Математичний Вісник
Наукового Товариства
ім. Тараса Шевченка
2015. — Т.12

Mathematical Bulletin
of Taras Shevchenko
Scientific Society
2015. — V.12

НАПІВГРУПА МОНОТОННИХ КОСКІНЧЕННИХ ЧАСТКОВИХ ГОМЕОМОРФІЗМІВ ДІЙСНОЇ ПРЯМОЇ

Олег Гутік, Катерина Мельник

Присвячено 60-річчю від дня народження Ігора Йосиповича Гурана

Механіко-математичний факультет, Львівський національний університет ім. Івана Франка, Університетська 1, Львів, 79000, Україна

О. Гутік, К. Мельник. *Напівгрупа монотонних коскінченних часткових гомеоморфізмів дійсної прямої* // Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка. — 2015. — Т.12. — С. 24–40.

Досліджується структура напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ усіх монотонних коскінченних часткових гомеоморфізмів дійсної прямої $\mathbb{R}$. Доведено, що інверсна напівгрупа $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ є факторизовною та F-інверсною. Описано структуру в'язки напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$, її двобічні ідеали, максимальні підгрупи та відношення Гріна на ній. Доведено, що фактор-напівгрупа $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за найменшою груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ усіх порядкових ізоморфізмів прямої $\mathbb{R}$, а також, що напівгрупа $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R})$ вільної напівгратки з одиницею $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ та групи $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$.

O. Gutik, K. Melnyk, *The semigroup of monotone cofinite partial homeomorphisms of the real line*, Math. Bull. T. Shevchenko Sci. Soc. **12** (2015), 24–40.

In the paper we investigate the semigroup of monotone co-finite partial homeomorphisms of the space of the real line $\mathbb{R}$. We prove that the inverse semigroup $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ is factorizable and F-inverse. We describe the structure of the band of the semigroup $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$, its two-sided ideals, maximal subgroups and Green's relations. We prove that the quotient semigroup $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ of $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ by the maximal group congruence $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ is isomorphic to the group of all order isomorphisms of the real line $\mathbb{R}$, and show that the semigroup $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ is isomorphic to a semidirect product $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R})$ of the free semilattice with unit $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ and the group $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 20M15, 20M50, 18B40 *УДК:* 512.534

Ключові слова та фрази: Semigroup of partial homeomorphisms, group of homeomorphisms, inverse semigroup, minimum group congruence, semidirect product.

E-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, ovgutik@yahoo.com, chepil.kate@gmail.com

1. Термінологія та означення

В даній праці ми користуватимемося термінологією з [21, 22, 32].

Надалі у тексті потужність множини A позначатимемо через $|A|$, перший нескінченний кардинал через ω, і множину натуральних чисел — через $\mathbb{N}$. Також, будемо вважати, що на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ визначена звичайна (евклідова) топологія.

Якщо визначене часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ з множини X у множину Y, то через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ будемо позначати його *область визначення* та *область значень*, відповідно, а через $(x)\alpha$ і $(A)\alpha$ – образи елемента $x \in \operatorname{dom}\alpha$ та підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ при частковому відображенні α, відповідно. Часткове відображення $\alpha\colon X \rightharpoonup Y$ називається *коскінченним*, якщо множини $X \setminus \operatorname{dom}\alpha$ та $Y \setminus \operatorname{ran}\alpha$ є скінченними.

Часткове відображення $\alpha\colon \mathbb{R} \rightharpoonup \mathbb{R}$ називається *частковим гомеоморфізмом* простору $\mathbb{R}$, якщо його звуження $\alpha|_{\operatorname{dom}\alpha}\colon \operatorname{dom}\alpha \to \operatorname{ran}\alpha$ є гомеоморфізмом.

Рефлексивне, антисиметричне та транзитивне відношення на множині X називається *частковим порядком* на X. Множина X із заданим на ній частковим порядком $\leqslant$ називається *частково впорядкованою множиною* і позначається $(X, \leqslant)$.

Елемент x частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *максимальним* (*мінімальним*) в $(X, \leqslant)$, якщо з відношення $x \leqslant y$ ($y \leqslant x$) в $(X, \leqslant)$ випливає рівність $x = y$;
- *найбільшим* (*найменшим*) в $(X, \leqslant)$, якщо $y \leqslant x$ ($x \leqslant y$) для всіх $y \in X$.

У випадку, якщо $(X, \leqslant)$ — частково впорядкована множина і $x \leqslant y$, для деяких $x, y \in X$, то будемо говорити, що елементи x та y — *порівняльні* в $(X, \leqslant)$. Якщо ж для елементів $x \leqslant y$ не виконується жодне з відношень $x \leqslant y$ або $y \leqslant x$, то говоритимемо, що елементи x та y є непорівняльними в частково впорядкованій множині $(X, \leqslant)$. Частковий порядок $\leqslant$ на X називається *лінійним*, якщо довільні два елементи в $(X, \leqslant)$ є порівняльними. Підмножина A частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ називається:

- *ланцюгом*, якщо відношення $\leqslant$ індукує на A лінійний порядок;
- *антиланцюгом*, якщо довільні два різні елементи в A є непорівняльними стосовно індукованого з $(X, \leqslant)$ часткового порядку.

З леми Цорна випливає, що кожен ланцюг (антиланцюг) A частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ міститься в максимальному ланцюзі (антиланцюзі) B, стосовно відношення включення підмножин, а отже кожен ланцюг (антиланцюг) в

$(X, \leqslant)$ можна доповнити (необов'язково єдиним чином) до максимального ланцюга (антиланцюга). Лінійно впорядкована множина, яка є порядково ізоморфна множині від'ємних цілих чисел $\{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$ зі звичайним порядком $\leqslant$ називається ω-ланцюгом.

Відображення $h \colon X \to Y$ з частково впорядкованої множини $(X, \leqslant)$ в частково впорядковану множину $(Y, \leqslant)$ називається *монотонним*, якщо з $x \leqslant y$ випливає $(x)h \leqslant (y)h$.

Якщо S — напівгрупа, то її підмножина ідемпотентів позначається через $E(S)$. Напівгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент $x^{-1} \in S$ такий, що $xx^{-1}x = x$ та $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$. В інверсній напівгрупі S вище означений елемент x^{-1} називається *інверсним до* x. *В'язка* — це напівгрупа ідемпотентів, а *напівгратка* — це комутативна в'язка. Надалі через $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ позначатимемо *вільну напівгратку* з одиницею над множиною дійсних чисел, тобто множину усіх скінченних (включно з порожньою) підмножин множини $\mathbb{R}$ з операцією об'єднання.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{K}$ на напівгрупі S називається *конгруенцією*, якщо для елементів a і b напівгрупи S з того, що виконується умова $(a, b) \in \mathfrak{K}$ випливає, що $(ca, cb), (ad, bd) \in \mathfrak{K}$, для всіх $c, d \in S$. Відношення $(a, b) \in \mathfrak{K}$ ми також будемо записувати $a\mathfrak{K}b$, і в цьому випадку будемо говорити, що *елементи* a *і* b *є* $\mathfrak{K}$*-еквівалентними*. На кожній напівгрупі S існують наступні конгруенції: *універсальна* $\mathfrak{U}_S = S \times S$ та *одинична* (*діагональ*) $\Delta_S = \{(s, s) \colon s \in S\}$. Такі конгруенції називаються *тривіальними*. Кожен двобічний ідеал I напівгрупи S породжує на ній конгруенцію Ріса: $\mathfrak{K}_I = (I \times I) \cup \Delta_S$.

Якщо S — напівгрупа, то на $E(S)$ визначено частковий порядок:

$$e \leqslant f \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad ef = fe = e.$$

Так означений частковий порядок на $E(S)$ називається *природним*.

Означимо відношення $\leqslant$ на інверсній напівгрупі S наступним чином:

$$s \leqslant t \quad \text{тоді і лише тоді, коли } s = te \text{ для деякого ідемпотента } e \in S.$$

Так означений частковий порядок називається *природним частковим порядком* на інверсній напівгрупі S [26]. Очевидно, що звуження природного часткового порядку $\leqslant$ з інверсної напівгрупи S на її в'язку $E(S)$ збігається з природним частковим порядком на $E(S)$. Інверсна напівгрупа S називається *факторизовною*, якщо для кожного елемента $s \in S$ існує елемент g групи одиниць напівгрупи S такий, що $s \leqslant g$ стосовно природного часткового порядку $\leqslant$ на S.

Надалі, через $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ ми позначатимемо множину усіх монотонних коскінченних часткових гомеоморфізмів топологічного простору $\mathbb{R}$. Зауважимо, що ця множина збігається з множиною часткових порядкових ізоморфізмів прямої $\mathbb{R}$, наділеної природним лінійним порядком.

Оскільки для довільного елемента $\alpha \in \mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ і для довільної підмножини $A \subseteq \operatorname{dom}\alpha$ звуження $\alpha|_{\operatorname{dom}\alpha\setminus A}\colon \operatorname{dom}\alpha \setminus A \to \operatorname{ran}\alpha \setminus (A)\alpha$ є частковим гомеоморфізмом простору $\mathbb{R}$, обернене часткове відображення α^{-1} до α існує, і $\alpha^{-1} \in \mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, то виконується наступне твердження.

Твердження 1.1. *Множина $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ з операцією композиція часткових відображень є інверсним підмоноїдом симетричного інверсного моноїда $\mathscr{I}(\mathbb{R})$ над множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$.*

Надалі одиницю та групу одиниць напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ будемо позначати через $\mathbb{1}$ та $H(\mathbb{1})$, відповідно. З означення напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ випливає, що її група одиниць $H(\mathbb{1})$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ усіх гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію (монотонних гомеоморфізмів) простору $\mathbb{R}$, причому група $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ є простою (див. [18, Наслідок 1]).

2. Мотивація досліджень і коротка історична довідка

Дослідження автоморфізмів і груп автоморфізмів многовидів малого виміру формують широку область сучасної математики, яка дуже швидко розвивається та розташована на стику топології, алгебри та теорії динамічних систем. Ця область охоплює вивчення груп гомеоморфізмів прямої та кола, теорію автоморфізмів поверхонь і теорію груп класів відображень, найважливішим частковим випадком яких є групи кос Артіна, — в силу чого вказана область тісно пов'язана практично з усіма розділами маловимірної топології (у першу чергу — з теорією вузлів і зачеплень), з диференціальною та гіперболічною геометрією, теорією ламинацій та теорією Тайхмюллєра, з комбінаторною та геометричною теорією груп, теорією впорядкованих груп, і навіть з криптографією.

Автоморфізмам і групам автоморфізмів многовидів розмірності 1 і 2 присвячені фундаментальні праці Клейна, Фріке, Пуанкаре, Гурвіца, Дена, Данжуа, Александера, Нільсена, Артіна, Керек'ярто, А.А. Маркова. Пізніше вказаною проблематикою займалися В. Магнус, В. Бурау, Дж. Бірман, Х. Цішанг, В. І. Арнольд, Г. А. Маргуліс, У. Тьорстон, О. Я. Віро, Ф. Гарсайд, В. Джонс, Е. Гіз і багато інших. В останнє десятиліття в цій області отримані такі важливі результати, як розв'язок С. Керкхофом проблеми Нільсена про реалізацію, відкриття порядку Деорнуа, доведення лінійності груп кос (Д. Краммер, С. Бігелоу) та інші. Розв'язок схожого типу проблем потребує різноманітної техніки, а нові досягнення теорії (груп) автоморфізмів застосовуються (і, як правило, мають суттєві наслідки) в суміжних областях математики. Так, зокрема сучасні дослідження груп гомеоморфізмів прямої викладено в оглядах Бекляряна [1, 2] та її застосування в теорії динамічних систем у монографії [25].

Основні результати теорії напівгруп перетворень отримані протягом 50-70-х років минулого століття викладені в оглядах Меггіла [27] та Глускіна, Шайна, Шнепермана та Ярокера [23]. У цьому напрямку працювали такі відомі математики, як Гауі, Гельфанд, Глускін, Грін, Енгелькінг, Кліффорд, Ляпін, Меггіл, Престон, Саббах, Серпінський, Сушкевич, Улам, Шайн, Шнеперман, Шутов, Ярокер. На думку Меггіла (див. [27]) теорія напівгруп неперервних перетворень топологічних просторів бере свій початок з робіт Глускіна [3, 4, 5, 6, 7, 8]. В основному ці праці Глускіна присвячені описанню структури напівгрупи $S(I)$ неперервних перетворень одиничного відрізка I, а також описанню піднапівгруп напівгрупи $S(X)$ неперервних перетворень топологічного простору X. Напівгрупа $S(I)$ неперервних перетворень одиничного відрізка також досліджувалась Шутовим в працях [16, 17], де він описав максимальну власну конгруенцію на $S(I)$.

Напівгрупа $S(I)$ також досліджувалась в працях [9, 11, 12, 13, 15, 19, 24, 29, 33, 34], зокрема в роботах [3, 9] були описані конгруенц-прості піднапівгрупи в $S(I)$. Шнеперман [14] та Уарндоф [35] показали, що одиничний відрізок визначається напівгрупою неперервних перетворень. Інші класи топологічних просторів, що визначаються своїми напівгрупами неперервних перетворень були описані Уарндофом в [35] і Росіцким в [33, 34]. Зокрема такими є: локально зв'язні сепарабельні метричні континууми, локально евклідові гаусдорфові простори, нульвимірні метричні простори, CW-комплекси та інші. Також О'Рейлі в праці [31] довела, що кожен гаусдорфовий простір X визначається напівгрупою усіх компактних відношень на X.

Зауважимо, що група гомеоморфізмів дійсної прямої ізоморфна групі гомеоморфізмів одиничного відрізка (інтервалу). Таким чином виникає задача: *описати структуру напівгрупи часткових гомеоморфізмів топологічного простору* X, а в частковому випадку одиничного відрізка, чи дійсної прямої. Однією з останніх робіт з цієї тематики є стаття Чучмана [20], в якій описано структуру напівгрупи замкнених зв'язних часткових гомеоморфізмів одиничного відрізка з однією нерухомою точкою.

У даній праці досліджується структура напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathrm{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ усіх монотонних коскінченних часткових гомеоморфізмів дійсної прямої $\mathbb{R}$. Доведено, що інверсна напівгрупа $\mathscr{PH}_{\mathrm{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ є факторизовною та F-інверсною. Описано структуру в'язки напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathrm{cf}}^{+}(\mathbb{R})$, її двобічні ідеали, максимальні підгрупи та відношення Гріна на ній. Доведено, що фактор-напівгрупа $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})/\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ за найменшою груповою конгруенцією $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ усіх гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію простору $\mathbb{R}$, а також, що напівгрупа $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ ізоморфна напівпрямому добутку $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R})$ вільної напівгратки з одиницею $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ з групою $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$.

3. Алгебраїчні властивості напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$

Наступне твердження описує в'язку напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

Твердження 3.1. (i) *Елемент ε напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R})$ є ідемпотентом тоді і лише тоді, коли ε – тотожне відображення коскінченної підмножини в $\mathbb{R}$.*

(ii) *В'язка $E(\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R}))$ ізоморфна вільній напівгратці з одиницею $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ стосовно відображення $\mathfrak{h}\colon E(\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R})) \to (\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$, означеного за формулою $(\varepsilon)\mathfrak{h} = \mathbb{R} \setminus dom\,\varepsilon$.*

(iii) *Усі максимальні ланцюги напівгратки $E(\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R}))$ є ω-ланцюгами.*

(iv) *Кожен максимальний антиланцюг напівгратки $E(\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R}))$, що не містить її одиниці має потужність континуума.*

Доведення. Твердження (i) випливає з твердження 1.1. Твердження (ii) є очевидним, і з нього випливають (iii) і (iv). □

Оскільки гомеоморфізми зберігають кількість компонент зв'язності, то виконується наступне твердження.

Твердження 3.2. *Якщо $\alpha \in \mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R})$, то $|\mathbb{R} \setminus dom\alpha| = |\mathbb{R} \setminus ran\alpha|$. Більше того, якщо α — частковий монотонний гомеоморфізм простору $\mathbb{R}$ такий, що $|\mathbb{R} \setminus dom\alpha| = |\mathbb{R} \setminus ran\alpha| < \omega$, то $\alpha \in \mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R})$.*

Наступне твердження випливає з означення напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

Твердження 3.3. *Для довільних елементів α і β напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R})$ виконується умова $|\mathbb{R} \setminus dom\,(\alpha\beta)| \leqslant |\mathbb{R} \setminus dom\alpha| + |\mathbb{R} \setminus dom\beta|$.*

Лема 3.4. *Нехай n — довільне невід'ємне ціле число. Тоді для довільних елементів α і β напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R})$ таких, що $|\mathbb{R} \setminus dom\alpha| = |\mathbb{R} \setminus dom\beta| = n$ існують елементи γ і δ в $\mathscr{PH}^{+}_{cf}(\mathbb{R})$ такі, що $\alpha = \gamma \cdot \beta \cdot \delta$ і $|\mathbb{R} \setminus dom\gamma| = |\mathbb{R} \setminus dom\delta| = n$.*

Доведення. Нехай α і β — елементи напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $|\mathbb{R} \setminus \operatorname{dom}\alpha| = |\mathbb{R} \setminus \operatorname{dom}\beta| = n$. У випадку $n = 0$ маємо, що α і β — елементи групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, а отже існують елементи $\gamma, \delta \in \mathscr{H}^{+}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $\alpha = \gamma \cdot \beta \cdot \delta$ і $|\mathbb{R} \setminus \operatorname{dom}\gamma| = |\mathbb{R} \setminus \operatorname{dom}\delta| = 0$. Тому, надалі будемо вважати, що $n > 0$. Нехай $\mathbb{R} \setminus \operatorname{dom}\alpha = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і $\mathbb{R} \setminus \operatorname{dom}\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$, причому $a_1 < \ldots < a_n$ і $b_1 < \ldots < b_n$. Через η_0 позначимо довільний гомеоморфізм інтервала $(-\infty, a_1)$ на інтервал $(-\infty, b_1)$, через η_n позначимо довільний гомеоморфізм інтервала $(a_n, +\infty)$ на інтервал $(b_n, +\infty)$, і для довільного натурального числа $i = 1, \ldots, n-1$ — через η_i позначимо довільний гомеоморфізм інтервала (a_i, a_{i+1}) на інтервал (b_i, b_{i+1}). Такі гомеоморфізми (навіть як лінійні відображення) існують, оскільки кожні такі два інтервали є попарно гомеоморфними [22]. Покладемо $\eta = \eta_0 \cup \eta_1 \cup \cdots \cup \eta_n$. Тоді, очевидно, що $\eta \in \mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, $\alpha\alpha^{-1} = \eta\eta^{-1}$ і $\eta^{-1}\eta = \beta\beta^{-1}$. Таким чином, отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha\alpha^{-1}\alpha = \eta\eta^{-1}\alpha = (\eta\eta^{-1})(\eta\eta^{-1})\alpha = \\ = \eta(\eta^{-1}\eta)\eta^{-1}\alpha = \eta(\beta\beta^{-1})\eta^{-1}\alpha = \eta\beta(\beta^{-1}\eta^{-1}\alpha). \end{aligned}$$

З побудови гомеоморфізму η випливає, що $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\eta$ і $\operatorname{dom}\beta = \operatorname{ran}\eta$. Звідси отримуємо, що $\operatorname{ran}(\beta^{-1}) = \operatorname{dom}(\eta^{-1}) = \operatorname{dom}\alpha$, а отже $\operatorname{ran}(\beta^{-1}\eta^{-1}\alpha) = \operatorname{ran}\alpha$ і $\operatorname{dom}(\beta^{-1}\eta^{-1}\alpha) = \operatorname{ran}\beta$. Таким чином, елементи $\gamma = \eta$ і $\delta = \beta^{-1}\eta^{-1}\alpha$ — шукані. □

Наступне твердження, що випливає з твердження 3.3 та леми 3.4, описує двобічні ідеали напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

Твердження 3.5. *Для кожного невід'ємного цілого числа n множина*

$$I_n = \{\alpha \in \mathscr{PH}^+_{cf}(\mathbb{R}) \mid |\mathbb{R} \setminus dom\,\alpha| \geqslant n\}$$

є двобічним ідеалом в $\mathscr{PH}^+_{cf}(\mathbb{R})$. Більше того, $I_0 = \mathscr{PH}^+_{cf}(\mathbb{R})$ і для кожного власного двобічного ідеалу I напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{cf}(\mathbb{R})$ існує натуральне число n таке, що ідеали I та I_n є ізоморфними.

Якщо S — напівгрупа, то через $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{H}$ і $\mathscr{J}$ позначаються відношення Гріна на S (див. [21, §2.1]):

$$\begin{array}{ll} a\mathscr{R}b \quad \text{тоді і лише тоді, коли} & aS^1 = bS^1; \\ a\mathscr{L}b \quad \text{тоді і лише тоді, коли} & S^1a = S^1b; \\ \mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L}; & \mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}; \\ a\mathscr{J}b \quad \text{тоді і лише тоді, коли} & S^1aS^1 = S^1bS^1. \end{array}$$

Наступна теорема описує відношення Гріна на напівгрупі $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

Теорема 3.6. *Нехай $\alpha, \beta \in \mathscr{PH}^+_{cf}(\mathbb{R})$. Тоді:*

(i) *$\alpha\mathscr{R}\beta$ тоді і лише тоді, коли $\mathrm{dom}\,\alpha = \mathrm{dom}\,\beta$;*

(ii) *$\alpha\mathscr{L}\beta$ тоді і лише тоді, коли $\mathrm{ran}\,\alpha = \mathrm{ran}\,\beta$;*

(iii) *$\alpha\mathscr{H}\beta$ тоді і лише тоді, коли $\mathrm{dom}\,\alpha = \mathrm{dom}\,\beta$ і $\mathrm{ran}\,\alpha = \mathrm{ran}\,\beta$;*

(iv) *$\alpha\mathscr{D}\beta$ тоді і лише тоді, коли $|\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\alpha| = |\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\beta|$;*

(v) *$\mathscr{J} = \mathscr{D}$ в $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.*

Доведення. (i) Нехай α і β — елементи напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $\alpha\mathscr{R}\beta$. Позаяк $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ — інверсна напівгрупа і $\alpha\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) = \beta\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, то з теореми 1.17 [21] випливає, що

$$\alpha\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) = \alpha\alpha^{-1}\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) \text{ і } \beta\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) = \beta\beta^{-1}\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}),$$

а отже $\alpha\alpha^{-1} = \beta\beta^{-1}$. Таким чином, виконується рівність $\mathrm{dom}\,\alpha = \mathrm{dom}\,\beta$.

Навпаки, нехай α і β — елементи напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $\mathrm{dom}\,\alpha = \mathrm{dom}\,\beta$. Тоді $\alpha\alpha^{-1} = \beta\beta^{-1}$. Позаяк $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ — інверсна напівгрупа, то з теореми 1.17 [21] випливає, що $\alpha\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) = \alpha\alpha^{-1}\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) = \beta\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, а отже виконується рівність $\alpha\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) = \beta\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

Доведення (ii) аналогічне доведенню пункту (i).

Пункт (iii) випливає з (i) та (ii).

(iv) Нехай α і β — елементи напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $\alpha\mathscr{D}\beta$. Тоді існує елемент γ напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такий, що $\alpha\mathscr{R}\gamma$ і $\gamma\mathscr{L}\beta$. За твердженнями (i) та (ii) маємо, що $\mathrm{dom}\,\alpha = \mathrm{dom}\,\gamma$ та $\mathrm{ran}\,\gamma = \mathrm{ran}\,\beta$. Тоді, використавши твердження 3.2, отримуємо

$$|\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\alpha| = |\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\gamma| = |\mathbb{R} \setminus \mathrm{ran}\,\gamma| = |\mathbb{R} \setminus \mathrm{ran}\,\beta| = |\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\beta|.$$

Навпаки, нехай α і β — елементи напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $|\mathbb{R}\setminus\mathrm{dom}\,\alpha| = |\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\beta| = n$, де n — деяке невід'ємне ціле число. У випадку $n = 0$ маємо, що α і β — елементи групи одиниць напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, тобто α і β є гомеоморфізмами простору $\mathbb{R}$, а отже вони є $\mathscr{D}$-еквівалентними, оскільки $\alpha\mathscr{H}\beta$. Тому, надалі будемо вважати, що $n > 0$. Нехай $\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\alpha = \{a_1, \ldots, a_n\}$ і $\mathbb{R} \setminus \mathrm{dom}\,\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$, причому $a_1 < \ldots < a_n$ і $b_1 < \ldots < b_n$. Через γ_0 позначимо довільний гомеоморфізм інтервала $(-\infty, a_1)$ на інтервал $(-\infty, b_1)$, через γ_n позначимо довільний гомеоморфізм інтервала $(a_n, +\infty)$ на інтервал $(b_n, +\infty)$, і для довільного натурального числа $i < n$ — через γ_i позначимо довільний гомеоморфізм інтервала (a_i, a_{i+1}) на інтервал (b_i, b_{i+1}). Такі гомеоморфізми (навіть як лінійні відображення) існують, оскільки кожні такі два інтервали попарно гомеоморфні. Покладемо $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$. Тоді, очевидно, що $\gamma \in \mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, $\alpha\mathscr{R}\gamma$ і $\gamma\mathscr{L}\beta$, а отже $\alpha\mathscr{D}\beta$.

(v) Включення $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ випливає з означень відношень Гріна $\mathscr{D}$ і $\mathscr{J}$. Обернене включення випливає з пункту (iv), леми 3.4 та твердження 3.5. $\square$

Лема 3.7. *Для довільного елемента* α *напівгрупи* $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ *існує єдиний елемент* γ_α *групи одиниць* $H(1)$ *такий, що* $\alpha = \alpha\alpha^{-1}\gamma_\alpha = \gamma_\alpha\alpha^{-1}\alpha$.

Доведення. У випадку $\alpha \in H(1)$ твердження леми є очевидним, а тому далі вважатимемо, що $\alpha \notin H(1)$. Нехай $\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ і $\operatorname{ran}\alpha = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$, причому $x_1 < \ldots < x_n$ і $y_1 < \ldots < y_n$ в $\mathbb{R}$. Означимо відображення $\gamma_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за формулою

$$(x)\gamma_\alpha = \begin{cases} (x)\alpha, & \text{якщо } x \in \operatorname{dom}\alpha; \\ y_i, & \text{якщо } x = x_i \text{ для } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases} \tag{1}$$

Тоді, очевидно, що так означене відображення γ_α є монотонним гомеоморфізмом простору $\mathbb{R}$, та оскільки $\alpha\alpha^{-1}$ і $\alpha^{-1}\alpha$ — тотожні відображення множин $\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ і $\operatorname{ran}\alpha = \mathbb{R} \setminus \{y_1, \ldots, y_n\}$, відповідно, то отримуємо, що $\alpha = \alpha\alpha^{-1}\gamma_\alpha = \gamma_\alpha\alpha^{-1}\alpha$.

Єдиність елемента γ_α випливає з означення напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. □

З леми 3.7 випливає

Наслідок 3.8. $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ *— факторизовна інверсна напівгрупа.*

Конструкція 1. Нехай ε — довільний, відмінний від одиничного елемента, ідемпотент напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. За твердженням 3.1$(i)$ існують такі дійсні числа $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, що $\operatorname{dom}\varepsilon = \operatorname{ran}\varepsilon = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\varepsilon \colon \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \to \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ — тотожне відображення і $x_1 < \ldots < x_n$. З теореми 3.6(iii) випливає, що для кожного елемента α $\mathscr{H}$-класу $H(\varepsilon)$, який містить ідемпотент ε, виконується умова $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{ran}\alpha = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Позаяк для довільних різних дійсних чисел a, b і c інтервали (a, b), $(-\infty, c)$ і $(c, +\infty)$ є гомеоморфними, то надалі для спрощення викладу покладемо $x_0 = -\infty$ і $x_{n+1} = +\infty$. Для довільного числа $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ означимо часткове відображення $\alpha^{(x_i, x_{i+1})} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наступним чином: $\operatorname{dom}\alpha^{(x_i, x_{i+1})} = \operatorname{ran}\alpha^{(x_i, x_{i+1})} = \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ і

$$(x)\alpha^{(x_i, x_{i+1})} = \begin{cases} (x)\alpha, & \text{якщо } x \in (x_i, x_{i+1}); \\ x, & \text{якщо } x \notin (x_i, x_{i+1}). \end{cases}$$

Тоді очевидно, що $\alpha^{(x_i, x_{i+1})} \in \mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

В термінах попередньої конструкції зробимо наступне зауваження.

Зауваження 3.9. (i) За теоремою 3.6(iii) маємо, що $\alpha^{(x_i, x_{i+1})} \in H(\varepsilon)$ для довільних $\alpha \in H(\varepsilon)$ та $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(ii) Якщо α — ідемпотент, то $\alpha^{(x_i,x_{i+1})} = \alpha$, для довільного $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(iii) $\alpha = \alpha^{(x_0,x_1)} \cdot \ldots \cdot \alpha^{(x_n,x_{n+1})}$ для довільного елемента $\alpha \in H(\varepsilon)$, причому це зображення єдине з точністю до перестановки множників і множення на ідемпотент $\varepsilon_0 \geqslant \varepsilon$ напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

(iv) Оскільки довільний інтервал дійсної прямої гомеоморфний цій прямій, то для довільного числа $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ підмножина $\{\alpha^{(x_i,x_{i+1})} \colon \alpha \in H(\varepsilon)\}$ з індукованою з $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ бінарною операцією є групою, яка ізоморфна групі $\mathscr{H}^+(\mathbb{R})$.

Наслідок 3.10 описує структуру максимальних підгруп напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ і він випливає з пунктів (iii) та (iv) зауваження 3.9.

Наслідок 3.10. *Нехай ε — неодиничний ідемпотент напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. Тоді $\mathscr{H}$-клас $H(\varepsilon)$, який містить ідемпотент ε, ізоморфний прямому степеню $\big(\mathscr{H}^+(\mathbb{R})\big)^{n+1}$, де $n = |\mathbb{R} \setminus \operatorname{dom}\varepsilon|$.*

Твердження 3.11. *Кожен елемент α напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ стосовно природного часткового порядку порівняльний з єдиним елементом γ_α групи одиниць $H(1)$.*

Доведення. З леми 3.7 і леми 1.4.6 [26] випливає, що для довільного елемента α напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ існує елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$. Припустимо протилежне до твердження: існує елемент α напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$ і $\alpha \leqslant \gamma^*_\alpha$ для двох різних $\gamma_\alpha, \gamma^*_\alpha \in H(1)$. З твердження 1.4.10 [26] випливає, що $\alpha \notin H(1)$. Тоді існує дійсне число x таке, що $(x)\gamma_\alpha \neq (x)\gamma^*_\alpha$. З означення напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ випливає, що її група одиниць $H(1)$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^+(\mathbb{R})$ усіх гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію простору $\mathbb{R}$, а отже за гаусдорфовістю простору $\mathbb{R}$ отримуємо, що існує дійсне число $a > 0$ таке, що $(y)\gamma_\alpha \neq (y)\gamma^*_\alpha$ для всіх $y \in (x - a, x + a)$. Тоді з твердження 3.1(i) випливає, що $\varepsilon\gamma_\alpha \neq \varepsilon\gamma^*_\alpha$ для довільного ідемпотента ε напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, а це суперечить тому, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$. З отриманого протиріччя випливає єдиність елемента γ_α. □

Найменша групова конгруенція $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$ на інверсній напівгрупі S визначається наступним чином (див. [32, III.5]):

$s\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}t$ в S тоді і лише тоді, коли $es = et$ для деякого ідемпотента $e \in S$.

За твердженням 3.11 для довільного елемента α напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ такий, що $\alpha \leqslant \gamma_\alpha$, а отже визначено відображення

$$\mathfrak{G} \colon \mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) \to H(1) \colon \alpha \mapsto \gamma_\alpha. \tag{2}$$

Також, з тверджень 1.4.7 [26] і 3.11 випливає, що так означене відображення $\mathfrak{G}$ є сюр'єктивним гомоморфізмом, і більше того для $\alpha, \beta \in \mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ маємо, що $\alpha \mathfrak{C}_{\mathsf{mg}} \beta$ тоді і лише тоді, коли $(\alpha)\mathfrak{G} = (\beta)\mathfrak{G}$.

Таким чином, нами доведена наступна теорема:

Теорема 3.12. *Фактор-напівгрупа $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})/\mathfrak{C}_{mg}$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^+(\mathbb{R})$ усіх гомеоморфізмів, що зберігають орієнтацію простору $\mathbb{R}$, причому природний гомоморфізм $\mathfrak{C}^\natural_{mg} \colon \mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}) \to \mathscr{H}^+(\mathbb{R})$ визначається за формулою (2).*

Наступне твердження трішки "посилює" властивості напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ за модулем леми 3.7.

Твердження 3.13. *Для довільного елемента α напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такий, що*

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha\gamma_\alpha^{-1} \qquad i \qquad \alpha^{-1}\alpha = \gamma_\alpha^{-1}\alpha. \tag{3}$$

Доведення. Для елемента α напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ означимо гомеоморфізм γ_α простору $\mathbb{R}$ наступним чином. Якщо α — елемент групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, то покладемо $\gamma_\alpha = \alpha$.

Нехай $\alpha \notin H(1)$ і $|\mathbb{R}\setminus \operatorname{dom}\alpha| = |\mathbb{R}\setminus \operatorname{ran}\alpha| = n \geqslant 1$. Тоді існують дійсні числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ такі, що $\operatorname{dom}\alpha = \mathbb{R}\setminus\{x_1, \ldots, x_n\}$, $\operatorname{ran}\alpha = \mathbb{R}\setminus\{y_1, \ldots, y_n\}$, $x_1 < \ldots < x_n$ і $y_1 < \ldots < y_n$. Означимо відображення $\gamma_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за формулою (1). Очевидно, що так означене відображення γ_α є монотонним гомеоморфізмом простору $\mathbb{R}$ та елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ задовольняє умову (3). Також з неперервності відображення $\alpha \colon \operatorname{dom}\alpha \to \operatorname{ran}\alpha$ та коскінченності множин $\operatorname{dom}\alpha$ та $\operatorname{ran}\alpha$ в $\mathbb{R}$ випливає, що $(x_1)\beta = y_1, \ldots, (x_n)\beta = y_n$, для довільного гомеоморфізму β простору $\mathbb{R}$, звуження $\beta|_{\operatorname{dom}\alpha}$ якого збігається з частковим відображенням α. Таким чином, так побудований гомеоморфізм $\gamma_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ єдиний, що задовольняє умову (3). □

Далі ми опишемо додаткові властивості $\mathscr{D}$-еквівалентних елементів у напівгрупі $\mathscr{PH}^+_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, які пов'язані з її групою одиниць.

Лема 3.14. *Для довільних $\mathscr{D}$-еквівалентних ідемпотентів ι та ε напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{cf}(\mathbb{R})$ існує такий елемент $\gamma_{\iota,\varepsilon}$ групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^+_{cf}(\mathbb{R})$, що $\iota = \gamma_{\iota,\varepsilon}\varepsilon\gamma_{\iota,\varepsilon}^{-1}$.*

Доведення. За теоремою 3.6(iv) маємо, що $|\mathbb{R}\setminus\operatorname{dom}\iota| = |\mathbb{R}\setminus\operatorname{dom}\varepsilon|$. Покладемо

$$\operatorname{dom}\iota = \operatorname{ran}\iota = \mathbb{R}\setminus\{x_1, \ldots, x_n\} \quad \text{і} \quad \operatorname{dom}\varepsilon = \operatorname{ran}\varepsilon = \mathbb{R}\setminus\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $x_1 < \ldots < x_n$ і $y_1 < \ldots < y_n$. Означимо відображення $\gamma_{\iota,\varepsilon}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за формулою

$$(x)\gamma_{\iota,\varepsilon} = \begin{cases} x - x_1 + y_1, & \text{якщо } x \leqslant x_1; \\ \dfrac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_{i-1}) + y_{i-1}, & \text{якщо } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ 1 < i \leq n; \\ x - x_n + y_n, & \text{якщо } x \geqslant x_n. \end{cases}$$

Легко бачити, що відображення $\gamma_{\iota,\varepsilon}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ означене коректно, причому $(x_1)\gamma_{\iota,\varepsilon} = y_1, \ldots, (x_n)\gamma_{\iota,\varepsilon} = y_n$. Позаяк відображення $\gamma_{\iota,\varepsilon}$ є кусково-лінійним, то воно, очевидно, є гомеоморфізмом простору $\mathbb{R}$, а отже $\gamma_{\iota,\varepsilon}$ є елементом групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. Також з означення відображення $\gamma_{\iota,\varepsilon}$ випливає, що виконується рівність $\iota = \gamma_{\iota,\varepsilon}\varepsilon\gamma_{\iota,\varepsilon}^{-1}$. □

Твердження 3.15. *Для довільних $\mathscr{D}$-еквівалентних елементів α та β напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ існують елементи γ та δ групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $\alpha = \gamma\beta\delta$.*

Доведення. За теоремою 3.6(iv) ідемпотенти $\alpha\alpha^{-1}$ та $\beta\beta^{-1}$ є $\mathscr{D}$-еквівалентними в напівгрупі $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. Тоді за лемою 3.14 існує елемент ξ групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такий, що $\alpha\alpha^{-1} = \xi\beta\beta^{-1}\xi^{-1}$. З леми 3.7 випливає, що існує елемент групи одиниць γ_δ такий, що $\beta = \gamma_\delta\beta^{-1}\beta$. Тоді отримуємо, що $\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta\gamma_\delta^{-1}$, а отже маємо:

$$\alpha\alpha^{-1} = \xi\beta\beta^{-1}\xi^{-1} = \xi\beta\beta^{-1}\beta\gamma_\delta^{-1}\xi^{-1} = \xi\beta\gamma_\delta^{-1}\xi^{-1}.$$

За твердженням 3.13 існує єдиний елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такий, що $\alpha\alpha^{-1} = \alpha\gamma_\alpha^{-1}$. Таким чином, отримуємо:

$$\alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha \cdot \gamma_\alpha^{-1}\gamma_\alpha = \alpha\alpha^{-1}\gamma_\alpha = \xi\beta\gamma_\delta^{-1}\xi^{-1}\gamma_\alpha = \gamma\beta\delta,$$

де, очевидно, що $\gamma = \xi$ і $\delta = \gamma_\delta^{-1}\xi^{-1}\gamma_\alpha$ — елементи групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. □

4. Структурна теорема для напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$

Нагадаємо, що інверсна напівгрупа S називається *F-інверсною*, якщо $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-клас $s_{\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}}$ кожного елемента s має найбільший елемент стосовно природного часткового порядку в S [28]. Очевидно, що кожна F-інверсна напівгрупа містить одиницю.

З твердження 3.11 випливає

Наслідок 4.1. *$\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ — F-інверсна напівгрупа.*

Для довільного елемента s інверсної напівгрупи S позначимо $\downarrow s = \{x \in S : x \leqslant s\}$, де $\leqslant$ — природний частковий порядок на S.

Нехай S — довільна F-інверсна напівгрупа. Для довільного елемента s напівгрупи S через e_s позначимо ідемпотент $ss^{-1} \in S$, через t_s — найбільший елемент стосовно природного часткового порядку в S в $\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}$-класі $s_{\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}}$ елемента s, і нехай $T_S = \{t_s : s \in S\}$. Тоді напівгрупа S є диз'юнктним об'єднанням множин $\downarrow t$, де $t \in T_S$ [28].

Структура F-інверсних напівгруп викладена у наступних твердженнях з праці [28], і ми далі скористаємося ними для описання напівгрупи $\mathscr{P}\!\mathscr{H}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$.

Лема 4.2 ([28, лема 3])**.** *Нехай S — F-інверсна напівгрупа з одиницею 1_S. Тоді:*

- (i) *1_S — одиниця напівгратки $E(S)$;*
- (ii) *множина T_S з бінарною операцією $u * v = t_{uv}$, $u, v \in T_S$, є групою з нейтральним елементом 1_S, і t^{-1} є оберненим до елемента t в групі $(T_S, *)$;*
- (iii) *для кожного елемента $t \in T_S$ відображення $\mathfrak{F}_t : E(S) \to \downarrow e_t$, $\mathfrak{F}_t : f \mapsto tft^{-1}$, є сюр'єктивним гомоморфізмом, причому $\mathfrak{F}_{1_S}$ є тотожним відображенням на $E(S)$;*
- (iv) *$(1_S)\mathfrak{F}_t = e_t$ й $(e_t)\mathfrak{F}_{t^{-1}} = e_{t^{-1}}$, для довільного елемента $t \in T_S$;*
- (v) *для довільних елементів $u, v \in S$ та довільного ідемпотента $f \in S$ виконується рівність $\big((1_S)\mathfrak{F}_u\big)\mathfrak{F}_v \cdot (f)\mathfrak{F}_{u*v} = \big((f)\mathfrak{F}_u\big)\mathfrak{F}_v$;*
- (vi) *якщо $u, v \in T_S$, то $f \cdot (g)\mathfrak{F}_u \leqslant e_{u*v}$, для всіх ідемпотентів $f \leqslant e_u$ та $g \leqslant e_v$ напівгрупи S.*

Теорема 4.3 ([28, теорема 3])**.** *Нехай S — F-інверсна напівгрупа і $\mathscr{S} = \bigcup_{t \in T_S} (\downarrow e_t \times \{t\})$. Означимо на $\mathscr{S}$ бінарну операцію $\circ$ наступним чином: якщо $u, v \in T_S$, то для ідемпотентів $f \leqslant e_u$ та $g \leqslant e_v$ покладемо*

$$(f, u) \circ (g, v) = (f \cdot (g)\mathfrak{F}_u, u * v)\,. \tag{4}$$

Тоді $\circ$ — напівгрупова операція на $\mathscr{S}$ і напівгрупа $(\mathscr{S}, \circ)$ ізоморфна напівгрупі S стосовно відображення $\mathfrak{H} : S \to \mathscr{S} : s \mapsto \big(ss^{-1}, t_s\big)$.

Нехай A та B — напівгрупи, $\mathrm{End}(B)$ — напівгрупа ендоморфізмів напівгрупи B та визначено гомоморфізм $\mathfrak{h} : A \to \mathrm{End}(B) : b \mapsto \mathfrak{h}_b$. Тоді множина $A \times B$ з бінарною операцією

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, (b_1)\mathfrak{h}_{a_2} b_2)\,, \qquad a_1, a_2 \in A,\ b_1, b_2 \in B,$$

називається *напівпрямим добутком* напівгрупи A напівгрупою B стосовно гомоморфізму $\mathfrak{h}$ і позначається $A \ltimes_{\mathfrak{h}} B$ [26]. У цьому випадку кажуть, що визначена права дія напівгрупи A на напівгрупі B ендоморфізмами (гомоморфізмами). Зауважимо, що напівпрямий добуток інверсних напівгруп не завжди є інверсною напівгрупою (див. [26, розділ 5.3]).

Лема 4.4. *Відображення* $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \operatorname{End}\left(E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))\right) : \gamma \mapsto \mathfrak{h}_\gamma$, *де* $(\alpha)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\alpha\gamma$ *— автоморфізм напівгратки* $E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$, *є гомоморфізмом, причому* $\mathfrak{h}_1$ *— тотожний автоморфізм напівгратки* $E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$.

Доведення. Для довільних $\gamma \in H(1)$, $\varepsilon, \iota \in E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$ маємо, що

$$(\varepsilon\iota)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\varepsilon\iota\gamma = \gamma^{-1}\varepsilon\gamma\gamma^{-1}\iota\gamma = (\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma(\iota)\mathfrak{h}_\gamma,$$

а отже $\mathfrak{h}_\gamma$ — гомоморфізм напівгратки $E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$. Також, оскільки для довільних $\gamma \in H(1)$ та $\varepsilon \in E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$ елемент $\gamma\varepsilon\gamma^{-1}$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ і $(\gamma\varepsilon\gamma^{-1})\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}(\gamma\varepsilon\gamma^{-1})\gamma = \varepsilon$, то гомоморфізм $\mathfrak{h}_\gamma$ є сюр'єктивним відображенням. Очевидно, що $\mathfrak{h}_1$ — тотожне відображення напівгратки $E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$.

Припустимо, що $(\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma = (\iota)\mathfrak{h}_\gamma$, для деяких $\gamma \in H(1)$, $\varepsilon, \iota \in E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$. Оскільки $H(1)$ — група одиниць напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$, то з рівностей

$$\gamma^{-1}\varepsilon\gamma = (\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma = (\iota)\mathfrak{h}_\gamma = \gamma^{-1}\iota\gamma$$

випливає, що

$$\varepsilon = 1\varepsilon 1 = \gamma\gamma^{-1}\varepsilon\gamma\gamma^{-1} = \gamma\gamma^{-1}\iota\gamma\gamma^{-1} = 1\iota 1 = \iota,$$

а отже $\mathfrak{h}_\gamma$ — автоморфізм напівгратки $E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$.

Зафіксуємо довільні $\gamma, \delta \in H(1)$. Тоді для довільного ідемпотента $\varepsilon \in \mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ маємо рівність

$$(\varepsilon)\mathfrak{h}_{\gamma\delta} = (\gamma\delta)^{-1}\varepsilon\gamma\delta = \delta^{-1}\gamma^{-1}\varepsilon\gamma\delta = \delta^{-1}(\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma\delta = \left((\varepsilon)\mathfrak{h}_\gamma\right)\mathfrak{h}_\delta = (\varepsilon)\left(\mathfrak{h}_\gamma \cdot \mathfrak{h}_\delta\right),$$

а отже так означене відображення $\mathfrak{h}\colon H(1) \to \operatorname{End}\left(E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))\right)$ є гомоморфізмом. $\square$

Наступна теорема описує структуру напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$.

Теорема 4.5. *Напівгрупа* $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ *ізоморфна напівпрямому добутку* $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R}) \ltimes_{\mathfrak{h}} \mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R})$ *вільної напівгратки з одиницею* $(\mathscr{P}_{\infty}(\mathbb{R}), \cup)$ *та групи* $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ *усіх порядкових ізоморфізмів прямої.*

Доведення. Оскільки група одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ ізоморфна групі $\mathscr{H}^{+}(\mathbb{R})$ усіх порядкових ізоморфізмів прямої $\mathbb{R}$, то за твердженням 3.1(*ii*) нам достатньо показати, що напівгрупа $\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R})$ ізоморфна напівпрямому добутку $H(1) \ltimes_{\mathfrak{h}} E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$ напівгратки $E(\mathscr{PH}_{\mathsf{cf}}^{+}(\mathbb{R}))$ та групи одиниць $H(1)$

напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ стосовно гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon H(1)\to\operatorname{End}\big(E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))\big)$, $\mathfrak{h}\colon\gamma\mapsto\mathfrak{h}_\gamma$, де $(\alpha)\mathfrak{h}_\gamma=\gamma^{-1}\alpha\gamma$.

Означимо відображення $\mathfrak{T}\colon\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})\to H(1)\ltimes_{\mathfrak{h}}E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))$ за формулою $(\alpha)\mathfrak{T}=\big(\gamma_\alpha,\alpha^{-1}\alpha\big)$, де елемент γ_α групи одиниць $H(1)$ напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$, визначений у твердженні 3.11. З твердження 3.1 і наслідку 4.1 випливає, що відображення $\mathfrak{T}\colon\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})\to H(1)\ltimes_{\mathfrak{h}}E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))$ означене коректно, і воно є сюр'єктивним. Припустимо, що існують елементи α та β напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ такі, що $(\alpha)\mathfrak{T}=(\beta)\mathfrak{T}$. Тоді $\big(\gamma_\alpha,\alpha^{-1}\alpha\big)=\big(\gamma_\beta,\beta^{-1}\beta\big)$ і, використавши твердження 3.11 і лему 1.4.6 з [26], отримуємо $\alpha=\gamma_\alpha\alpha^{-1}\alpha=\gamma_\beta\beta^{-1}\beta=\beta$, а отже відображення

$$\mathfrak{T}\colon\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})\to H(1)\ltimes_{\mathfrak{h}}E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))$$

є сюр'єктивним.

Нехай α та β — довільні елементи напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. Тоді за теоремою 3.12 маємо, що $\alpha\beta\mathfrak{C}_{\mathsf{mg}}\gamma_\alpha\gamma_\beta$, і оскільки $\gamma_\alpha,\gamma_\beta\in H(1)$, то отримуємо, що $\gamma_\alpha\gamma_\beta=\gamma_{\alpha\beta}$. Звідси випливає, що

$$\begin{aligned}(\alpha)\mathfrak{T}(\beta)\mathfrak{T}&=\big(\gamma_\alpha,\alpha^{-1}\alpha\big)\big(\gamma_\beta,\beta^{-1}\beta\big)=\\&=\Big(\gamma_\alpha\gamma_\beta,\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\Big)=\Big(\gamma_{\alpha\beta},\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\Big).\end{aligned}$$

За лемою 4.4 відображення $\mathfrak{h}_\gamma\colon E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))\to E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))\colon\alpha\mapsto\gamma^{-1}\alpha\gamma$ є автоморфізмом напівгратки $E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))$, а отже отримуємо, що елемент $\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta$ є ідемпотентом напівгрупи $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$. Оскільки $\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})$ — інверсна напівгрупа, то за твердженням 3.11 і лемою 1.4.6 з [26] маємо, що $\beta=\gamma_\beta\beta^{-1}\beta$, а отже:

$$\begin{aligned}\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\beta^{-1}\beta&=\Big(\gamma_\beta^{-1}\alpha^{-1}\alpha\gamma_\beta\Big)\big(\beta^{-1}\beta\big)\big(\beta^{-1}\beta\big)=\\&=\Big(\beta^{-1}\beta\gamma_\beta^{-1}\Big)\big(\alpha^{-1}\alpha\big)\big(\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\big)=\\&=\big(\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\big)^{-1}\big(\alpha^{-1}\alpha\big)\big(\gamma_\beta\beta^{-1}\beta\big)=\\&=\beta^{-1}\big(\alpha^{-1}\alpha\big)\beta=\big(\beta^{-1}\alpha^{-1}\big)(\alpha\beta)=(\alpha\beta)^{-1}(\alpha\beta).\end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо $(\alpha\beta)\mathfrak{T}=\big(\gamma_{\alpha\beta},(\alpha\beta)^{-1}\alpha\beta\big)=(\alpha)\mathfrak{T}(\beta)\mathfrak{T}$, а отже відображення $\mathfrak{T}\colon\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R})\to H(1)\ltimes_{\mathfrak{h}}E(\mathscr{PH}^{+}_{\mathsf{cf}}(\mathbb{R}))$ є гомоморфізмом, що і завершує доведення нашої теореми. □

Подяка: Автори виражають щиру подяку рецензенту за корисні зауваження та коментарі до рукопису цієї праці.

ЛІТЕРАТУРА

1. Л.А. Бекларян, Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты, УМН **59**:4(358) (2004), 3–68;
2. Л.А. Бекларян, Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Метрические инварианты и вопросы классификации, УМН, **70**:2(422) (2015), 3–54;
3. Л.М. Глускин, Полугруппа гомеоморфных отображений отрезка, Матем. сб. **49**(**91**):1 (1959), 13–28.
4. Л.М. Глускин, *Полугруппы топологических отображений*, ДАН СССР **125** (1959), 699–702.
5. Л.М. Глускин, *Транзитивные полугруппы преобразований*, ДАН СССР **129** (1959), 16–18.
6. Л.М. Глускин, *Идеалы полугрупп преобразований*, Матем. сб. **47**(**89**):1 (1959), 111–130.
7. Л.М. Глускін, *Про одну півгруппу неперивиих функцій*, Доповіді АН УРСР **5** (1960), 582–585.
8. Л.М. Глускин, *Полугруппы топологических преобразований*, Изв. вузов. Матем. **1** (1963), 54–65.
9. Х.Н. Инасаридзе, *О простых полугруппах*, Матем. сб. **57**(**99**):2 (1962), 225–232.
10. Л.Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований*, ДАН СССР **144**:3 (1962), 509–511.
11. Л.Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований и гомеоморфизмов простой дуги*, ДАН СССР **146** (1962), 1301–1304.
12. Л.Б. Шнеперман,, *Полугруппы непрерывных преобразований метрических пространств*, Матем. сб. **61**(**103**):3 (1963), 306–318.
13. Л.Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований замкнутых множеств числовой прямой*, Изв. вузов. Матем. **6** (1965), 166–175.
14. Л.Б. Шнеперман, *Полугруппы непрерывных преобразований топологических пространств*, Сиб. матем. журн. **4**:1 (1965), 221–229.
15. Л.Б. Шнеперман, *Полугруппа гомеоморфизмов простой дуги*, Изв. вузов. Матем. **2** (1966), 127–136.
16. Э.Г. Шутов, *О гомоморфизмах некоторых полугрупп непрерывнвх функций*, Сиб. матем. журн. **4**:3 (1963), 695–701.
17. Э.Г. Шутов, *О гомоморфизмах некоторых полугрупп непрерывных монотонных функций*, Сиб. матем. журн. **4**:4 (1963), 944–950.
18. R.D. Anderson, *The algebraic simplicity of certain groups of homeomorphisms*, Amer. J. Math. **80**:4 (1958), 955—963.
19. F.A. Cezus, *Green's relations in semigroups of functions*, Ph.D. Thesis, Australian National University, Canberra, Australia, 1972.
20. I. Chuchman, *On a semigroup of closed connected partial homeomorphisms of the unit interval with a fixed point*, Algebra Discr. Math. **12** (2011), 38–52.
21. A.H. Clifford and G.B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vols. I and II, Amer. Math. Soc. Surveys **7**, Providence, R.I., 1961 and 1967.
22. R. Engelking, *General Topology*, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

23. L.M. Gluskin, B.M. Schein, L.B. Šneperman, I.S. Yaroker, *Addendum to a survey of semigroups of continuous self-maps*, Semigroup Forum **14** (1977), 95–125.

24. V. Jarnik, V. Knichal, *Sur l'approximation des fonctions continues par les superpositlons de deux fonctlons*, Fund. Math. **24** (1935), 206–208.

25. A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

26. M. Lawson, *Inverse Semigroups. The Theory of Partial Symmetries*, Singapore: World Scientific, 1998.

27. K.D. Magill, jr., *A survey of semigroups of continuous selfmaps*, Semigroup Forum **11** (1975/1976), 189–282.

28. R. McFadden, L. O'Carroll, *F-inverse semigroups*, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **22** (1971), 652–666.

29. J.V. Mioduszewski, *On a quasi-ordering in the class of continuous mappings of a closed interval into itself*, Colloq. Math. **9** (1962), 233–240.

30. W.D. Munn, *Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups*, Quart. J. Math., **17**:1 (1966), 151–159.

31. S.B. O'Reilly, *The characteristic semigroup of topological space*, Gen. Topol. Appl. **5** (1975), 95–106.

32. M. Petrich, *Inverse Semigroups*, John Wiley & Sons, New York, 1984.

33. J.V. Rosický, *Remarks on topologies uniquely determined by their continuous self maps*, Czechoslovak Math. J. **24**:3 (1974), 373–377.

34. J.V. Rosický, *The topology of the unit interval is not uniquely determined by its continuous self maps among set systems*, Colloq. Math. **31** (1974), 179–188.

35. J.C. Warndof, *Topologies uniquely determined by their continuous self maps*, Fund. Math. **66**:1 (1969), 25–43.

Надійшло 29.07.2015

Після переробки 15.09.2015