# ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД НЕСКІНЧЕННОЇ КІЛЬКОСТІ ЗМІННИХ

 *Андрій ЗАГОРОДНЮК, Зоряна МОЖИРОВСЬКА*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79601

Редакція отримала статтю 5 вересня 2006 р.

У роботі побудовано гільбертові простори аналітичних функцій на деякому гільбертовому просторі і розглянуто оператор зсуву на цих просторах. Зокрема, доведено, що при деяких умовах оператор зсуву буде гіперциклічним.

## ВСТУП

Теорія аналітичних функцій на банахових просторах є новим розділом нелінійного функціонального аналізу, який в останні роки активно розвивається у різних напрямках. Основні результати цієї теорії зафіксовано в монографіях [4, 5, 7, 10].

У даній роботі ми розглядаємо гільбертові простори аналітичних функцій на деякому банаховому просторі та оператори в цих просторах. Наша робота розвиває ідеї, викладені в статтях [8, 9, 12]. У першому розділі роботи розглядаємо простори аналітичних функцій на деякому гільбертовому просторі $E$, асоційовані з деяким абстрактним простором Фока. У другому розділі досліджуємо простори цілих аналітичних функцій та оператори на них. Тут, зокрема, встановлено гіперциклічність операторів зсуву. Детальний огляд з теорії гіперциклічних операторів можна знайти в [6].

Вивчення гіперциклічних операторів розпочалося після відомого результату Біркгофа, який стверджує, що оператор композиції зі зсувом

УДК 517.524; MSC 2000: 32A15, 46A32, 46C05, 47B33

$x \mapsto x+a$, $a \neq 0$, $T_a : f(x) \mapsto f(x+a)$, є гіперциклічним у просторі цілих функцій $H(\mathbb{C})$ на комплексній площині $\mathbb{C}$. У роботі [1] доведено, що оператор композиції зі зсувом $T_a$ є гіперциклічним у просторі слабко неперервних аналітичних функцій на всіх обмежених підмножинах сепарабельного банахового простору $X$, який є обмеженим на обмежених підмножинах. У [2] встановлено, що $T_a$ є гіперциклічним в різних гільбертових просторах цілих функцій на $\mathbb{C}$. Більш детальніше, у [2] розглянуто гільбертові простори цілих функцій від однієї комплексної змінної $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ з нормами $\|f\|_{2,\gamma}^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2}|f_n|^2$ для відповідної послідовності додатних чисел $(\gamma_n)$ і показано, що оператор $T_a$ є гіперциклічним, якщо послідовність $(n\gamma_n/\gamma_{n-1})$ є монотонно спадною.

Нехай $X$ і $Y$ — банахові простори над полем $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Функція $P : X \to Y$ називається *$n$-однорідним поліномом*, якщо існує симетрична $n$-лінійна форма $A : X^n \to Y$ така, що $P(x) = A(x, \ldots, x)$ для всіх $x \in X$. *Поліном степеня* $n$ на $X$ є скінченною сумою $k$-однорідних поліномів, $k = 0, 1, \ldots, n$, де поліном степеня 0 є константою з $\mathbb{K}$.

Нехай $X, Y$ — банахові простори, $\Omega$ — відкрита підмножина в $X$. Відображення $F : \Omega \to Y$ називається *аналітичним*, якщо для кожного $x_0 \in \Omega$ існує такий окіл $V_{x_0}$ $(V_{x_0} \subset \Omega)$ точки $x_0$, що для кожного $x \in V_{x_0}$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x),$$

де $F_k$ — $k$-однорідні поліноми і ряд збігається рівномірно на $V_{x_0}$.

Оператор $T : X \to X$, де $X$ — лінійний простір Фреше, називається *гіперциклічним*, якщо існує вектор $x \in X$, для якого *орбіта* $\operatorname{orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ — щільна множина в $X$. Кожен такий вектор $x$ називається *гіперциклічним* для оператора $T$.

## 1. АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ І АБСТРАКТНИЙ ПРОСТІР ФОКА

Нехай $E$ — гільбертів простір з ортонормованою базою $e_1, \ldots, e_n$. Позначимо через $E^{\otimes_s n}$ симетричний алгебричний тензорний степінь простору $E$. Кожен елемент з $E^{\otimes_s n}$ зображається у вигляді скінченної суми елементів вигляду

$$x_1 \cdots x_n = x_1 \otimes_s \cdots \otimes_s x_n := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)},$$

де $x_1, \ldots, x_n \in E$, а $S_n$ — група перестановок на множині $\{1, \ldots, n\}$. Якщо $(e_n)$ — ортонормована база в $E$, то вектори $e_{i_1}^{k_1} \ldots e_{i_n}^{k_n}$, $k_j \geq 0$, $k_1 + \cdots + k_n = n$, $i_1 < \cdots < i_n$, породжують лінійну базу в $E^{\otimes_s n}$. Скажемо, що гільбертів простір $\mathcal{F} = \mathcal{F}(E)$ з нормою $\|\cdot\|_\eta$ є *(абстрактним) симетричним простором Фока над простором* $E$, якщо вектори $1, e_{[i]}^{(k)} = e_{i_1}^{k_1} \ldots e_{i_n}^{k_n}$ утворюють ортогональну базу в $\mathcal{F}$, де $n = |(k)| = 1, \ldots, \infty$, $k_j \geq 0$, $i_1 < \cdots < i_n$.

Очевидно, що норма $\|\cdot\|_\eta$ цілком визначається своїми значеннями на базових векторах. Отже, за набором $\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_\eta$ довільних додатних чисел можна отримати різні симетричні простори Фока над $E$. Іншими словами, $\mathcal{F}(E)$ є поповненням простору $\mathbb{C} \oplus E^{\otimes_s 2} \oplus \cdots \oplus E^{\otimes_s n} \oplus \cdots$ відносно норми $\|\cdot\|_\eta$, де $E^{\otimes_s k}$—$k$-ий симетричний алгебричний тензорний добуток. Будемо використовувати позначення $\mathcal{F}_\eta = \mathcal{F}_\eta(E)$ для $(\mathcal{F}, \|\cdot\|_\eta)$ і $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ — для скалярного добутку в $\mathcal{F}_\eta$.

Покладемо $c_{[i]}^{(k)} := \left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_\eta^{-2}$ і $c_0 = 1$. Для будь-якого $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in E$ розглянемо степеневий ряд

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \sum_{k_1+\cdots+k_n=0}^{\infty} \sum_{i_1<\cdots<i_n} c_{i_1\ldots i_n}^{k_1\ldots k_n} x_{i_1}^{k_1} \ldots x_{i_n}^{k_n} e_{i_1}^{k_1} \ldots e_{i_n}^{k_n} = \\ &= \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \sum_{[i]} c_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ми вважаємо, що $e_0 = 1$ і $x_0 = 1$ для всіх $x \in E$.

**Теорема 1.** *Припустимо, що існує константа $S > 0$ і послідовність додатних чисел $(M_n)$ така, що $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = M \leq \infty$ і для кожного $n$*

$$0 < c_{[i]}^{(k)} = c_{i_1\ldots i_n}^{k_1\ldots k_n} \leq S M_n^2 \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \ldots k_n!} = S M_n^2 \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!}, \tag{2}$$

*де $n = k_1 + \cdots + k_n$. Тоді існує відкрита така підмножина $U \subset E$, $U \ni 0$, така, що*

i) *Ряд (1) збігається для кожного $x \in U$ і $\eta$ є аналітичним відображенням з $U$ в $\mathcal{F}_\eta$.*

ii) *Для кожного $\phi \in \mathcal{F}_\eta$ відображення $f_\phi(x) = \langle \eta(x) \mid \phi \rangle$ є аналітичною функцією на $U$.*

iii) ***Функція*** $\left\langle \eta(x) \middle| e^{(k)}_{[i]} \right\rangle$ ***є n-однорідним поліномом і***

$$\left\langle \eta(x) \middle| e^{(k)}_{[i]} \right\rangle = x^{k_1}_{i_1} \dots x^{k_n}_{i_n}.$$

***Доведення.*** Очевидно, що $\eta(0) = 1$. Для довільного фіксованого $n$ покладемо

$$\eta_n(x) = \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} c^{(k)}_{[i]} x^{(k)}_{[i]} e^{(k)}_{[i]}.$$

Зрозуміло, що $\eta_n(x)$ є $n$-однорідним поліномом з $E$ в $\mathcal{F}_\eta$. Для кожного $x$, $\|x\| \leq 1$, маємо

$$\|\eta_n(x)\|^2 = \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left\langle c^{(k)}_{[i]} x^{(k)}_{[i]} e^{(k)}_{[i]} \middle| c^{(k)}_{[i]} x^{(k)}_{[i]} e^{(k)}_{[i]} \right\rangle =$$

$$= \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \left( c^{(k)}_{[i]} \right)^2 \left| x^{(k)}_{[i]} \right|^2 \left\| e^{(k)}_{[i]} \right\|^2 = \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} c^{(k)}_{[i]} \left| x^{(k)}_{[i]} \right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{|(k)|=n} \sum_{[i]} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} SM_n^2 \left| x^{(k)}_{[i]} \right|^2 = SM_n^2 \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 \right)^n = SM_n^2 \|x\|^n.$$

Тому $\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|\eta_n(x)\| \leq \sqrt{S} M_n$. Отже, для радіуса рівномірної збіжності $\eta$ в нулі виконується співвідношення

$$\varrho_0(\eta) = \left( \limsup_{n \to \infty} \|\eta_n\|^{1/n} \right)^{-1} \geq \left( \limsup_{n \to \infty} (\sqrt{S} M_n)^{1/n} \right)^{-1} = \frac{1}{M}.$$

Тому $\eta$ є аналітичним відображенням у відкритому околі нуля радіуса $1/M$. Позначимо через $U$ область аналітичності $\eta$ в $E$.

Нехай $\phi \in \mathcal{F}_\eta$. Тоді відображення $f_\phi$ є композицією аналітичних відображень $\eta(x)$ і $\phi$. Тому $f_\phi$ є аналітичним (див. [7]). Легко бачити, що

$$\left\langle \eta(x) \middle| e^{(k)}_{[i]} \right\rangle = \left\langle \sum_{|k|=0}^{\infty} \sum_{[j]} c^{(k)}_{[i]} x^{(k)}_{[j]} e^{(k)}_{[j]} \middle| e^{(k)}_{[i]} \right\rangle =$$

$$= c^{(k)}_{[i]} x^{(k)}_{[i]} \left\| e^{(k)}_{[i]} \right\|^2_\eta = x^{(k)}_{[i]} = x^{k_1}_{i_1} \dots x^{k_n}_{i_n}.$$

Позначимо через $\mathcal{H}_\eta$ гільбертів простір аналітичних функцій $f_\phi = \langle \eta(\cdot) \mid \phi \rangle$, тобто ермітово спряжений до простору $\mathcal{F}_\eta$. Будемо використовувати символ $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ для позначення скалярного добутку в $\mathcal{H}_\eta$.

Для довільного вектора $f \in \mathcal{H}_\eta$ через $\overline{f}$ позначимо такий елемент з $\mathcal{F}_\eta$, що $f = \langle \cdot \mid \overline{f} \rangle$. Зокрема, $f(x) = \langle \eta(x) \mid \overline{f} \rangle$. Аналогічно, для вектора $g \in \mathcal{F}_\eta$ через $\overline{g}$ позначимо такий вектор з $\mathcal{H}_\eta$, що $g = \langle \cdot \mid \overline{g} \rangle$.

**Приклад 1.** Для довільного додатного цілого $m$ покладемо

$$\eta^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!} \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \right)^k =$$

$$= \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!} \frac{(k_1 + \cdots + k_n)!}{k_1! \ldots k_n!} e_{i_1}^{k_1} \ldots e_{i_n}^{k_n} x_{i_1}^{k_1} \ldots x_{i_n}^{k_n} =$$

$$= \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \frac{(k_1 + \cdots + k_n + m - 1)!}{(m-1)!k_1! \ldots k_n!} e_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)},$$

де $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$, $n = 0, \ldots, \infty$. Тому $c_{[i]}^{(k)} = \dfrac{(k_1 + \cdots + k_n + m - 1)!}{(m-1)!k_1! \ldots k_n!}$. Легко перевірити, що для кожного $m$ відображення $\eta^{(m)}$ є аналітичним відображенням одиничної кулі $B \subset E$ в $\mathcal{F}_{\eta^{(m)}}$. Дійсно, оскільки

$$\frac{1}{(1-t)^m} = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d}{dt} \right)^{(m-1)} \left( \frac{1}{1-t} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!} t^k, \quad |t| < 1,$$

то

$$\|\eta^{(m)}(x)\| = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!} \|x\|^{2k} \right)^{1/2} = \left( \frac{1}{(1 - \|x\|^2)^m} \right)^{1/2}.$$

Тому відображення $\eta^{(m)}$ коректно визначене на $B$ і є локально обмеженим. До того ж, $\eta^{(m)}$ є $G$-аналітичним відображенням на $B$ як абсолютно збіжний степеневий ряд на кулі $B$, яка перетинається з довільним скінченно-вимірним підпростором. Отже, $\eta^{(m)}$ є аналітичним (див. [5]) і $\mathcal{H}_{\eta^{(m)}}$ є гільбертовим простором аналітичних функцій на $B$. Зауважимо, що $\mathcal{H}_{\eta^{(m)}}$ співпадає з класичним простором Харді на одиничній кулі тоді (і тільки тоді), коли $\dim E = m$.

Теорема 1 допускає таке узагальнення. Розглянемо степеневий ряд

$$\xi(x) = \sum_{[i],(k)} b_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}, \quad b_{[i]}^{(k)} \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Нехай $\mathcal{N}$ — множина пар мультиіндексів $([i],(k))$ таких, що $b_{[i]}^{(k)} = 0$; $V_{\mathcal{N}} = \operatorname{span}\left\{e_{[i]}^{(k)} : ([i],(k)) \in \mathcal{N}\right\}$; $\mathcal{F}_0/V_{\mathcal{N}}$ — лінійний простір, напнутий на вектори $e_{[i]}^{(k)}$, $([i],(k)) \notin \mathcal{N}$. Визначимо норму на $\mathcal{F}_0/V_{\mathcal{N}}$ за допомогою рівностей $\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_{\xi}^{2} = \dfrac{1}{|b_{[i]}^{(k)}|}$, вважаючи, що $\left(e_{[i]}^{(k)}\right)$ утворює ортогональну базу в $(\mathcal{F}_0/V_{\mathcal{N}}, \|\cdot\|_{\xi})$. Позначимо через $\mathcal{F}_{\xi}$ поповнення простору $\mathcal{F}_0/V_{\mathcal{N}}$ за нормою $\|\cdot\|_{\xi}$. Зауважимо, що степеневий ряд (3) є аналітичним відображенням тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{[i],(k)} \left|b_{[i]}^{(k)}\right| x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}$ є аналітичним відображенням і

$$\langle \xi(x) \mid e_{[i]}^{(k)} \rangle = \frac{b_{i_1}^{k_1} \dots b_{i_n}^{k_n}}{|b_{i_1}^{k_1}| \dots |b_{i_n}^{k_n}|} x_{i_1}^{k_1} \dots x_{i_n}^{k_n}.$$

## 2. ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

У цьому розділі розглянемо випадок, коли простір $\mathcal{H}_\eta = \mathcal{F}_\eta^*$ складається з цілих функцій на $E$.

**Твердження 1.** *Припустимо, що константа $S > 0$ і послідовність додатних чисел $(M_n)$ є такими, що $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = 0$ і*

$$c_{[i]}^{(k)} \le S M_n^{2n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!},$$

*де $c_{[i]}^{(k)} = \left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|^{-2}$, $e_{[i]}^{(k)}$ — ортогональна база в $\mathcal{F}_\eta$. Тоді $\mathcal{H}_\eta = \mathcal{F}_\eta^*$ є гільбертовим простором цілих функцій обмеженого типу на $E$.*

***Доведення.*** Як і при доведенні теореми 1, легко бачити, що ряд

$$\eta(x) = \sum_{|(k)|=0}^{\infty} \sum_{[i]} c_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)} e_{[i]}^{(k)}$$

є аналітичним відображенням з радіусом рівномірної збіжності

$$\varrho_0(\eta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{M_n} = \infty.$$

Отже, $\eta$ є цілим відображенням обмеженого типу з $E$ в $\mathcal{F}_\eta$. Тому кожна функція $f \in \mathcal{H}_\eta$ є цілою функцією обмеженого типу на $E$ як композиція цілого відображення обмеженого типу та функціоналу.

Наступне твердження дає інший критерій для того, щоб простір $\mathcal{H}_\eta$ був простором цілих функцій.

**Твердження 2.** *Нехай послідовність* $(\|\eta_{n+1}\|/\|\eta_n\|)$ *спадає до нуля при* $n \to \infty$. *Тоді* $\mathcal{H}_\eta$ *складається з цілих функцій обмеженого типу.*

***Доведення.*** За ознакою Даламбера степеневий ряд $\sum \|\eta_n\| t^n$ абсолютно збігається для кожного $t \in \mathbb{C}$. Тоді за формулою Коші-Адамара

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\|\eta_n\|^{1/n}\right)^{-1} = \infty$$

і, отже, $\eta$ є цілим відображенням.

**Приклад 2.** Нехай $\eta(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Позначимо через $H^2(E)$ відповідний простір $\mathcal{H}_\eta$. Легко бачити, що $H^2(E)$ складається з цілих функцій обмеженого типу на $E$ і $\left\|e_{[i]}^{(k)}\right\|_\eta^2 = k_1! \dots k_n!$. Відтворюючим ядром цього простору є функція

$$K(z,x) = \langle \eta(x) \mid \eta(z) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle x^n \mid z^n \rangle}{(n!)^2} =$$

$$= \sum_{k_1+\dots+k_n=n} \frac{1}{n!} \left(\frac{n!}{k_1! \dots k_n!}\right)^2 \|e_{i_1}^{k_1} \dots e_{i_n}^{k_n}\|^2 x_{i_1}^{k_1} \dots x_{i_n}^{k_n} z_{i_1}^{k_1} \dots z_{i_n}^{k_n} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} x_{[i]}^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \mid z)^n}{n!} = e^{(x|z)}$$

і для кожної функції з $H^2(E)$ існує $w \in \mathcal{F}_\eta$ такий, що

$$f_w(x) = \langle \eta(x) \mid w \rangle, \tag{4}$$

для будь-якого вектора $w \in \mathcal{F}_\eta$. Згідно з [11], простір $H^2(E)$ є нескінченним тензорним степенем простору

$$H^2(\mathbb{C}) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \colon \int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} dz < \infty \right\}.$$

Нехай $D$ — відкритий одиничний диск в $\mathbb{C}$, $\Omega$ — будь-яка з двох множин $rD$ і $\mathbb{C}$. Через $\Gamma_r$, $0 < r \leq \infty$, позначимо множину всіх аналітичних функцій на $rD$, якщо $r < \infty$ і на $\mathbb{C}$, якщо $r = \infty$. Очевидно, що $\Gamma_r$

— відкрита опукла підмножина простору Фреше $H(\Omega)$ всіх аналітичних функцій на $\Omega$.

**Твердження 3.** *Для заданих функції* $\gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k \in \Gamma_r$, *де* $\gamma_k > 0$, $k = 0, \ldots, \infty$, *та гільбертового простору* $E$ *функція* $\eta^{(\gamma)}(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k$ *є аналітичним відображенням з кулі* $rB \subset E$ *(*$rB = E$*, якщо* $r = \infty$*) в* $\mathcal{F}_{\eta^{(\gamma)}}$ *і для кожного* $x \in rB$

$$\|\eta^{(\gamma)}(x)\|^2 = \langle \eta^{(\gamma)}(x) \mid \eta^{(\gamma)}(x) \rangle = \gamma(\|x\|^2). \tag{5}$$

***Доведення.*** За формулою Коші-Адамара $\limsup\limits_{n\to\infty}(\gamma_n)^{1/n} \le 1/r$. З іншого боку,

$$\eta^{(\gamma)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k x^k = \sum_{(k)} \gamma_{|(k)|} \frac{|(k)|!}{k_1! \ldots k_n!} e_{[i]}^{(k)} x_{[i]}^{(k)}, \tag{6}$$

де $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$. Застосовуючи теорему 1 для випадку, коли $M_n = \gamma_n$, після обчислень отримаємо

$$\|\eta^{(\gamma)}(x)\|^2 = \langle \eta^{(\gamma)}(x) \mid \eta^{(\gamma)}(x) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 \langle x^n \mid x^n \rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^2 \sum_{[i]=(i_1 \ldots i_n)} \sum_{|(k)|=n} \left( \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} \right)^2 |x_{[i]}^{(k)}|^2 \|e_{[i]}^{(k)}\|^2.$$

Оскільки $\gamma_n \dfrac{n!}{k_1! \ldots k_n!} = \dfrac{1}{\|e_{[i]}^{(k)}\|^2}$, то

$$\|\eta^{(\gamma)}(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{[i]=(i_1 \ldots i_n)} \sum_{|(k)|=n} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} |x_{i_1}^{k_1}|^2 \ldots |x_{i_n}^{k_n}|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \|x\|^{2n} = \gamma(\|x\|^2).$$

Скажемо, що $\eta^{(\gamma)}$ породжується $\gamma$. Зауважимо, що в прикладі 1 відтворююча функція $\eta^{(m)}$ породжується функцією $\gamma(t) = (1-t)^{-m}$, а відтворююча функція $\eta$ в прикладі 2 — функцією $\gamma(t) = e^t$.

**Наслідок 1.** *Нехай* $\gamma(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \gamma_k t^k$, $\gamma_k > 0$, *— така ціла функція комплексної змінної* $t$, *що послідовність* $(\gamma_{n+1}/\gamma_n)$ *спадає до нуля при* $n \to \infty$. *Тоді* $\eta^{(\gamma)}$ *є відтворюючою функцією гільбертового простору* $\mathcal{H}_{\eta^{(\gamma)}}$ *цілих функцій на гільбертовому просторі* $E$.

Для заданого $a \in E$ оператор $T_a : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$ визначимо у такий спосіб:

$$T_a(f)(x) = f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n f(x)a,$$

де $d^n f(x)a$ — похідна Фреше $n$-го порядку функції $f$ в напрямку $a$.

**Теорема 2.** *Нехай* $E$ *— сепарабельний гільбертів простір,* $a \in E$ *— деякий ненульовий вектор і норма* $\|\cdot\|_\eta$ *на відповідному просторі* $\mathcal{F}_\eta$ *визначена таким чином, що оператор диференціювання* $d$ *є неперервним та для будь-якого лінійного функціоналу* $\varphi \in E^*$ $e^\varphi \in \mathcal{H}_\eta$. *Тоді оператор* $T_a : \mathcal{H}_\eta \to \mathcal{H}_\eta$, $f \longrightarrow f(x+a)$, *є гіперциклічним.*

***Доведення*** теореми спирається на критерій гіперциклічності [1], який подамо у такій формі.

**Теорема 3. (Критерій гіперциклічності).** *Нехай* $X$ *— повний лінійний метричний простір,* $T : X \to X$ *— лінійний неперервний оператор. Якщо існують щільні підмножини* $X_0$, $Y_0$ *з* $X$, *послідовність* $(n_k)$ *невід'ємних цілих чисел, і послідовність відображень (необов'язково лінійних, необов'язково неперервних)* $S_{n_k} : Y_0 \to X$ *такі, що*

i) $T^{n_k} \to 0$ *при* $k \to \infty$, *поточково на* $X_0$,

ii) $S_{n_k} \to 0$ *при* $k \to \infty$ *поточково на* $Y_0$,

iii) $T^{n_k} S_{n_k} = I$ *на* $Y_0$ *(*$I$ *— одиничний оператор),*

*то оператор* $T$ *є гіперциклічним.*

Нижче нам знадобляться наступні дві леми.

**Лема 1.** $\mathcal{B} = \{e^\varphi : \varphi \in E^*\}$ *— лінійно незалежна підмножина в* $\mathcal{H}_\eta$.

***Доведення.*** Нехай $\{e^{\varphi_i}\}_{i \in I}$ — максимальна лінійно незалежна підмножина з $B$. Зафіксуємо $\varphi \in E^*$ і припустимо, що існують ненульові сталі $c_{i_1}, \ldots, c_{i_r} \in \mathbb{C}$ такі, що

$$c_{i_1} e^{\varphi_{i_1}} + \cdots + c_{i_r} e^{\varphi_{i_r}} = e^\varphi. \tag{7}$$

Нехай $a$ — довільний елемент з $E$. Застосовуючи в (7) оператор диференціювання $f \longmapsto df(\cdot)a$, отримаємо

$$c_{i_1}\varphi_{i_1}(a)e^{\varphi_{i_1}} + \cdots + c_{i_1}\varphi_{i_r}(a)e^{\varphi_{i_r}} = \varphi(a)e^{\varphi}. \tag{8}$$

Оскільки множина $\{e^{\varphi_i}\}_{i\in I}$ — лінійно незалежна, а сталі $c_{i_1},\ldots,c_{i_r}$ одночасно не перетворюються в нуль, то з (7), (8) випливає, що

$$\varphi_{i_1}(a) = \cdots = \varphi_{i_r}(a) = \varphi(a).$$

Отже, $\{\varphi_i\}_{i\in I} = E^*$ і $\{e^{\varphi_i}\}_{i\in I} = \mathcal{B}$. Лему доведено.

**Лема 2.** *Нехай $U$ — куля в просторі $E^*$ радіуса $\delta$ з центром в 0. Тоді $S = \operatorname{span}\{e^{\varphi} : \varphi \in U\}$ — щільна множина в $\mathcal{H}_\eta$.*

***Доведення.*** Досить встановити, що $\varphi^n \in \overline{S}$ для всіх $\varphi \in U$ і $n \geq 1$. Для перевірки цього твердження використаємо метод математичної індукції. При $n = 1$ сформульоване твердження є очевидним.

Припустимо, що твердження виконується для $n \leq k-1$. Доведемо його істинність для $n = k$. Оскільки $t\varphi \in U$, то для кожного $0 < t < 1$ маємо

$$g_t = \frac{1}{t^k}\left(e^{t\varphi} - 1 - t\varphi - \frac{[t\varphi]^2}{2!} - \cdots - \frac{[t\varphi]^{k-1}}{(k-1)!}\right) \in \overline{S}.$$

Таким чином, якщо $x \in E$, то

$$\left|\left(g_t - \frac{\varphi^k}{k!}\right)(x)\right| = \left|\frac{1}{t^k}\left[e^{t\varphi} - 1 - t\varphi - \frac{[t\varphi]^2}{2!} - \cdots - \frac{[t\varphi]^k}{k!}\right](x)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{t^k}\sum_{n\geq k+1}\frac{[t\varphi]^n}{n!}(x)\right| \leq t\sum_{n\geq k+1} t^{n-k-1}\frac{|\varphi(x)|^n}{n!} \leq te^{\delta\|x\|}.$$

Тому $g_t \to \frac{\varphi^k}{k!}$ при $t \to 0$ в просторі $\mathcal{H}_\eta$ і $\frac{\varphi^k}{k!} \in \overline{S}$. Таким чином, твердження доведено.

Перейдемо до доведення теореми 2.

***Доведення теореми 2.*** Нехай $a$ — фіксований елемент з $E$. Розглянемо функцію $g : E^* \to \mathbb{C}$, яку визначимо за допомогою рівності $g(\varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\varphi^n(a)$. Зрозуміло, що $g : E^* \to \mathbb{C}$ — неперервна функція, відмінна від константи. Отже, множини

$$U := \{\varphi \in E^* : \|g(\varphi)\| < 1\}, \quad V := \{\varphi \in E^* : \|g(\varphi)\| > 1\},$$

де $\|g(\varphi)\| = \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^n(a)\right|$, є відкритими і непорожніми. Тоді, згідно з лемою 2, множини

$$X_0 = \operatorname{span}\{e^{\varphi} : \varphi \in U\}, \quad Y_0 = \operatorname{span}\{e^{\varphi} : \varphi \in V\} \tag{9}$$

є щільними підпросторами в $\mathcal{H}_\eta$. Нехай $\varphi \in E^*$. Тоді

$$T(e^{\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} d^n(e^{\varphi})a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\varphi^n(a)e^{\varphi} = g(\varphi)e^{\varphi}.$$

Згідно з (9), $T^n \to 0$ при $n \to \infty$ на $X_0$. За лемою 1 існує лінійне відображення $S : Y_0 \to Y_0$ таке, що

$$S(e^{\varphi}) = [g(\varphi)]^{-1}e^{\varphi}. \tag{10}$$

Згідно з (9), (10), $S^n \to 0$ при $n \to \infty$ поточково на $Y_0$ і $TS = \mathrm{id}_{Y_0}$ на $Y_0$. Тоді за теоремою 3 оператор $T$ є гіперциклічним. Теорему доведено.

Зауважимо, що простір з прикладу 2 задовольняє умови теореми 2, тому оператор зсуву на цьому просторі є гіперциклічним.


[1] *Aron R., Bès J.* Hypercyclic differentiation operators // Contemporary Mathematics, **232** (1999). – P. 39–46.

[2] *Chan K.C., Shapiro J.H.* The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions // Indiana Univ. Math. J., **40** (1991). – P. 1421–1449.

[3] *Cole B., Gamelin T.W.* Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra // Proc. London Math. Soc., **53** (1986). – P. 112–142.

[4] *Dineen S.* Complex Analysis in Locally Convex Spaces. – Mathematics Studies, V. 57, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1981.

[5] *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces. – Monographs in Mathematics, Springer, New York, 1999.

[6] *Grosse-Erdmann K.-G.* Universal families and hypercyclic operators // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), **36** (1999). – P. 345–381.

[7] *Hervé M.* Analyticity in Infinite Dimensional Spaces. – de Gruyter Stud. in Math., vol. 10, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1989.

[8] *Lopushansky O., Zagorodnyuk A.* Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables // Annales Polonici Mathematici, **81** **(2)** (2003). – P. 111–122.

[9] *Lopushansky O., Zagorodnyuk A.* Function Hilbert space of infinitely many variables // Functional Analysis and Topology, **10** **(2)** (2004). – P. 13–20.

[10] *Mujica J.* Complex Analysis in Banach Spaces. – North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, (1986). – 434 p.

[11] *Neeb K.-H., Ørsted B.* Hardy Spaces in an Infinite Dimensional Setting // Proceedings of II international workshop „Lie theory and its application in physics", Clausthal, Germany (ed. H.-D. Doebrer, V.K. Dobrev, J. Hilgert), (1998). – P. 3–27.

[12] *Novosad Z.H., Zagorodnyuk A.V.* A hypercyclic composition operator on a Hilbert space of entire functions // Mat. Studii, Vol. 23, No. 1, 2005.

## HILBERT SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS OF INFINITELY MANY VARIABLES

*Andriy ZAGORODNYUK, Zoryana MOZHYROVSKA*

Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine

In the paper we constructed Hilbert spaces of analytic functions and considered translation operator on these spaces. In particular, we proved that under some conditions the translation operator is hypercyclic.