ФАКТОРИЗАЦІЯ КЛІТКОВО-ДІАГОНАЛЬНИХ ТА КЛІТКОВО-ТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

©*2007 р. Наталія ДЖАЛЮК, Василь ПЕТРИЧКОВИЧ*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3-б, Львів 79060

Редакція отримала статтю 5 липня 2007 р.

Встановлено умови, при виконанні яких факторизації клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над областю головних ідеалів є асоційованими відповідно до клітково-діагональних та клітково-трикутних факторизацій. Вказано класи кліткових матриць, опис факторизацій яких зводиться до опису факторизацій їхніх діагональних кліток та розв'язків лінійних матричних рівнянь типу Сильвестра.

Факторизації поліноміальних матриць (матриць над поліноміальними кільцями) мають важливі застосування в різних розділах математики та її прикладних галузях. Задача про факторизацію поліноміальних матриць, яка розглядається багатьма авторами, полягає в тому, щоб описати їх розклади на регулярні, зокрема унітальні множники [2, 5]. З.І.Боревич [1] сформулював задачу про опис факторизацій з точністю до асоційовності матриць над кільцем головних ідеалів. Зокрема, він вказав умови існування єдиного з точністю до асоційовності розкладу матриці на множники, які мають задані канонічні діагональні форми.

У даній роботі розглянуто питання про факторизацію клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць над комутативною областю головних ідеалів. Вказано умови, за яких факторизації клітково-діагональних та клітково-трикутних матриць є асоційованими відповідно до клітково-діагональних та клітково-трикутних факторизацій, тобто факто-

УДК 512.643; MSC 2000: 15A23

ризацій, в яких множники мають відповідний клітковий вигляд. Встановлено зв'язок між факторизаціями кліткових матриць та розв'язками лінійних різносторонніх матричних рівнянь типу Сильвестра. Зауважимо, що факторизації многочленних матриць таких кліткових виглядів описані в роботі [3].

Нехай R — комутативна область головних ідеалів, $U(R)$ — група одиниць кільця R. Будемо позначати через $M(n,R)$ — кільце $n\times n$-матриць, $M(m,n,R)$ — множину $m\times n$-матриць над R, E_k — одиничну матрицю k-го порядку, d_k^A — найбільший спільний дільник мінорів k-го порядку матриці A.

1. Нехай $A\in M(n,R)$ і $A=BC$, $B,C\in M(n,R)$. Запишемо матриці у цій факторизації у блочному вигляді

$$\begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Vmatrix} C, \quad A_i, B_i \in M(n_i, n, R), \quad n_i \geq 1, \quad i=1,2. \tag{1}$$

Позначимо: $\mu = (\det B, \det C)$.

Лема 1. *Нехай*

$$(\det B, d_{n_i}^{A_i}) = \varphi_i, \quad i=1,2. \tag{2}$$

Якщо

$$(\mu, d_{n-1}^{A}) = 1, \tag{3}$$

то $d_{n_i}^{B_i} = \varphi_i$,[1] $i=1,2$.

Доведення. Припустимо, що $d_{n_1}^{B_1} \neq \varphi_1$ (для $i=2$ доведення проводимо аналогічно). З умови (2) і того, що $A_1 = B_1 C$ випливає, що $d_{n_1}^{B_1} | \varphi_1$ (ділить), тобто

$$\varphi_1 = d_{n_1}^{B_1} g, \quad g \notin U(R), \tag{4}$$

і $g = p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$, де p_i, $i=1,\ldots,r$, — прості елементи з кільця R.

Нехай $p_i|\mu$, $1\leq i\leq r$. Матрицю B_1 запишемо у вигляді

$$B_1 = GF_1, \quad G\in M(n_1,R), \quad F_1\in M(n_1,n,R), \quad \det G = d_{n_1}^{B_1}, \quad d_{n_1}^{F_1} = 1.$$

Тоді, відповідно,

$$A_1 = GH_1, \quad H_1 \in M(n_1, n, R). \tag{5}$$

Тому з рівності (1) одержимо

[1] Тут і надалі рівності розуміємо з точністю до асоційовності елементів.

$$\left\|\begin{matrix} H_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} F_1 \\ B_2 \end{matrix}\right\| C. \tag{6}$$

Для матриці F_1 існує матриця $W \in GL(n,R)$ така, що $F_1W = \left\|\begin{matrix} E_{n_1} & 0 \end{matrix}\right\|$, а тому

$$\left\|\begin{matrix} H_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} E_{n_1} & 0 \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} \end{matrix}\right\| \widetilde{C},$$

де $\widetilde{C} = W^{-1}C$, $\widetilde{B}_{21} \in M(n_2, n_1, R)$, $\widetilde{B}_{22} \in M(n_2, R)$. Нехай

$$V = \left\|\begin{matrix} E_{n_1} & 0 \\ -\widetilde{B}_{21} & E_{n_2} \end{matrix}\right\|.$$

Тоді

$$V \left\|\begin{matrix} E_{n_1} & 0 \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & \widetilde{B}_{22} \end{matrix}\right\|.$$

Тому

$$V \left\|\begin{matrix} H_1 \\ A_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & \widetilde{B}_{22} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} \\ \widetilde{C}_{21} & \widetilde{C}_{22} \end{matrix}\right\| = \widetilde{B}\widetilde{C}.$$

Оскільки $p_i | \det \widetilde{B}_{22}$, то з останьої рівності отримуємо, що $p_i | d_{n_2}^{H_2}$. Але $p_i | d_{n_1}^{H_1}$, тому $p_i | d_{n-1}^{A}$, що суперечить умові (3) леми 1. Отже, $g \in U(R)$ і $d_{n_1}^{B_1} = \varphi_1$.

Нехай тепер $p_i \nmid \mu$, $1 \leq i \leq r$ (не ділить). Тоді $p_i \nmid \det C$. Із рівності (6) маємо, що $H_1 = F_1C$, де $d_{n_1}^{F_1} = 1$. Тому $p_i \nmid d_{n_1}^{F_1}$, а, отже, і $p_i \nmid d_{n_1}^{H_1}$. Але, враховуючи співвідношення (2), (4), (5), одержуємо, що $p_i | d_{n_1}^{H_1}$. З цього випливає, що $p_i = 1$, $i = 1, \ldots, r$, тобто $g \in U(R)$. Отже, $d_{n_1}^{B_1} = \varphi_1$.

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $(d_{n_1}^{A_1}, d_{n_2}^{A_2}) = \rho_{12}$ *і* $(\rho_{12}, \mu) = 1$. *Якщо* $\det A = d_{n_1}^{A_1} d_{n_2}^{A_2}$, *то* $\det B = d_{n_1}^{B_1} d_{n_2}^{B_2}$.

Доведення. Міркуючи, як і при доведенні леми 1, одержуємо, що $(\det B, d_{n_i}^{A_i}) = d_{n_i}^{B_i}$, $i = 1, 2$. Припустимо, що $\det B = d_{n_1}^{B_1} d_{n_2}^{B_2} f$, $f \notin U(R)$. Матриці B_i, $i = 1, 2$, з рівності (1) зобразимо у вигляді

$$B_i = G_iF_i,\ G_i \in M(n_i, R),\ F_i \in M(n_i, n, R),\ \det G_i = d_{n_i}^{B_i},\ d_{n_i}^{F_i} = 1,$$

$i = 1, 2$. Відповідно запишемо і матриці A_i: $A_i = G_iH_i$, $H_i \in M(n_i, n, R)$, $i = 1, 2$. Із рівності (1) одержимо

$$\left\|\begin{matrix} H_1 \\ H_2 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} F_1 \\ F_2 \end{matrix}\right\| C \tag{7}$$

або $H = FC$. Покладемо $f = q_1^{k_1} \cdots q_s^{k_s}$, де q_i, $i = 1, \ldots, s$, — прості елементи з кільця R. Очевидно, що $q_i | \det H$, $1 \le i \le s$. Оскільки $\det H = d_{n_1}^{H_1} d_{n_2}^{H_2}$, то q_i ділить $d_{n_1}^{H_1}$ або $d_{n_2}^{H_2}$. Нехай $q_i | d_{n_1}^{H_1}$. Із рівності (7) маємо $H_1 = F_1 C$. Оскільки $d_{n_1}^{F_1} = 1$, то $q_i | \det C$. Тому з того, що $H_2 = F_2 C$ отримаємо, що $q_i | d_{n_2}^{H_2}$. Отже, $q_i | \rho_{12}$.

Із того, що $\det F = f$ і $q_i | f$, $q_i | \det C$ випливає, що $q_i | \mu$. Оскільки $(\rho_{12}, \mu) = 1$, то $q_i = 1$, $i = 1, \ldots, s$. Тому $f \in U(R)$ і, отже, $\det B = d_{n_1}^{B_1} d_{n_2}^{B_2}$.

Лему доведено.

Лема 3. *Нехай $C = \begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix}$, $C \in M(m, n, R)$, $m \le n$, $B \in M(m, R)$, $d_m^C \ne 0$. Якщо $d_m^C = \det B$, то така існує унітрикутна матриця*

$$V = \begin{Vmatrix} E_{n-m} & 0 \\ -V_{21} & E_m \end{Vmatrix},$$

що

$$CV = \begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix} V = \begin{Vmatrix} 0 & B \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Доведення. Очевидно, що рівність (8) справедлива тоді і тільки тоді, коли лінійне матричне рівняння

$$BX = A \tag{9}$$

має розв'язок, при цьому $V_{21} = X$. Відомо, що рівняння (9) має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці $\begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix}$ та $\begin{Vmatrix} 0 & B \end{Vmatrix}$ еквівалентні.

На основі результатів робіт [8, 9] пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари матриць (T^A, D^B), тобто

$$UAV_1 = T^A, \quad UBV_2 = D^B, \quad U, V_2 \in GL(m, R), \quad V_1 \in GL(n-m, R),$$

і $D^B = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — канонічна діагональна форма матриці B, T^A — нижня трикутна матриця з інваріантними множниками μ_i, $i = 1, \ldots, m$, матриці A на головній діагоналі. Тому

$$U \begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} T^A & D^B \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varphi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ t_{21}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \varphi_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{m1}\mu_1 & t_{m2}\mu_2 & \cdots & \mu_m & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \varphi_m \end{Vmatrix} = \widetilde{C}.$$

Оскільки $d_m^{\widetilde{C}} = d_m^C$ і $d_m^C = \det B$, то

$$\varphi_i | \mu_i, \quad i = 1, \ldots, m; \quad \varphi_i | t_{ij}\mu_j, \quad i, j = 1, \ldots, m, \quad i > j.$$

Звідси отримуємо, що матриця $\widetilde{C} = \left\| T^A \quad D^B \right\|$ — правоеквівалентна до матриці $\left\| 0 \quad D^B \right\|$. Лему доведено.

2. Якщо діагональні клітки клітково-діагональної матриці

$$D = \operatorname{diag}\{D_1, \ldots, D_k\}, \quad D_i \in M(n_i, R), \quad i = 1, \ldots, k, \tag{10}$$

розкладаються на множники $D_i = B_i C_i$, $i = 1, \ldots, k$, то, очевидно, матриця D розкладна на множники такого ж клітково-діагонального вигляду, тобто

$$D = BC, \quad B = \operatorname{diag}\{B_1, \ldots, B_k\}, \quad C = \operatorname{diag}\{C_1, \ldots, C_k\},$$

причому

$$\det B = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i, \quad \det C = \prod_{i=1}^{k} \psi_i.$$

Теорема 1. *Нехай $D \in M(n, R)$ — неособлива клітково-діагональна матриця вигляду* (10) *і*

$$\det D = \varphi\psi, \ \varphi = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i, \ \psi = \prod_{i=1}^{k} \psi_i, \ \varphi_i \psi_i = \det D_i, \ i = 1, \ldots, k. \tag{11}$$

Якщо

$$((\det D_i, \det D_j), (\varphi, \psi)) = 1, \quad i, j = 1, \ldots, k, \quad i \neq j, \tag{12}$$

то для матриці D існує факторизація

$$D = BC, \quad B, C \in M(n, R), \quad \det B = \varphi, \quad \det C = \psi,$$

і кожна така факторизація асоційована до клітково-діагональної факторизації матриці D вигляду

$$D = \widetilde{B}\widetilde{C}, \tag{13}$$

де $\widetilde{B} = BV = \operatorname{diag}\{B_1, \ldots, B_k\}$, $\widetilde{C} = V^{-1}C = \operatorname{diag}\{C_1, \ldots, C_k\}$, $V \in GL(n, R)$, $B_i, C_i \in M(n_i, R)$, і $\det B_i = \varphi_i$, $\det C_i = \psi_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Доведення. Нехай $k = 2$, тобто

$$D = \left\| \begin{matrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{matrix} \right\|, \quad D_i \in M(n_i, R), \quad i = 1, 2.$$

З умови (11) випливає, що існує факторизація $D = BC$ матриці D така, що $\det B = \varphi$, $\det C = \psi$. Запишемо її у відповідному клітковому вигляді

$$\left\| \begin{matrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix} \right\| C, \tag{14}$$

де $B_{ii} \in M(n_i, R)$, $C \in M(n, R)$, $i = 1, 2$. Враховуючи умову (12) маємо, що $(\det B, \det D_i) = \varphi_i$, $i = 1, 2$.

На основі леми 2 $\det B = d_{n_1}^{B_1} d_{n_2}^{B_2}$, де $B_i = \left\| B_{i1} \quad B_{i2} \right\|$, $i = 1, 2$. Оскільки $d_{n_i}^{B_i} | \varphi_i$, $i = 1, 2$, і $\det B = \varphi_1 \varphi_2$, то звідси випливає, що $d_{n_i}^{B_i} = \varphi_i$, $i = 1, 2$. Для матриці B_2 існує матриця $U \in GL(n, R)$ така, що

$$B_2 U = \left\| 0 \quad \widetilde{B}_{22} \right\|, \quad \widetilde{B}_{22} \in M(n_2, R), \quad \det \widetilde{B}_{22} = \varphi_2.$$

Тоді з рівності (14) одержуємо

$$\left\| \begin{matrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ 0 & \widetilde{B}_{22} \end{matrix} \right\| \widetilde{C},$$

де

$$\left\| \begin{matrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ 0 & \widetilde{B}_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix} \right\| U, \quad \widetilde{C} = U^{-1} C.$$

Згідно з лемою 3 існує така матриця

$$V = \left\| \begin{matrix} E_{n_1} & 0 \\ V_{21} & E_{n_2} \end{matrix} \right\|,$$

що

$$\left\| \widetilde{B}_{11} \quad \widetilde{B}_{12} \right\| V = \left\| \widetilde{B}_{11} \quad 0 \right\|.$$

Таким чином, одержуємо

$$D = \widetilde{B}\widetilde{C}, \quad \widetilde{B} = BW = \operatorname{diag}\{\widetilde{B}_{11}, \widetilde{B}_{22}\}, \quad \widetilde{C} = W^{-1} C = \operatorname{diag}\{\widetilde{C}_{11}, \widetilde{C}_{22}\},$$

$$W = UV, \quad \widetilde{B}_{ii}, \widetilde{C}_{ii} \in M(n_i, R), \quad \det \widetilde{B}_{ii} = \varphi_i, \quad \det \widetilde{C}_{ii} = \psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Для довільного k доведення теореми 1 проводимо за індукцією.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо виконується хоча б одна з умов*

а) $(\det D_i, \det D_j) = 1$, $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$;

б) $(\varphi, \psi) = 1$,

то кожна факторизація $D = BC$, $B, C \in M(n, R)$, $\det B = \varphi$, $\det C = \psi$

матриці D асоційована до клітково-діагональної факторизації вигляду (13).

Таким чином, у випадках, зазначених теоремою 1 та наслідком 1, опис факторизацій клітково-діагональної матриці з точністю до асоційовності зводиться до опису факторизацій її діагональних кліток.

3. Нехай $T \in M(n, R)$ — верхня клітково-трикутна матриця, тобто

$$T = \|T_{ij}\|_1^k, \quad T_{ij} \in M(n_i, n_j, R), \quad T_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, k, \quad i > j. \tag{15}$$

Теорема 2. *Нехай $T \in M(n, R)$ — неособлива клітково-трикутна матриця вигляду* (15) *і*

$$\det T = \varphi\psi, \ \varphi = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i, \ \psi = \prod_{i=1}^{k} \psi_i, \ \varphi_i\psi_i = \det T_{ii}, \ i = 1, \ldots, k. \tag{16}$$

Якщо

$$(\prod_{i=1}^{s} \varphi_i, \psi_{s+1}) = 1, \quad s = 1, \ldots, k-1, \quad i \quad ((\varphi, \psi), d_{n-1}^T) = 1, \tag{17}$$

то для матриці T існує факторизація

$$T = BC, \quad B, C \in M(n, R), \quad \det B = \varphi, \quad \det C = \psi,$$

і кожна така факторизація асоційована до клітково-трикутної факторизації матриці T вигляду

$$T = \widetilde{B}\widetilde{C}, \quad \widetilde{B} = BV = \|B_{ij}\|_1^k, \quad \widetilde{C} = V^{-1}C = \|C_{ij}\|_1^k, \tag{18}$$

де $V \in GL(n, R)$, $B_{ij}, C_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $B_{ij} = C_{ij} = 0$ при $i > j$ і $\det B_{ii} = \varphi_i$, $\det C_{ii} = \psi_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Доведення. Нехай $k = 2$, тобто

$$T = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{matrix} \right\|, \quad T_{ij} \in M(n_i, n_j, R), \quad i, j = 1, 2.$$

З умови (16) випливає, що існує факторизація $T = BC$ матриці T така, що $\det B = \varphi$, $\det C = \psi$. У відповідному кліткова вигляді ця факторизація матиме вигляд

$$\left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix} \right\| C, \quad B_{ij} \in M(n_i, n_j, R), \quad C \in M(n, R),$$

де $i, j = 1, 2$. З умови (17) теореми випливає, що $(\det B, \det T_{22}) = \varphi_2$.

Згідно з лемою 1, $d_{n_2}^{B_2} = \varphi_2$, де $B_2 = \left\| B_{21} \quad B_{22} \right\|$. Тоді існує така матриця $V \in GL(n, R)$, що $B_2 V = \left\| 0 \quad \widetilde{B}_{22} \right\|$, де $\widetilde{B}_{22} \in M(n_2, R)$, $\det \widetilde{B}_{22} = \varphi_2$. Отже,

$$T = \left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ 0 & \widetilde{B}_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \widetilde{C}_{11} & \widetilde{C}_{12} \\ 0 & \widetilde{C}_{22} \end{matrix} \right\| = \widetilde{B}\widetilde{C},$$

де $\widetilde{B} = BV$, $\widetilde{C} = V^{-1}C$, $V \in GL(n, R)$, $B_{ij}, C_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, і $\det \widetilde{B}_{ii} = \varphi_i$, $\det \widetilde{C}_{ii} = \psi_i$, $i = 1, 2$.

Для довільного k доведення теореми 2 проводимо за індукцією.

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Якщо*

$$\left(\prod_{i=1}^{s} \varphi_i, \det T_{s+1,s+1} \right) = 1, \quad s = 1, \ldots, k-1,$$

і $((\varphi, \psi), d_{n-1}^{T}) = 1$, *то кожна факторизація*

$$T = BC, \quad B, C \in M(n, R), \quad \det B = \varphi, \quad \det C = \psi,$$

матриці T *асоційована до клітково-трикутної факторизації матриці* T *вигляду* (18).

Теорема 3. *Нехай* $T \in M(n, R)$ *— неособлива клітково-трикутна матриця вигляду* (15) *і визначник матриці* T *розкладний на множники вигляду* (16). *Якщо* $(\det T_{ii}, (\varphi, \psi)) = 1$, $i = 1, \ldots, k-1$, *то для матриці* T *існує факторизація*

$$T = BC, \quad B, C \in M(n, R), \quad \det B = \varphi, \quad \det C = \psi,$$

і кожна така факторизація асоційована до клітково-трикутної факторизації матриці T *вигляду* (18).

Доведення. Нехай $k = 2$. Тоді з умови теореми випливає, що існує факторизація $T = BC$ матриці T така, що $\det B = \varphi$, $\det C = \psi$. Запишемо її у відповідному блочному вигляді

$$\left\| \begin{matrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix} \right\| C,$$

де $B_{ij} \in M(n_i, n_j, R)$, $C \in M(n, R)$, $i, j = 1, 2$.

Застосовуючи схему, запропоновану при доведенні леми 1, отримаємо, що $d_{n_2}^{B_2} = \varphi_2$, де $B_2 = \left\| B_{21} \quad B_{22} \right\|$. Далі доведення проводимо аналогічно, як і доведення теореми 2.

Наслідок 3. *Якщо* $((\det T_{ii}, \det T_{jj}), (\varphi, \psi)) = 1$, $i, j = 1, \ldots, k$, $i \neq j$, *то кожна факторизація*

$$T = BC, \quad B, C \in M(n, R), \quad \det B = \varphi, \quad \det C = \psi,$$

матриці T *асоційована до клітково-трикутної факторизації матриці* T *вигляду* (18).

4. Припустимо, що діагональні клітки клітково-трикутної матриці

$$T = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{Vmatrix} \tag{19}$$

розкладені на множники $T_{ii} = B_{ii}C_{ii}$, $i = 1, 2$. Тоді матриця T розкладається у добуток клітково-трикутних множників вигляду

$$\begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} B_{11} & -Y \\ 0 & B_{22} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{11} & X \\ 0 & C_{22} \end{Vmatrix} \tag{20}$$

в тому і тільки в тому випадку, коли має розв'язки матричне рівняння $B_{11}X - YC_{22} = T_{12}$.

Добре відома теорема Рота про те, що матричне рівняння

$$AX - YB = C,$$

де A, B, C — відомі, X, Y — невідомі матриці над полем, має розв'язок тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix}$$

є еквівалентними [10]. У роботах [7, 4] теорема Рота доведена для матриць над кільцями головних ідеалів, а в [6] — над комутативними кільцями.

Звідси отримуємо таке твердження.

Наслідок 4. *Клітково-трикутна матриця* (19) *розкладається у добуток клітково-трикутних множників вигляду* (20) *тоді і тільки тоді, коли є еквівалентними матриці*

$$\begin{Vmatrix} B_{11} & T_{12} \\ 0 & C_{22} \end{Vmatrix} \quad \textit{і} \quad \begin{Vmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{Vmatrix}.$$

Нехай тепер T — клітково-трикутна матриця вигляду (15) і її діагональні клітки T_{ii}, $i = 1, \ldots, k$, розкладаються на множники, тобто

$$T_{ii} = B_{ii}C_{ii}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Тоді матриця T розкладається у добуток клітково-трикутних множників вигляду

$$T = \begin{Vmatrix} B_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1k} \\ 0 & B_{22} & \ldots & Y_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{kk} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} C_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1k} \\ 0 & C_{22} & \ldots & X_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{kk} \end{Vmatrix}$$

тоді і тільки тоді, коли має розв'язки система лінійних матричних рівнянь

$$B_{ii}X_{ij} + Y_{ij}C_{jj} + \sum_{l=i+1}^{j-1} Y_{il}X_{lj} = T_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq k.$$

Розв'язування цієї системи зводиться до послідовного розв'язування лінійних матричних рівнянь типу Сильвестра: $AX - YB = C$.

[1] *Боревич З.И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // III Всес. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. докл. – Тарту: Тартуский ун-т, 1976. – С. 19.

[2] *Казімірський П.С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наукова думка, 1981. – 224 с.

[3] *Петричкович В.М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Математические заметки. – 1985. – **37**, вып. 6. – С. 789–796.

[4] *Feinberg R.B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1976. – **80**, No 1. – P. 89–97.

[5] *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Academic Press, 1982. – 409 p.

[6] *Gustafson W.H.* Roth's theorem over commutative rings // Linear Algebra and its Applications. – 1979. – **23**. – P. 245–251.

[7] *Johnson C.R., Newman M.* Condition for the diagonalizability of a partitioned matrix // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1975. – **79B**. – P. 45–48.

[8] *Petrychkovych V.* Generalized eguivalence of pairs of matrices // Linear and Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, No 2. – P. 179–188.

[9] *Petrychkovych V.M.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized eguivalence // Visnyk Lviv. Univ. – 2003. – **61**. – P. 153–160.

[10] *Roth W.E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – No 3. – P. 392–396.

FACTORIZATION OF CELL-DIAGONAL AND CELL-TRIANGULAR MATRICES OVER PRINCIPAL IDEAL RINGS

Nataliya DZHALYUK, Vasyl' PETRYCHKOVYCH

Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics of NASU,
3b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

The conditions under which the factorizations of the cell-diagonal and cell-triangular matrices over a principal ideal domain are associate to the cell-diagonal and cell-triangular factorizations respectively are established. The classes of partitioned matrices such that a description of their factorizations reduces to a description of the factorizations of their diagonal cells and to the solutions of linear matrix equations of the Sylvester type are determined.