесу. Алгоритм диференціальної еволюції простий у програмній реалізації й використанні (містить мало параметрів, що потребують підбору), легко розпаралелюється. Розроблені рекомендації щодо вибору оптимальних значень основних параметрів алгоритму: розміру популяції, коефіцієнта мутації, ймовірності схрещування. Для низки тестових функцій виконано порівняння похибок наближення, отриманих за стохастичним алгоритмом диференціальної еволюції та за іншими (детерміністичними) алгоритмами. Результати порівняння показали, що точність наближення функцій сплайнами з використанням алгоритму диференціальної еволюції не гірше, ніж при застосуванні значно складніших детерміністичних алгоритмів рівномірного наближення. Це свідчить про ефективність алгоритму диференціальної еволюції. Він може використовуватись як альтернатива відомим детерміністичним алгоритмам наближення сплайнами.

Ключові слова: *сплайн, фіксовані вузли, найкраще рівномірне наближення, диференціальна еволюція, стохастичний метод.*

Вступ. Останнім часом для наближення функціональних залежностей складної структури, які виникають при розв'язанні різноманітних прикладних задач, широко використовуються поліноміальні сплайни. Найбільш популярними є інтерполяційні сплайни степеня не вище трьох, параметри яких легко обчислюються. На практиці також застосовують сплайни найкращого наближення. При тому ж числі параметрів сплайн найкращого наближення апроксимує функцію не гірше, ніж інтерполяційний. Крім того, для побудови інтерполяційного сплайна звичайно потрібно задавати ще деякі граничні умови [1, с. 24]. Тому в багатьох випадках доцільнішим є використання сплайнів найкращого наближення, зокрема, у рівномірній (чебишовській) нормі [2, 3].

Алгоритми найкращого рівномірного наближення функцій поліноміальними сплайнами з фіксованими вузлами поділяються на дві основні групи. До першої належать алгоритми [4–6], в яких використовується зведення задачі найкращого наближення до задачі лінійного програмування (ЛП). Алгоритми другої групи є узагальненням на випадок сплайнів методу послідовних чебишовських інтерполяцій Ремеза [7, 8]. Складність і громіздкість вказаних алгоритмів, а також їхня недостатня реалізація у загальнодоступних математичних пакетах [9, 10] перешкоджають більш широкому застосуванню сплайнів найкращого рівномірного наближення на практиці.

Мета роботи — розробка нескладного в реалізації й водночас ефективного алгоритму для найкращого рівномірного наближення функцій поліноміальними сплайнами з фіксованими вуздами.

Постановка задачі. Нехай на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ задані дві сітки:

$$\Delta_m : \alpha = x_1 < x_2 < \ldots < x_m = \beta \ ,$$

$$\Delta_k : \alpha < \tilde{x}_1 < \ldots < \tilde{x}_k < \beta$$

і множина $S_{n,k}$ сплайнів $s(x)$ степеня n ($n \ge 1$) дефекту 1 з вузлами Δ_k . Надалі будемо вважати, що $m > n + k$ і на кожному з проміжків $[\tilde{x}_{i-1}, \tilde{x}_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, k+1$, $\tilde{x}_0 = \alpha$, $\tilde{x}_{k+1} = \beta$) є щонайменше дві точки сітки Δ_m . Будь-який сплайн $s(x) \in S_{n,k}$ можна записати у вигляді [1]

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i (x-\alpha)^{i-1} + \sum_{i=1}^{k} a_{n+1+i} (x - \tilde{x}_i)_+^n \ , \tag{1}$$

де a_i — дійсні числа і

$$(x-\tilde{x}_i)_+^n = \begin{cases} (x-\tilde{x}_i)^n, \ x > \tilde{x}_i \\ 0, \ x \le \tilde{x}_i \end{cases} .$$

Задача найкращого рівномірного наближення функції $f(x)$ на сітці Δ_m сплайном вигляду (1) з фіксованими вузлами Δ_k полягає у знаходженні сплайна $s^*(x) \in S_{n,k}$, що задовольняє умову

$$\max_{1\le i\le m} \left| f(x_i) - s^*(x_i) \right| \equiv \rho = \min_{s(x)\in S_{n,k}} \max_{1\le i\le m} \left| f(x_i) - s(x_i) \right| . \tag{2}$$

Величина ρ називається похибкою найкращого наближення.

Для розв'язання задачі (2) пропонується застосувати підхід, що ґрунтується на використанні еволюційних алгоритмів (ЕА) — потужного класу стохастичних пошукових методів оптимізації. Для знаходження оптимуму функції ЕА використовують випадково породжену популяцію розв'язків, яка покращується шляхом еволюційного процесу з використанням операцій схрещування, мутації та селекції, поки не виконається умова завершення еволюції (наприклад, досягнуто задане граничне число популяцій). ЕА включають генетичний алгоритм, диференціальну еволюцію, алгоритм рою часток, алгоритм оптимізації мурашиної колонії та ін.

Алгоритм знаходження сплайна найкращого рівномірного наближення. Для розв'язання задачі (2) пропонується адаптувати диференціальну еволюцію (ДЕ) [11]. Алгоритм ДЕ успішно використовувався авторами для розв'язання низки задач наближення [12–15]. Це один з кращих ЕА, який стабільно знаходить глобальний оптимум функції за мінімальний час. Крім того, він простий у реалізації та використанні (містить мало варійованих параметрів), легко розпаралелюється.

На кожній ітерації еволюційного процесу операції мутації, схрещування та селекції в алгоритмі ДЕ застосовуються до популяції

$P_G = \{B_{1,G}, \dots, B_{NP,G}\}$, що складається з D-мірних векторів $B_{i,G} = (b_{i,1,G}, \dots, b_{i,D,G})$, $i = 1, \dots NP$, де NP — розмір популяції, G — номер популяції, $G = 0,1,\dots,G_{\max}$. У випадку задачі (2) $D = n + k + 1$, а координати $b_{i,1,G}, \dots, b_{i,n+k+1,G}$ векторів $B_{i,G}$ представляють собою можливі значення коефіцієнтів $a_1, \dots, a_{n+k+1}$ сплайна $s^*(x)$.

Далі наведено покроковий опис алгоритму.

1. Покладається лічильник числа популяції $G = 0$, і створюється початкова популяція $P_G = \{B_{1,G}, \dots, B_{NP,G}\}$, в якій координати векторів $B_{i,G} = (b_{i,1,G}, \dots, b_{i,n+k+1,G})$, $i = 1, \dots NP$, генеруються за допомогою датчика випадкових чисел із заданого діапазону ID.

Далі на кроках 2–4 формується нова популяція.

2. Мутація. Для кожного вектора $B_{i,G}$ із старої популяції (цей вектор називається базовим) за допомогою трьох інших випадкових векторів $B_{r_1,G}$, $B_{r_2,G}$, $B_{r_3,G}$ $(r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq i)$ створюється мутантний вектор $V_{i,G}$ за формулою

$$V_{i,G} = B_{r_1,G} + FM \cdot (B_{r_2,G} - B_{r_3,G}),$$

де коефіцієнт FM — задана додатна дійсна стала з проміжку $(0, 2]$.

3. Над векторами $B_{i,G}$ і $V_{i,G}$ виконується операція схрещування, результатом якої є вектор $U_{i,G}$ з координатами

$$u_{i,j,G} = \begin{cases} v_{i,j,G}, \text{ якщо } \operatorname{rand}(0,1) \le CR \text{ або } j = j_{rand}, \\ b_{i,j,G} \text{ в іншому випадку,} \end{cases} \qquad j = 1, \dots, n + k + 1,$$

де $rand(0,1)$ — випадкове дійсне число з інтервалу $(0,1)$, CR — задана ймовірність схрещування, j_{rand} — випадкове ціле число в діапазоні $[1, n + k + 1]$.

4. Селекція. До нової популяції з номером $G + 1$ переходить той з векторів $B_{i,G}$ і $U_{i,G}$, значення цільової функції F якого менше

$$B_{i,G+1} = \begin{cases} U_{i,G}, \text{ якщо } F(U_{i,G}) \le F(B_{i,G}), \\ B_{i,G} \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Цільова функція F (критерій оптимізації) обчислюється за формулою:

$$\mathrm{F}(B_{i,G}) = \max_{1 \le l \le m} \left| \sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j,G} (x_l - \alpha)^{j-1} + \sum_{j=1}^{k} b_{i,n+1+j,G} (x_l - \tilde{x}_j)_+^n \right|.$$

5. Якщо вичерпано задане максимальне число популяцій $G_{\max}$ або відносний розкид значень цільової функції найгіршого і найкращого векторів популяції менше деякого заданого δ (умова стагнації), то еволюційний процес завершується, інакше — перехід до п. 2.

Через стохастичний характер алгоритму ДЕ для отримання прийнятного результату потрібно зробити декілька його пусків. Розмір популяції *NP*, коефіцієнт мутації *FM* та ймовірність схрещування *CR* є основними параметрами налаштування алгоритму. За результатами проведеного дослідження рекомендовано такі значення параметрів: $5(n+k+1) \le NP \le 10(n+k+1)$, $0.4 \le FM \le 0.6$, $0.8 \le CR \le 1$.

Результати обчислювальних експериментів. За допомогою описаного вище алгоритму ДЕ виконано серію обчислювальних експериментів з наближення низки тестових функцій. У табл. 1 і 2 наведено результати наближення відповідно функції $f_1(x) = (1+x)^{-1}$ на відрізку $[0,1]$ сплайнами з рівновіддаленими вузлами та функції $f_2(x) = \sqrt{x}$ на відрізку $[0,2]$ сплайном 3-го степеня. Перше число в комірках табл. 1 — похибка наближення ρ за алгоритмом типу Ремеза [8], друге — за алгоритмом ЛП [6], третє — за алгоритмом ДЕ. Зазначимо, що експерименти виконувались при таких налаштуваннях алгоритму ДЕ: $NP = 10(n+k+1)$, $FM = 0.5$, $CR = 1$, $G_{\max} = 250$, $\delta = 10^{-4}$, $m = 1001$, число пусків — 10, $ID = [-1,1]$ для функції $f_1(x)$ та $ID = [-100,100]$ для функції $f_2(x)$.

Таблиця 1

Апроксимація сплайнами функції $f_1(x) = (1+x)^{-1}$ *на* $[0,1]$

Степінь сплайна *n*	**Число вузлів сплайна *k***			
	1	2	3	4
3	$3.85\cdot10^{-4}$ $3.249\cdot10^{-4}$ $3.249\cdot10^{-4}$	$8.9\cdot10^{-5}$ $8.635\cdot10^{-5}$ $8.635\cdot10^{-5}$	$3.3\cdot10^{-5}$ $3.328\cdot10^{-5}$ $3.328\cdot10^{-5}$	$1.5\cdot10^{-5}$ $1.505\cdot10^{-5}$ $1.505\cdot10^{-5}$
4	$5.1\cdot10^{-5}$ $5.115\cdot10^{-5}$ $5.115\cdot10^{-5}$	$10.0\cdot10^{-6}$ $9.898\cdot10^{-6}$ $9.898\cdot10^{-6}$	$3.6\cdot10^{-6}$ $3.611\cdot10^{-6}$ $3.616\cdot10^{-6}$	$1.7\cdot10^{-6}$ $1.696\cdot10^{-6}$ $1.698\cdot10^{-6}$
5	$8.2\cdot10^{-6}$ $8.281\cdot10^{-6}$ $8.282\cdot10^{-6}$	$1.3\cdot10^{-6}$ $1.462\cdot10^{-6}$ $1.464\cdot10^{-6}$	$6\cdot10^{-7}$ $6.108\cdot10^{-7}$ $6.194\cdot10^{-7}$	$3\cdot10^{-7}$ $2.509\cdot10^{-7}$ $2.564\cdot10^{-7}$

Таблиця 2

Апроксимація функції $f_2(x) = \sqrt{x}$ *на* $[0, 2]$ *кубічним сплайном*

Вузли сплайна	**Число коефіцієнтів**	**Похибка наближення за алгоритмом**		
		типу Ремеза	**ЛП**	**ДЕ**
0.04	5	0.02524	0.025216	0.025238
0.0065, 0.108	6	0.01380	0.013789	0.013790
0.002, 0.02, 0.15	7	0.01034	0.010337	0.010338
0.0015, 0.02, 0.1, 0.3	8	0.00448	0.004471	0.004474
0.001, 0.015, 0.06, 0.2, 0.35	9	0.00338	0.003372	0.003387

Як свідчать наведені в табл. 1 і 2 результати, точність наближення функцій сплайнами з використанням стохастичного алгоритму ДЕ не гірше, ніж при застосуванні значно складніших детерміністичних алгоритмів найкращого рівномірного наближення.

Висновки. Представлено алгоритм ДЕ, адаптований для знаходження поліноміального сплайна найкращого рівномірного наближення для функцій, заданих на сітці. Алгоритм простий у програмній реалізації й використанні (містить мало параметрів, що потребують налаштування) і водночас достатньо ефективний. Результати обчислювальних експериментів показали, що точність наближення функцій сплайнами з використанням алгоритму ДЕ не гірше, ніж при застосуванні значно складніших алгоритмів рівномірного наближення. У подальшому планується дослідити ефективність використання ДЕ для найкращого наближення сплайнами з вільними вузлами, де потрібно визначати як коефіцієнти сплайна, так і його вузли.

Список використаних джерел:

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М. : Наука, 1976. 248 с.
2. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. Киев : Наук. думка, 1989. 272 с.
3. Малачівський П. С., Скопецький В. В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ : Наук. думка, 2013. 270 с.
4. Barrodale J., Young A. A note on numerical procedures for approximation by spline functions. *Comput. J.* 1966. Vol. 9. P. 318–320.
5. Esch R. E., Eastman W. L. Computational methods for the best spline function approximation. *J. Approx. Theory*. 1969. Vol. 2. P. 85–96.
6. Вакал Л. П. Побудова найкращих чебишовських наближень сплайнами. Штучний інтелект. 2017. № 2 (76). С. 94–100.
7. Schumaker L. L. Some algorithms for the computation of interpolating and approximating spline functions. *Theory and applications of spline functions.* New York : Academic Press, 1969. P. 87–102.

8. Nürnberger G., Sommer M. A Remez type algorithm for spline functions. *Numer. Math.* 1983. Vol. 41, № 1. P. 117–146.
9. Каленчук-Порханова А. А., Вакал Л. П. Пакет программ аппроксимации функций. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2008. № 7. С. 32–38.
10. Каленчук-Порханова А. А., Вакал Л. П. Аппарат аппроксимации в составе программного обеспечения суперкомпьютера с кластерной архитектурой. *Искусственный интеллект*. 2009. № 1. С. 158–165.
11. Storn R., Price K. Differential evolution — a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
12. Vakal L. P. Seeking optimal knots for segment approximation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, № 11. P. 68–75.
13. Вакал Л. П. Апроксимація функцій багатьох змінних із застосуванням алгоритму диференціальної еволюції. *Математичні машини і системи*. 2017. № 1. С. 90–96.
14. Vakal L. P., Kalenchuk-Porkhanova A. A., Vakal E. S. Increasing the efficiency of Chebyshev segment fractional rational approximation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, № 5. P. 759–765.
15. Вакал Л. П., Вакал Є. С. Розв'язання перевизначеної системи трансцендентних рівнянь з використанням диференціальної еволюції. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки : зб. наук. пр.* Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2017. Вип. 15. С. 24–30.

BEST UNIFORM SPLINE APPROXIMATION USING DIFFERENTIAL EVOLUTION

It is considered a problem of the best uniform approximation of functions by polynomial splines with fixed knots. It is proposed an approach based on evolutionary algorithms — a powerful class of stochastic search optimization methods — for its solution. To find a spline of the best uniform approximation, a differential evolution algorithm is adapted. It is one of the best evolutionary algorithms that consistently finds a global optimum of a target function (optimization criterion) in a minimal time. An evolutionary process in the algorithm begins with a generation of random vectors, coordinates of which are possible values of spline coefficients. Further, the vectors are constantly modified by mutation, crossover and selection operations in order to reduce a value of the target function (spline approximation error). The algorithm is completed if a specified maximum number of populations is exhausted or a stagnation of the evolutionary process takes place. The differential evolution algorithm is simple in program realization and using (it contains few varied parameters that need to be selected). It is easily paralleled. Recommendations for choosing optimal values of main parameters of the algorithm such as a population size, a mutation factor, a crossover probability are developed. A comparison of the approximation errors obtained by the stochastic differential evolution algorithm and by other (deterministic) algorithms is made for a series of test functions. Results of the comparison showed that an accuracy of the functions approximation by splines using the

differential evolution is not worse than using much more complicated deterministic algorithms of the best uniform approximation. This testifies about the effectiveness of the differential evolution algorithm. It can be used as an alternative for known deterministic algorithms of spline approximation.

Key words: *spline, fixed knots, best uniform approximation, differential evolution, stochastic method.*

Одержано 27.01.2019

УДК 004.94
DOI: 10.32626/2308-5916.2019-19.24-30

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук, професор,
В. А. Федорчук,** д-р техн. наук, професор,
В. А. Іванюк,** канд. техн. наук, доцент

*Інститут проблем моделювання в енергетиці
імені Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ,
**Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНІ МОДЕЛІ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ТЕПЛОВИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

Розглядається підхід до побудови інтегральних моделей нестаціонарних задач теплопровідності на основі застосування методу теплових потенціалів. Можливість побудови інтегральних моделей розглядається на конкретних прикладах із використанням різних теплових потенціалів: одновимірна задача теплопровідності із різною постановкою крайової задачі (умови першого та другого роду), двовимірна задача теплообміну, задача теплообміну із рухомою границею. Пропонується застосування комбінації точних та чисельних методів, що дає змогу враховувати переваги різних підходів. Застосування методу теплових потенціалів до моделей у формі диференціальних рівнянь із частинними похідними дозволило отримати загальний розв'язок у вигляді оператора Вольтерри, який залежить від функцій, що визначаються із крайових умов, тобто поставлена задача зводиться до розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри II роду або їх систем. Особливістю отриманих моделей є те, що ядра інтегральних моделей є сингулярними у кінцевій точці інтегрування. Розв'язування таких рівнянь пропонується здійснювати за допомогою обчислювальних методів, основаних на методі квадратур. Для уникнення особливостей в ядрі застосовується метод зсуву. Врахувавши властивості ядр, пропонується застосовувати метод лівих прямокутників, що дозволить уникнути сингуляр-

