# ПРО ЗБІЖНІСТЬ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

*©2011 р. Дмитро БОДНАР, Марія БУБНЯК*

Тернопільський національний економічний університет,
вул. Львівська 11, Тернопіль 46020

e-mail: *dmytro_bodnar@hotmail.com, maria.bubnyak@gmail.com*

Редакція отримала статтю 5 жовтня 2011 р.

Досліджено область збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду. Встановлено оцінки швидкості збіжності в цій області.

## 1 Деякі відомості з теорії неперервних дробів

Важливими класами неперервних дробів є $k$-періодичні та гранично-$k$-періодичні дроби. 1-періодичні дроби вивчали O. Stolz, L. Euler, D. Bernoulli, 2-періодичні – K. Kahl. E. Galois досліджував питання збіжності $k$-періодичних дробів та двоїстих до них. T. Thiele встановив умови розбіжності $k$-періодичних дробів. A. Pringsheim, W. Leighton, O. Perron, R. Lane, T. Scott та інші продовжили ці дослідження. E. Van Vleck, O. Perron, H. Wall, W. Jones, W. Thron, H. Waadeland, L. Lorentzen встановили ознаки збіжності гранично-періодичних неперервних дробів. Огляд отриманих результатів зроблено в [1, 2, 3].

УДК: 517.524; MSC 2000: 11A55, 40A15, 11J70

*Ключові слова і фрази:* 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, збіжність, оцінка швидкості збіжності 1-періодичного ГЛД спеціального вигляду

Розглянемо неперервний дріб вигляду:

$$\cfrac{a_1}{1+\cfrac{a_2}{1+\ddots}} = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \ldots = \mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1}\,, \tag{1}$$

де $a_n \in \mathbb{C}$.

**Теорема 1** (Овальна теорема [3], с. 141)**.** *Нехай $c \in \mathbb{C}$ і $\rho \in \mathbb{R}$ задані, причому $\operatorname{Re} c > -\frac{1}{2}$ і $0 < \rho < |1+c|$. Тоді множини*

$$\mathcal{E} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z(1+\overline{c}) - c(|1+c|^2 - \rho^2)| + \rho|z| \le \rho(|1+c|^2-\rho^2) \right\} \tag{2}$$

*та*

$$\mathcal{V} = \{ z \in \mathbb{C} : |z - c| < \rho \}\,, \tag{3}$$

*є, відповідно, областю збіжності та областю значень для дробу* (1)*.*

*Справджується оцінка узагальненої збіжності за умови, що $\omega \in \overline{\mathcal{V}}$:*

$$|f - S_n(\omega)| \le 2\rho \frac{|c| + \rho}{|1+c| - \rho} M^{n-1}, \tag{4}$$

*де $f$ – значення дробу* (1)*,*

$$S_n(\omega) = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1} + \ldots + \frac{a_n}{1+\omega},$$

$$M = \max\left\{ \left| \frac{z}{1+z} \right| : z \in \overline{\mathcal{V}} \right\}.$$

**Зауваження 1** ([3], с. 142)**.** *Якщо $M < 1$, тоді оцінка* (4) *гарантує, що $\mathcal{E}$ є множиною рівномірної узагальненої збіжності, яка відповідає області значень $\mathcal{V}$. Якщо $\rho < \operatorname{Re} c + \frac{1}{2}$, то $M < 1$.*

**Означення 1.** *Дріб* (1) *називається $k$-періодичним, якщо послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ його елементів є $k$-періодичною, тобто виконуються співвідношення: $a_{kn+p} = a_p^*$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $p \in \{1, \ldots, k\}$.*

Нехай

$$t(\omega) = \frac{a\omega + b}{c\omega + d} \tag{5}$$

дробово-лінійне відображення, де $a$, $b$, $c$, $d$ — довільні комплексні числа ($ab-dc \neq 0$, $c \neq 0$). Точка $z$ називається нерухомою точкою (fixed point) дробово-лінійного відображення (5), якщо $t(z) = z$. Дробово-лінійне відображення $t(\omega)$ має дві нерухомі точки. Позначимо їх $x$ та $y$. Точка $x$ — називається притягувальною (attractive), якщо $t^n(\omega) \to x$ для всіх $\omega \neq y$ при $n \to \infty$, і, відповідно, $y$ — відштовхувальна (repulsive) точка відображення (5).

Розглянемо 1-періодичний неперервний дріб:

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \frac{c}{1}\,, \tag{6}$$

де $c \in G$, $G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg\left(z + \frac{1}{4}\right) \right| < \pi \right\}$, який є збіжним і його значення рівне $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$, причому $x$ – притягувальна точка дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + \dfrac{c}{\omega}$ [2, 3, 4, 5] (береться така вітка кореня, що $\mathrm{Re}\sqrt{1+4c} > 0$).

Узагальненням $k$-періодичних неперервних дробів є гранично-$k$-періодичні неперервні дроби.

**Означення 2.** *Дріб* (1) *називають гранично-k-періодичним, якщо послідовність елементів* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *задовольняє умови:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_{kn+p} = a_p^*$, $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Гранично-1-періодичний дріб будемо називати гранично-періодичним дробом.

L. Lorentzen, H. Waadeland [3, 6] досліджували питання збіжності послідовності критичних залишків $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ дробу (1), де

$$h_1 = 1, \quad h_n = 1 + \frac{a_n}{1} \mathop{+} \frac{a_{n-1}}{1} \mathop{+} \ldots \mathop{+} \frac{a_2}{1}, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Розглянемо гранично-періодичний дріб (1), у якому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$, та послідовність його критичних залишків $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Якщо $\left| \arg\left(a + \frac{1}{4}\right) \right| < \pi$ і $a \neq -\frac{1}{4}$, то, згідно з теоремою 4.1 [6, с. 47], $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = x$, де $x = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

## 2 Основні результати

Розглянемо гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) спеціального вигляду:

$$\left(1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1},$$

де $a_{i(k)}$ – комплексні числа, $i(k)=i_1,i_2,\ldots,i_k$ – мультиіндекс; $1\le i_k\le i_{k-1}$; $k=1,2,\ldots$; $i_0=N$ – фіксоване натуральне число.

Покладаючи $a_{i(k)}=c_{i_k}$, де $c_{i_k}\neq 0$ ($i_k=\overline{1,N}$), одержимо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб вигляду:

$$\left(1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}=\left(1+\sum_{i_1=1}^{N}\cfrac{c_{i_1}}{1+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\cfrac{c_{i_2}}{1+\ddots}}\right)^{-1}, \tag{8}$$

де $c_j$ – комплексні числа ($j=\overline{1,N}$). Підхідним дробом $n$-го порядку ($n\ge 0$) 1-періодичного ГЛД (8) називають вираз:

$$F_0=1,\quad F_n=\left(1+\underset{k=1}{\overset{n}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}\right)^{-1}\quad (n\ge 1).$$

Дріб (8) є збіжним, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty}F_n=F$. Число $F$ – значення дробу (8).

Будемо також розглядати 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб, обернений до дробу (8):

$$1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k}}{1}. \tag{9}$$

Його підхідні дроби $F'_n$ визначають співвідношенням: $F'_n=F_n^{-1}(n\ge 0)$.

**Означення 3.** *Вирази вигляду:*

$$R_0(m) = 1, \quad R_n(0) = 1,$$
$$R_n(m) = 1 + \mathop{D}_{k=1}^{n} \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} \frac{c_{j_k}}{1} = 1 + \sum_{j_1=1}^{j_0} \cfrac{c_{j_1}}{1 + \sum\limits_{j_2=1}^{j_1} \cfrac{c_{j_2}}{1 + \ddots \sum\limits_{j_{n-1}=1}^{j_n} \cfrac{c_{j_{n-1}}}{1 + \sum\limits_{j_n=1}^{j_{n-1}} \cfrac{c_{j_n}}{1}}}}, \tag{10}$$

*назвемо n-ми залишками m-го порядку 1-періодичного ГЛД* (8) *($m = \overline{1, N}$; $n \geq 1$; $j_0 = m$).*

Очевидно, що $F'_n = R_n(N)$ $(n \geq 1)$.

Якщо всі $R_n(m) \neq 0$, то справджуються рекурентні співвідношення:

$$R_n(m) = 1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{R_{n-1}(j)} = R_n(m-1) + \frac{c_m}{R_{n-1}(m)} \quad (m = \overline{1, N}; n \geq 1). \tag{11}$$

**Твердження 1.** *Якщо всі $R_n(j) \neq 0$ ($j = \overline{1, N}$; $n \geq 1$), то мають місце рівністі:*

$$R_n(m) = \prod_{j=1}^{m} h_n(j) \quad (m = \overline{1, N}; n \geq 1), \tag{12}$$

*де*

$$h_1(j) = 1, \quad h_n(j) = 1 + \frac{c_j/R_n(j-1)R_{n-1}(j-1)}{1} + \\ + \frac{c_j/R_{n-1}(j-1)R_{n-2}(j-1)}{1} + \ldots + \\ + \frac{c_j/R_1(j-1)R_0(j-1)}{1}.$$

***Доведення.*** Використаємо метод математичної індукції по $m$.

Якщо $m = 1$, то співвідношення (12) перевіряються безпосередньо, враховуючи, що $R_n(0) = 1$ $(n \geq 1)$.

У припущенні, що $R_n(m-1) = \prod_{j=1}^{m-1} h_n(j)$ $(n \geq 1)$, маємо:

$$R_n(m) = R_n(m-1) \left( 1 + \cfrac{c_m/R_n(m-1)R_{n-1}(m-1)}{1 + \ddots_{+} \cfrac{c_m/R_1(m-1)R_0(m-1)}{1}} \right) =$$

$$= R_n(m-1) \cdot h_n(m) = \prod_{j=1}^{m} h_n(j).$$

□

Розглянемо послідовність скінченних дробів $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$g_1 = 0, \quad g_n = \frac{a_n}{1} {}_{+} \frac{a_{n-1}}{1} {}_{+} \ldots {}_{+} \frac{a_2}{1} \quad (n \geq 2). \tag{13}$$

Дослідимо збіжність цієї послідовності.

**Твердження 2.** *Нехай елементи дробу* (13) *належать області* (2), $a_k \in \mathcal{E}$ *(*$k = \overline{2, n}$*), параметри якої задовольняють умови:* $\operatorname{Re} c > -\frac{1}{2}$ *і* $|c| < \rho < |c+1|$.

*Тоді*

1) $g_n \in \mathcal{V}$ *(*$n \geq 2$*), де* $\mathcal{V}$ *визначається згідно з* (3)*;*

2) *якщо виконується умова:* $|c| - \operatorname{Re} c < \frac{1}{2}$*, то послідовність* $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ *збігається до скінченного значення* $g$*, причому* $g \in \mathcal{V}$*, і справджується оцінка швидкості збіжності:*

$$|g_n - g| \leq K \cdot M^{n-2} \quad (n \geq 2), \tag{14}$$

*де* $K = \rho(|c| + \rho)$*,* $M = \max\left\{ \left| \frac{z}{1+z} \right| : z \in \overline{\mathcal{V}} \right\}$.

***Доведення.*** В овальній теоремі встановлено умови узагальненої збіжності неперервного дробу (1). Ми досліджуємо класичну збіжність послідовності скінченних дробів (13). Схема доведення овальної теореми фактично переноситься для даного твердження з урахуванням того, що $\omega = 0$, та посиленою умовою $|c| < \rho < |1 + c|$. Використовуючи схему доведення теореми 3.2 [7, с. 95], одержуємо оцінку (14). □

**Теорема 2.** *Нехай елементи $c_m$ дробу (8) належать відповідно областям $c_m \in G_m$ $(m = \overline{1, N})$:*

$$G_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left( z + \frac{1}{4} \right) \right| < \pi \right\}, \tag{15}$$

$$G_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left( z + \frac{\prod\limits_{k=1}^{j-1} x_k^2}{4} \right) \right| < \pi \right\} \quad (j = \overline{2, N}), \tag{16}$$

*де $x_1$ – притягувальна точка дробово-лінійного відображення $t_1(\omega) = 1 + \dfrac{c_1}{\omega}$, $x_j$ – притягувальні точки дробово-лінійних відображень $t_j(\omega) = 1 + \dfrac{c_j / \prod_{k=1}^{j-1} x_k^2}{\omega}$ $(j = \overline{2, N})$. Тоді*

1) *дріб (8) збігається;*

2) *значення дробу (8) рівне $F = \left( \prod\limits_{k=1}^{N} x_k \right)^{-1}$;*

3) *якщо виконуються умови: $|x_j - 1| - \operatorname{Re} x_j < \frac{1}{2}$ $(j = \overline{1, N})$, то справджується оцінка швидкості збіжності:*

$$|F_n - F| \le \inf_{\rho \in D} \sum_{j=1}^{N} C_j M_j^{n-1} \quad (n \ge 1), \tag{17}$$

*де $D = \{\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N) \in \mathbb{R}^N : |x_j - 1| < \rho_j < |x_j|\}$,*

$C_j = \dfrac{\rho_j(|x_j| + \rho_j)}{\prod_{k=1}^{j} |x_k| \cdot \prod_{k=j}^{N} (|x_k| - \rho_k)}$, $M_j = \max \left\{ \left| \dfrac{z}{1+z} \right| : z \in \overline{\mathcal{V}}_j \right\}$,

$\mathcal{V}_j = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_j| < \rho_j\}$ *$(j = \overline{1, N})$.*

***Доведення.*** Нехай $x_m \in G_m$ $(m = \overline{1, N})$. Легко перевірити, що для притягувальних точок $x_m$ $(m = \overline{2, N})$ виконуються співвідношення: $x_m = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4c_m / \prod_{k=1}^{m-1} x_k^2}}{2}$, а також $x_m \ne 0$ $(m = \overline{1, N})$.

Використовуючи метод математичної індукції по $m$, доведемо, що $R_n(m) \neq 0$ $(n \geq 1)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(m) = \prod_{j=1}^{m} x_j$ $(m = \overline{1, N})$.

Нехай елемент $c_1$ належить області (15). Оскільки залишок $R_n(1)$ рівний $n$-му підхідному дробу 1-періодичного неперервного дробу (6), то згідно з теорією неперервних дробів маємо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(1) = x_1$.

Доведемо, що $R_n(1) \neq 0$ $(n \geq 1)$. Оскільки $c_1 \in G_1$ і $G_1 = \bigcup\limits_{\gamma\in(-\pi;\pi)} P(\gamma)$, $P(\gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} : |z| - \mathrm{Re}\Big(ze^{-i\gamma}\Big) \leq \dfrac{1}{2}\cos^2\dfrac{\gamma}{2}\right\}$, то існує таке $\gamma$, що $c_1 \in P(\gamma)$. Згідно з теоремою 20 [3, с. 131], якщо елементи дробу (6) належать параболі $P(\gamma)$, то областю значень цього дробу є півплощина:

$$V(\gamma) = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(ze^{-i\gamma/2}\right) \geq \frac{1}{2}\right\},$$

Оскільки $R_n(1) \in V(\gamma)$, то $R_n(1) \neq 0$ $(n \geq 1)$.

Припустимо, що $R_n(m-1) \neq 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(m-1) = \prod_{j=1}^{m-1} x_j$ $(m = \overline{2, N};$ $n \geq 1)$.

Покажемо, що $R_n(m) \neq 0$ $(n \geq 1)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(m) = \prod_{j=1}^{m} x_j$. Запишемо $n$-ий залишок $m$-го порядку у вигляді:

$$R_n(m) = R_n(m-1)h_n(m) \quad (n \geq 1),$$

де $h_1(m) = 1$, $h_n(m) = 1 + \dfrac{c_m/R_n(m-1)R_{n-1}(m-1)}{1} + \ldots + \dfrac{c_m/R_1(m-1)R_0(m-1)}{1}$. Згідно з припущенням індукції, маємо:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_m}{R_n(m-1)R_{n-1}(m-1)} = \frac{c_m}{\prod_{j=1}^{m-1} x_j^2}.$$

Оскільки елементи $c_m \in G_m$ $(m = \overline{1, N})$, то за теоремою 4.1 [6], одержуємо, що послідовність критичних залишків $\{h_n(m)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до $x_m$. Визначимо $g_n(m) = h_{n-1}(m) - 1$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(m) = z_m$, де $z_m = x_m - 1$.

Покладемо у твердженні 2 $c = z_m$ і виберемо радіус $\rho = \rho_m$ так, щоб $|z_m| < \rho_m < |z_m + 1|$. Умова $\mathrm{Re}\, c > -\frac{1}{2}$ виконується в силу вибору притягувальної точки $x_m$. З твердження 2 випливає, що значення $g_n(m)$

$\in V_m$ і $-1 \notin V_m$. Оскільки $h_{n-1}(m) = 1 + g_n(m)$ $(n \geq 1)$, то $h_n(m) \in V'_m$, де

$$V'_m = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_m| < \rho_m\}\,. \tag{18}$$

Звідси маємо, що $h_n(m) \neq 0$, бо $0 \notin V'_m$. Отже, $R_n(m) \neq 0$ $(n \geq 1)$. З формули (12) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(m) = \prod\limits_{j=1}^{m} x_j$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(N) = \prod\limits_{j=1}^{N} x_j$.

Значення ГЛД (8) рівне $F = \left(\prod\limits_{k=1}^{N} x_k\right)^{-1}$. Враховуючи рівності (12), маємо:

$$\begin{aligned}
F_n - F &= \frac{1}{R_n(N)} - \frac{1}{\prod_{j=1}^N x_j} = \frac{\prod_{j=1}^N x_j - \prod_{j=1}^N h_n(j)}{\prod_{j=1}^N x_j \cdot \prod_{j=1}^N h_n(j)} = \\
&= \frac{\prod_{j=1}^N x_j - h_n(1)\prod_{j=2}^N x_j + h_n(1)\prod_{j=2}^N x_j - \prod_{j=1}^N h_n(j)}{\prod_{j=1}^N x_j \cdot \prod_{j=1}^N h_n(j)} = \\
&= \frac{x_1 - h_n(1)}{x_1 \cdot \prod_{j=1}^N h_n(j)} + \frac{\prod_{j=2}^N x_j - \prod_{j=2}^N h_n(j)}{\prod_{j=1}^N x_j \cdot \prod_{j=2}^N h_n(j)} = \ldots = \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{x_j - h_n(j)}{\prod_{k=1}^j x_k \cdot \prod_{k=j}^N h_n(k)}.
\end{aligned}$$

Оскільки $h_n(j) \in V'_j$, то одержимо оцінку знизу:

$$|h_n(j)| \geq |x_j| - \rho_j.$$

У твердженні 2 покладемо $c = x_j$ і визначимо $\rho_j$ такі, що $|x_j - 1| < \rho_j < |x_j|$ $(j = \overline{1,N})$. Із умови $|x_j - 1| - \operatorname{Re} x_j < \dfrac{1}{2}$ $(j = \overline{1,N})$ випливає, що

$$|h_n(j) - x_j| = |g_{n+1}(j) - z_j| \leq K_j \cdot M_j^{n-1},$$

де $K_j = \rho_j(|x_j| + \rho_j)$, $M_j = \max\left\{\left|\dfrac{z}{1+z}\right| : z \in \overline{\mathcal{V}}_j\right\}$, $V_j = \big\{z \in \mathbb{C} : |z - x_j| \leq \rho_j\big\}$.

Покладемо $C_j = \dfrac{\rho_j(|x_j| + \rho_j)}{\prod_{k=1}^{j} |x_k| \cdot \prod_{k=j}^{N} (|x_k| - \rho_k)}$. Одержимо остаточну оцінку швидкості збіжності:

$$|F_n - F| \le \inf_{\rho \in D} \sum_{j=1}^{N} C_j M_j^{n-1}.$$

Оскільки виконуються умови: $|x_j - 1| - \operatorname{Re} x_j < \dfrac{1}{2}$, то $M_j < 1$ ($j = \overline{1, N}$). □

Аналогічна теорема може бути доведена для 1-періодичного дробу (9).

**Теорема 3.** *Нехай виконуються умови теореми* 2, *тоді:*

*1) дріб* (9) *збігається;*

*2) значення ГЛД* (9) *рівне* $F' = \prod_{k=1}^{N} x_k$*;*

*3) якщо виконуються умови:* $|x_j - 1| - \operatorname{Re} x_j < \frac{1}{2}$ *(*$j = \overline{1, N}$*), то справджується оцінка швидкості збіжності:*

$$|F'_n - F'| \le \inf_{\rho \in D} \sum_{j=1}^{N} L_j M_j^{n-1}, \tag{19}$$

*де* $L_j = 2^{N-j-1} \rho_j (|x_j| + \rho_j) \prod_{k=1}^{N} |x_k| / |x_j|$, *а* $D$, $M_j$, $V_j$ *визначаються у теоремі* 2.

***Доведення.*** Пункти 1) та 2) доведені у теоремі 2.

Враховуючи рівності (12), встановимо оцінку швидкості збіжності дробу (9).

$$F'_n - F' = \prod_{j=1}^{N} h_n(j) - \prod_{j=1}^{N} x_j = \prod_{j=1}^{N} h_n(j) - x_1 \prod_{j=2}^{N} h_n(j) + x_1 \prod_{j=2}^{N} h_n(j) -$$
$$- \prod_{j=1}^{N} x_j (h_n(1) - x_1) \prod_{j=2}^{N} h_n(j) + x_1 \Big( \prod_{j=2}^{N} h_n(j) - \prod_{j=2}^{N} x_j + x_2 \prod_{j=3}^{N} h_n(j) -$$
$$- x_2 \prod_{j=3}^{N} h_n(j) \Big) = \ldots = \sum_{k=1}^{N} (h_n(k) - x_k) \prod_{j=1}^{k-1} x_j \cdot \prod_{j=k+1}^{N} h_n(j).$$

Осільки $h_n(j) \in V_j'$, то

$$|h_n(j)| \leq |x_j| + \rho_j < 2|x_j|.$$

Покладаючи $L_j = 2^{N-j-1} K_j \prod_{k=1}^{N} |x_k| / |x_j|$, одержимо остаточну оцінку швидкості збіжності (19). $\square$

## 3 Висновки

Означено 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду. Досліджено область збіжності дробу та встановлена оцінка швидкості збіжності в цій області. Залишається відкритим питання означення та дослідження $k$-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

[1] *Brezinski C.* History of Continued Fractions and Pade Approximants. Springer Series in Computational Mathematics. — Springer-Verlag, 1991. — 551 p.

[2] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. — М.: Мир, 1985. — 414 с.

[3] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Applications. — Amsterdam: North-Holland, 1992. — 606 p.

[4] *Perron O.* Die Lehre von der Kettenbrüchen. — Stuttgart: Teubner, 1957. — 524 p.

[5] *Wall H.S.* Analytic Theory of Continued Fractions. — New York: Van Nostrand, 1948. — 433 p.

[6] *Thron W.J., Waadeland H.* Modifications of continued fractions // Lecture Notes in Mathematics. Analytic Theory of Continued fractions. — 1981. — **932**. — P. 38–66.

[7] *Jacobsen L., Thron W.J.* Oval Convergance Regions and Circular Limit Regins for Continued Fractions $\mathrm{K}(a_n/1)$ // Lecture Notes in

Mathematics. Analityc Theory of Continued Fractions II. — 1986. — **1199**. — P. 90–126.

[8] *Боднар Д.И.* Ветвящиеся цепные дроби. — К.: Наукова думка, 1986. — 176 с.

[9] *Jones W.B., Snell R.I.* Trunction Error Bounds for Continued fractions // SIAM J. Numerical Analysis. — 1969. — **6**, №2. — P. 210–221.

## ON CONVERGENCE OF 1-PERIODIC BRANCHED CONTINUED FRACTION OF SPECIAL FORM

*Dmytro BODNAR, Maria BUBNYAK*

Ternopil National Economic University,
11 L'vivs'ka Str., Ternopil 46020, Ukraine

e-mail: *dmytro_bodnar@hotmail.com, maria.bubnyak@gmail.com*

It is investigated a region of convergence of 1-periodic branched continued fraction of special form. Speed of convergence in the same region is received.