НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗНИЗУ КВАЗІНЕПЕРЕРВНИХ ЗВЕРХУ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

©2006 р. *Володимир МАСЛЮЧЕНКО, Олена ФОТІЙ*

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58012

Редакція отримала статтю 15 червня 2006 р.

Доведено, що у квазінеперервного зверху відображення F топологічного простору X у сепарабельний метризовний простір Y множина тих точок, у яких F неперервне знизу, залишкова в X.

1. П.Кендеров [1] встановив, що для кожного неперервного зверху відображення $F : X \to Y$ топологічного простору X у метризовний сепарабельний простір Y множина $C^-(F)$ тих точок x з X, у яких F неперервна знизу, залишкова в X. У літературі відомо багато послаблень поняття неперервності зверху, найважливішим з яких є квазінеперервність зверху [4]. Виникає природне питання: чи можна в результаті Кендерова неперервність зверху замінити на квазінеперервність зверху? Для компактнозначних відображень зі значеннями в довільному метризовному просторі ствердна відповідь на це питання була отримана в працях [2, 3], методом, який відрізняється від того, що його застосував П.Кендеров. У даній роботі ми, розвиваючи первісний метод П.Кендерова, доводимо, що в його теоремі неперервність зверху може бути замінена на квазінеперервність зверху.

2. Нагадаємо означення основних понять.

Многозначне відображення $F : X \to Y$ ставить у відповідність кожній точці $x \in X$ деяку непорожню підмножину $F(x)$ в Y. Звичайно для множини $B \subseteq Y$ розглядають два прообрази

$$F^+(B) = \{x \in X : F(x) \subseteq B\}, \quad F^-(B) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

УДК 517.511, MSC 2000: 26B05

Нехай X і Y — топологічні простори і $x_0 \in X$. Многозначне відображення $F : X \to Y$ називається *неперервним зверху (знизу) в точці* x_0, якщо для кожної відкритої в Y множини V з умови $x_0 \in F^+(V)$ ($x_0 \in F^-(V)$) випливає, що $x_0 \in \mathrm{int}F^+(V)$ ($x_0 \in \mathrm{int}F^-(V)$). Кажуть, що F *квазінеперервне зверху (знизу) в точці* x_0, якщо для кожної відкритої множини V у просторі Y з умови $x_0 \in F^+(V)$ ($x_0 \in F^-(V)$) випливає, що $x_0 \in \overline{\mathrm{int}F^+(V)}$ ($x_0 \in \overline{\mathrm{int}F^-(V)}$). Відображення F називають *неперервним зверху (знизу)* чи *квазінеперервним зверху (знизу)*, якщо воно є таким у кожній точці простору X.

Як і в праці [1], у цій статті важливу роль відіграє введене П.Кендеровим поняття майже неперервності знизу, яке ми подамо тут у формі, яка відрізняється від [1] і є подібною до вищенаведених означень. Відображення F називають *майже неперервним зверху (знизу) в точці* x_0, якщо для кожної відкритої множини V у просторі Y з умови $x_0 \in F^+(V)$ ($x_0 \in F^-(V)$) випливає, що $x_0 \in \mathrm{int}\overline{F^+(V)}$ ($x_0 \in \mathrm{int}\overline{F^-(V)}$). Символом $M(F)$ позначатимемо множину всіх тих точок, у яких F є майже неперервним знизу.

3. Нехай $F : X \to Y$ — многозначне відображення топологічного простору X у топологічний простір Y і $B \subseteq Y$. Покладемо

$$H(B) = F^-(B) \setminus \mathrm{int}\overline{F^-(B)} \ \text{ і } \ E = \overline{F^-(B)}.$$

Оскільки множина E замкнена і $H(B) \subseteq E \setminus \mathrm{int}E = \mathrm{fr}E$, то $H(B)$ — ніде не щільна множина в X, адже такою є межа довільної замкненої множини. Крім того, з означення легко виводимо, що

$$X \setminus M(F) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} H(B),$$

де $\mathcal{B}$ — довільна база топології простору Y. Звідси негайно випливає таке твердження.

Теорема 1 [1]. *Нехай X — топологічний простір, Y — топологічний простір з другою аксіомою зліченності і $F : X \to Y$ — довільне многозначне відображення. Тоді $M(F)$ — залишкова в X.*

4. Наступне твердження у праці [1] було доведене для неперервних зверху відображень.

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, Y — регулярний простір і $F : X \to Y$ — квазінеперервне зверху відображення. Тоді $C^-(F) = M(F)$.*

Доведення. Оскільки включення $C^-(F) \subseteq M(F)$ є очевидним, то досить довести протилежне включення.

Нехай $x_0 \in M(F)$ і V — така відкрита множина в Y, що $x_0 \in F^-(V)$. Оскільки $V \cap F(x_0) \neq \emptyset$, то існує елемент $y_0 \in V \cap F(x_0)$. З регулярності простору Y випливає, що існує відкрита в Y множина V_0, така, що $y_0 \in V_0 \subseteq \overline{V_0} \subseteq V$. Покладемо $U = \mathrm{int}\overline{F^-(V_0)}$. Зрозуміло, що множина U є відкритою в X і $x_0 \in U$. Нехай $E_0 = F^-(V_0)$ і $E = U \cap E_0$. Оскільки $U \subseteq \overline{E_0}$ і множина U є відкритою, то $E \subseteq U \subseteq \overline{E}$. За побудовою $E \subseteq F^-(V_0)$, отже, $V_0 \cap F(x) \neq \emptyset$ для кожного $x \in E$. Доведемо, що $V \cap F(x) \neq \emptyset$ для кожного $x \in U$. Міркуємо від супротивного. Нехай існує така точка $x_1 \in U$, що $V \cap F(x_1) = \emptyset$. Розглянемо відкриту в Y множину $W = Y \setminus \overline{V_0}$. Ясно, що $F(x_1) \subseteq W$, тобто $x_1 \in F^+(W)$. Оскільки F — квазінеперервне зверху в точці x_1, то $x_1 \in \overline{\mathrm{int}F^+(W)}$. Множина U є відкритим околом точки x_1, отже, відкрита множина $G = U \cap \mathrm{int}F^+(W)$ — непорожня. Але $G \subseteq U \subseteq \overline{E}$. Отже, $\overline{G \cap E} \supseteq G \neq \emptyset$. Звідси випливає, що й $G \cap E \neq \emptyset$, тобто існує точка $x_2 \in G \cap E$. Тоді $V_0 \cap F(x_2) \neq \emptyset$, бо $x_2 \in E$, і разом з тим $F(x_2) \cap \overline{V_0} = \emptyset$, бо $x_2 \in G \subseteq F^+(W)$. Отримана суперечність показує, що $U \subseteq F^-(V)$, а тому $x_0 \in \mathrm{int}F^-(V)$, отже, $x_0 \in C^-(F)$.

5. Основний результат роботи легко випливає з теорем 1 і 2.

Теорема 3. *Нехай X — топологічний простір, Y — метризовний сепарабельний простір, $F : X \to Y$ — квазінеперервне зверху відображення. Тоді множина $C^-(F)$ залишкова в X.*

Доведення. Кожний метризовний простір є регулярним. Тому, згідно з теоремою 2, $C^-(F) = M(F)$. Крім того, метризовний сепарабельний простір справджує другу аксіому зліченності, тому за теоремою 1 множина $M(F)$ — залишкова в X. Отже, й множина $C^-(F)$ є залишковою в X.

[1] *Кендеров П.С.* Многозначные отображения и их свойства, подобные непрерывности // Успехи мат. наук. - 1980. - **35**, № 3. - С. 194–196.

[2] *Ewert J.* On points of lower and upper quasi-continuity of multivalued maps // Math. Slovaca. - 1987. - **37**. - P. 255–261.

[3] *Matejdes M.* Quelques remarques sur la quasi-continuité des multifonctions // Math. Slovaca. - 1987. - **37**. - P. 267-271.

[4] *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch. - 1988–1989. - **14**, № 3. - P. 259-306.

LOWER CONTINUITY OF UPPER QUASI-CONTINUOUS MULTI-VALUED MAPPINGS

Volodymyr MASLYUCHENKO, Olena FOTIY

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsyubyns'koho Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

It is proved that the lower continuity points set of an upper quasi-continuous map F of a topological space X to a separable metrizable space Y is residual in X.