Математичний Вісник
Наукового товариства
імені Шевченка
2013. — Т.10

Mathematical Bulletin
of the Shevchenko
Scientific Society
2013. — V.10

ПРО ІСНУВАННЯ НЕСКІНЧЕННО МАЛИХ КОНФОРМНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПОВЕРХОНЬ

Юлія Федченко

Одеська національна академія харчових технологій, вул. Канатна 112, Одеса 65039

Юлія Федченко. *Про існування нескінченно малих конформних деформацій поверхонь* // Мат. вісник НТШ. — 2013. — Т.10. — С. 115–121.

Для нескінченно малих конформних деформацій знайдено нову форму основних рівнянь, яку представлено через тензорні поля похідної вектора зміщення. Виділено ознаки тривіальних деформацій. Досліджено нескінченно малі конформні деформації поверхонь обертання.

Julia Fedchenko, *On the existence of infinitesimal conformal deformations of surfaces*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **10** (2013), 115–121.

A new form of basic equations for infinitesimal conformal deformations is found. This new form involves tensor fields of derivative of the displacement vector. Conditions for trivial deformations as well as infinitesimal conformal deformations of revolving surfaces are studied.

---

1. Вступ

Розглянемо поверхню S класу C^3 в евклідовому просторі E_3 з векторно-параметричним рівнянням $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$ та її деформацію S_ε:

$$\overline{r}_\varepsilon = \overline{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \overline{U}(x^1, x^2),$$

де

$$\overline{U}(x^1, x^2) = u_i \overline{r}^i + \overset{\circ}{u}\, \overline{n} \tag{1}$$

– вектор зміщення, ε – малий параметр, а u_i, $\overset{\circ}{u}$ – відповідно тангенціальні та нормальна компоненти вектора зміщення.

Всі індекси тут і надалі незалежно набувають значень 1,2, якщо не вказано щось інше.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 53A05, 53A45, 53B21 *УДК:* 514.76
Ключові слова і фрази: нескінченно мала конформна деформація, поверхня обертання, вектор зміщення
E-mail: Fedchenko_Julia@ukr.net

Означення 1. *Нескінченно малу деформацію поверхні S називатимемо нескінченно малою конформною деформацією, якщо коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні S пропорційні коефіцієнтам першої квадратичної форми деформованої поверхні S_ε з точністю до нескінченно малих величин вище першого порядку відносно параметру деформації ε.*

Система основних рівнянь нескінченно малих конформних деформацій має наступний вигляд [1]:

$$\nabla_j u_i + \nabla_i u_j - 2 \overset{\circ}{u} b_{ij} = 2\varphi g_{ij}, \tag{2}$$

де b_{ij} – коефіцієнти другої квадратичної форми, $\varphi(x^1, x^2)$ – деяка функція, яку називатимемо функцією конформності.

Рівняння (2), з урахуванням виразу для варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми [2] $\delta g_{ij} = \nabla_j u_i + \nabla_i u_j - 2 \overset{\circ}{u} b_{ij}$, набувають вигляду

$$\delta g_{ij} = 2\varphi g_{ij}. \tag{3}$$

Є.Д. Фесенко в [1] проводить дослідження основних рівнянь (2) та показує, що замкнені поверхні додатньої гаусової кривини (за деяких обмежень) допускають нетривіальні нескінченно малі конформні деформації; для сфери знайдено вектор зміщення в явному вигляді.

У даній роботі основні рівняння нескінченно малих конформних деформацій представлено через тензорні поля похідної вектора зміщення (теорема 1). Знайдено тензорні поля в явному вигляді (теорема 2), виділено тривіальний випадок (теорема 3). Показано, що поверхні обертання допускають нетривіальні нескінченно малі конформні деформації (теорема 4).

2. Нова форма основних рівнянь нескінченно малої конформної деформації поверхонь

Продиференціюємо (1) коваріантно по x^i. Тоді на основі дериваційних рівнянь поверхні

$$\nabla_j \overline{r}_i = b_{ij}\overline{n}, \quad \overline{n}_i = -b_i^\alpha \overline{r}_\alpha$$

матимемо, що

$$\overline{U}_i = T_i^\alpha \overline{r}_\alpha + T_i \overline{n}, \tag{4}$$

де

$$T_i^k = \nabla_i u^k - b_i^k \overset{\circ}{u}, \tag{5}$$

$$T_i = \partial_i \overset{\circ}{u} + b_{ik} u^k. \tag{6}$$

Тут $b_i^j = b_{i\alpha} g^{\alpha j}$, $u^k = u_\alpha g^{\alpha k}$, ∇ – коваріантна похідна на базі метричного тензора g_{ij}.

Рівності (4) можна розглядати як систему двох диференціальних рівнянь відносно однієї функції $\overline{U}$. Умови інтегровності для (4) мають наступний вигляд:

$$\nabla_j T_i^k - \nabla_i T_j^k = b_j^k T_i - b_i^k T_j, \tag{7}$$

$$T_i^k b_{kj} - T_j^k b_{ki} = \nabla_i T_j - \nabla_j T_i. \tag{8}$$

Через тензорні поля T_i^k варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми набувають такого вигляду:

$$\delta g_{ij} = T_i^\alpha g_{\alpha j} + T_j^\alpha g_{\alpha i}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Для того, щоб поверхня S класу C^3 допускала нескінченно малу конформну деформацію, необхідно і достатньо, щоб тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α та функція конформності φ, що представляють похідну вектора зміщення $\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}$, задовольняли систему наступних рівнянь:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla_\alpha \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta &=& \varphi_\alpha c^{\alpha\beta}; \\ b_{\alpha\beta}\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha &=& 0; \\ \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}) &=& 0; \\ \varphi_i &=& \partial_i\varphi. \end{array}\right. \tag{10}$$

Доведення. Необхідність. Нехай поверхня S допускає нескінченно малу конформну деформацію. Тоді тензорні поля T_i^k, T_i, що представляють похідну вектора зміщення $\overline{U}_i$ (4), та функція конформності φ задовольняють систему наступних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla_j T_i^k - \nabla_i T_j^k &=& b_j^k T_i - b_i^k T_j; \\ T_i^k b_{kj} - T_j^k b_{ki} &=& \nabla_i T_j - \nabla_j T_i; \\ T_i^\alpha g_{\alpha j} + T_j^\alpha g_{\alpha i} &=& 2\varphi g_{ij}; \\ \varphi_i &=& \partial_i\varphi. \end{array}\right. \tag{11}$$

Введемо до розгляду двічі контраваріантний тензор T^{ij} і контраваріантний вектор T^i за формулами

$$T^{ij} = c^{\alpha i}T_\alpha^j, T^i = c^{\alpha i}T_\alpha. \tag{12}$$

Тоді

$$T_i^\beta = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}, T_i = c_{i\alpha}T^\alpha, \tag{13}$$

c_{ij} – дискримінантний тензор, $c^{ij} = g^{i\alpha}g^{j\beta}c_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ – елементи матриці, оберненої до $\|g_{\alpha\beta}\|$.

З урахуванням (13), система (11) набуває наступного вигляду

$$\left\{\begin{array}{rcl} \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta &=& 0; \\ b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha &=& 0; \\ T^{\alpha\beta}(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}) &=& 2\varphi g_{ij}; \\ \varphi_i &=& \partial_i\varphi. \end{array}\right. \tag{14}$$

Подамо $T^{\alpha\beta}$ у вигляді суми симетричної та кососиметричної частин:

$$T^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} + \mu c^{\alpha\beta}, \tag{15}$$

де $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{T}{}^{\beta\alpha}$, μ – деяка функція.

З рівняння $(14)_3$, на основі (15), матимемо:

$$\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}) - 2\mu g_{ij} = 2\varphi g_{ij}. \tag{16}$$

Згорнемо останнє рівняння з g^{ij} і отримаємо, що $\mu = -\varphi$.

Таким чином, $(14)_3$ матиме вигляд

$$\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}) = 0, \tag{17}$$

а представлення тензорного поля

$$T^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}. \tag{18}$$

Тоді $(14)_1$, $(14)_2$ з урахуванням (18) набувають наступного вигляду:

$$\nabla_\alpha \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - T^\alpha b^\beta_\alpha = \varphi_\alpha c^{\alpha\beta}; \quad b_{\alpha\beta} \overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha = 0.$$

Похідна вектора зміщення матиме вигляд:

$$\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}. \tag{19}$$

Достатність. Нехай на поверхні S існують тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α та деяка функція φ, що задовольняють рівняння системи (10).

Покладемо $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} + \varphi c^{\alpha\beta}$. Тоді з (10), на основі останньої рівності, матимемо (14). З урахуванням (12), після простих перетворень матимемо (11). Таким чином, поверхня допускає нескінченно малу конформну деформацію.

□

3. Представлення тензорних полів $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α в явному вигляді.

Теорема 2. *Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні S $(K \neq 0)$ класу C^3 була конформною, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції t, φ, які задовольняють рівняння*

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) - \nabla_s(\varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta) + 2Ht = 0. \tag{20}$$

Тоді тензорні поля похідної вектора зміщення (19)мають вигляд

$$\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}, \tag{21}$$

$$T^s = t_\alpha d^{s\alpha} - \varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta. \tag{22}$$

Тут $d^s_\beta = d^{s\alpha}g_{\alpha\beta}$, $d^{s\alpha} = \frac{1}{K}c^{si}c^{\alpha j}b_{ij}$.

Доведення. Необхідність. Нехай деформація поверхні S є конформною деформацією з вектором зміщення $\overline{U}$. Тоді тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α, що є компонентами $\overline{U}_i$, та функція конформності φ задовольняють рівняння системи (10). Покажемо, що $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α мають представлення (21), (22).

Проведемо дослідження системи (10). З рівняння $(10)_3$ маємо [2], що $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}$, де t – деяка функція. Після підстановки $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$ у $(10)_1$ та множення на d^s_β отримаємо $T^s = t_\alpha d^{s\alpha} - \varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta$.

Оскільки тензорні поля мають задовольняти $(10)_2$, тоді матимемо умову (20) на функції t, φ.

Достатність. Нехай на поверхні S існують деякі функції t, φ, які задовольняють рівняння (20). Тоді візьмемо тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^{α} у вигляді (21), (22) і покажемо, що за даного представлення система (10) задовольняється.

Дійсно, підстановкою (21), (22) в (10) переконуємося, що система (10) виконується в результаті використання (20). Тобто, на поверхні існують тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^{α}, що задовольняють (10). Тоді, на основі теореми 1, існує вектор зміщення конформної деформації поверхні. □

4. Тривіальні нескінченно малі конформні деформації поверхонь

Розглянемо, коли нескінченно мала конформна деформація буде тривіальною.

Нескінченно малі конформні деформації, для яких $\varphi = c = const$ називають тривіальними нескінченно малими конформними деформаціями.

З огляду на (3) бачимо, що для тривіальних конформних деформацій $\delta g_{ij} = 2cg_{ij}$. Таким чином, тривіальні нескінченно малі конформні деформації є нескінченно малими гомотетіями. У випадку $c = 0$ варіація метричного тензора $\delta g_{ij} = 0$ і деформація є згинанням.

Теорема 3. *Для того, щоб деформація поверхні S $(K \neq 0)$ класу C^3 була тривіальною нескінченно малою конформною деформацією, необхідно і достатньо, щоб існували стала конформна функція φ та характеристична функція Вейнгартена t:*

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) + 2Ht = 0. \tag{23}$$

Тоді тензорні поля мають представлення

$$\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}, T^s = t_\alpha d^{s\alpha}. \tag{24}$$

Доведення. Необхідність. Нехай поверхня допускає тривіальну нескінченно малу конформну деформацію. Тоді на таких поверхнях, в силу конформності, тензорні поля $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^{α} мають представлення (21), (22). Для тривіальних конформних деформацій функція конформності $\varphi = const$ і представлення (21), (22) матимуть вигляд (24). Підставимо значення φ в (20) і отримаємо рівняння на функцію t (23), яке є характеристичним рівнянням Вейнгартена.

Достатність. Нехай на поверхні S існують стала функція φ та характеристична функція Вейнгартена t. Дані функції задовольняють рівняння (20). Отже, за теоремою 2, існує вектор конформної деформації. Оскільки $\varphi = const$, то нескінченно мала конформна деформація є тривіальною. □

5. Нескінченно малі конформні деформації поверхонь обертання

Проведемо дослідження рівняння (20). Для цього подамо дане рівняння у розгорнутому вигляді (у лініях кривини):

$$\nabla_1 t_1 d^{11} + \nabla_2 t_2 d^{22} + t_1(\nabla_1 d^{11} + \nabla_2 d^{21}) + t_2(\nabla_1 d^{12} + \nabla_2 d^{22}) - \nabla_2 \varphi_1 c^{12} d_2^2 -$$

$$-\nabla_1\varphi_2 c^{21} d_1^1 - \varphi_1 c^{12}(\nabla_1 d_2^1 + \nabla_2 d_2^2) - \varphi_2 c^{21}(\nabla_1 d_1^1 + \nabla_2 d_1^2) + 2Ht = 0.$$

Нехай $t = 0$. Тоді останнє рівняння матиме вигляд

$$\nabla_2\varphi_1(d_1^1 - d_2^2) - \varphi_1(\nabla_1 d_2^1 + \nabla_2 d_2^2) + \varphi_2(\nabla_1 d_1^1 + \nabla_2 d_1^2) = 0. \tag{25}$$

Теорема 4. *Поверхня обертання* $\overline{r} = (ucosv, usinv, f(u))$ $(K \neq 0,\ d_1^1 - d_2^2 \neq 0)$ *допускає нетривіальну нескінченно малу конформну деформацію при* $t = 0$*. Тензори деформації* $\mathring{T}^{\alpha\beta}$, T^s *та функція* φ *виражаються в явному вигляді за формулами*

$$\mathring{T}^{11} = \mathring{T}^{12} = \mathring{T}^{22} = 0, \tag{26}$$

$$T^1 = K'(v)\frac{1+f'^2}{uf''}e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f'f''' - f'^3 f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du}, \tag{27}$$

$$T^2 = -K(v)\frac{(3f'f''^2 - f''' - f'^2 f''')}{(f'+f'^3-uf'')f''}e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f'f''' - f'^3 f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du}, \tag{28}$$

$$\varphi = K(v)e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f'f''' - f'^3 f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du},$$

$K(v)$ *– довільна функція.*

Доведення. Дослідимо рівняння (25) для поверхні обертання $\overline{r} = (u\cos v, u\sin v, f(u))$. Для такої поверхні

$$g_{11} = 1 + f'^2,\ \ g_{12} = 0,\ \ g_{22} = u^2,$$

$$b_{11} = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}},\ \ b_{12} = 0,\ \ b_{22} = \frac{uf'}{\sqrt{1+f'^2}},$$

$$c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{u\sqrt{1+f'^2}},\ \ c^{11} = c^{22} = 0,$$

$$d_1^1 = \frac{(1+f'^2)^{3/2}}{f''},\ \ d_2^1 = d_1^2 = 0,\ \ d_2^2 = \frac{u\sqrt{1+f'^2}}{f'},$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{f'f''}{1+f'^2},\ \ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u},\ \ \Gamma_{22}^1 = -\frac{u}{1+f'^2},\ \ \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Оскільки

$$\nabla_2\varphi_1 = \partial_2\varphi_1 - \Gamma_{12}^2\varphi_2,\ \ \nabla_1 d_2^1 + \nabla_2 d_2^2 = 0,\ \ \nabla_1 d_1^1 + \nabla_2 d_1^2 = \partial_1 d_1^1 + \Gamma_{12}^2(d_1^1 - d_2^2),$$

то (25) матиме вигляд

$$\partial_2\varphi_1(d_1^1 - d_2^2) + \varphi_2\partial_1 d_1^1 = 0.$$

Нехай $d_1^1 - d_2^2 \neq 0$. Після інтегрування знаходимо φ_2:

$$\varphi_2 = \tilde{K}(v)e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f'f''' - f'^3 f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du}.$$

Тоді

$$\varphi = K(v)e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f'f''' - f'^3 f'''}{(f'+f'^3-uf'')f''}du},$$

де $K(v) = \int \tilde{K}(v)dv$ – довільна функція.

Таким чином, за теоремою 2 поверхні обертання допускають нескінченно малі конформні деформації, які не є тривіальними (теорема 3). Тензорні поля похідної вектора зміщення $\overset{\circ}{T}{}^{11}$, $\overset{\circ}{T}{}^{12}$, $\overset{\circ}{T}{}^{22}$, T^1, T^2 мають вигляд (26), (27), (28). $\square$

Зокрема, у випадку катеноїда $f(u) = aln(u + \sqrt{u^2 - a^2}) + alnc$, де a, c – сталі:

$$\varphi = \frac{K(v)}{u}, \quad \overset{\circ}{T}{}^{11} = \overset{\circ}{T}{}^{12} = \overset{\circ}{T}{}^{22} = 0, \quad T^1 = -K'(v)\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{au}, \quad T^2 = -K(v)\frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{au^2}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Е.Д. Фесенко, *Бесконечно малые конформные деформации замкнутых поверхностей положительной гауссовой кривизны*, Изв. вузов, Матем. №3 (1969), 72–77.

2. Л.Л. Безкоровайна, *Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки*, Одеса: Астропринт, (1999), 168 с.

Надійшло 15.11.2012

Після переробки 08.05.2013