УДК 681.3.06

І.В. Редько, Н.М. Снігур

ПРИМІТИВНА ПРОГРАМНА АЛГЕБРА ОБЧИСЛЮВАНИХ ФУНКЦІЙ НАД ГРАФАМИ

The problem of finding algebraic characteristics of representative classes of functions and predicates is closely connected with issues of the programming theory and practice. In this paper, we study a class of calculated functions and predicates for finite graphs. We choose graph structures because of their importance and popularity in the theoretical and applied programming. We also use the primitive program algebra as a research tool. Specifically, its carrier is a set of calculated functions and predicates for finite graphs and its signature comprises the parametric composition of superposition, branching and cycling. Emphasized here is finding a generating set of the primitive program algebra. In addition, we obtain useful necessary conditions for generating completeness of the generating set of the primitive program algebra calculated by functions and predicates for graphs.

Вступ

Задача знаходження базисів примітивних програмних алгебр (ППА) обчислюваних функцій тісно пов'язана з проблематикою теорії та практики програмування. У цій статті розглядається ППА, носієм якої є множина обчислюваних функцій та предикатів над скінченними графами (обчислюваність вводиться згідно з нумераційним підходом [1]). Основна увага приділяється пошуку породної множини цієї ППА. Вибір графових структур зумовлений їх важливістю і популярністю в теоретичному та прикладному програмуванні (див., наприклад, [1–9]). Зокрема, визначено та досліджено поняття обчислюваної функції над скінченними графами (комплексами) [1, 2], вивченню граф-схем алгоритмів присвячено [3], ізоморфізму графів – [4–7], питанням абстрактної обчислюваності в різних областях – [8], графовим засобам специфікації програм – [9]. При цьому треба зазначити, що практично всі згадані дослідження акцентують увагу безпосередньо на графах, не розглядаючи задачі огляду класу обчислюваних функцій над графами (класу графових перетворювачів). Усі використані та невизначені в статті поняття і позначення слід трактувати за [5]. Зазначимо, що отримані в роботі результати доповнюють результати для векторних, матричних, реляційних і табличних функцій [3–6].

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження класу обчислюваних функцій над скінченними графами, зокрема пошук породної множини ППА, носієм якої є такі обчислювані функції та предикати.

Основні поняття

Перед викладенням власне результатів дослідження доцільно навести деякі важливі визначення та результати. В першу чергу це стосується визначення досліджуваної ППА.

Носій і сигнатура ППА. Носієм ППА можуть бути або функції та предикати, що залежать від змінних [3, 12], або n-арні функції та предикати [4, 15]. Далі ППА розуміються в останньому значенні, тому під функціями (предикатами) матимемо на увазі n-арні функції (предикати) для $n = 1, 2, \ldots,$ хоча при їх позначенні перевага надаватиметься не операторній, а термальній формі запису, зважаючи на її компактність [2].

Сигнатуру ППА становлять операції суперпозиції, розгалуження та n-арного циклування, які є адекватними уточненнями стандартних структур управління алголоподібних мов програмування. Для зручності подальшого викладу і розуміння роботи корисно буде дати формальне визначення цих операцій (докладніше див. [6, 13]).

Під *суперпозицією* маємо $(m+1)$-арну операцію $S^{t_1,\ldots,t_m}$ $(t_i \neq t_j, i \neq j)$, $m = 1, 2, \ldots,$ $m \leq n,$ яка довільному кортежу функцій $\langle f(x_1,\ldots,x_n),$ $f_1(y^1,\ldots,y_k), \ldots, f_m(z_1,\ldots,z_p)\rangle$ ставить у відповідність нову функцію g, що залежить від змінних множини $(\{x_1,\ldots,x_n\} \setminus \{t_1,\ldots,t_m\} \cup \{y_1,\ldots,y_k\} \setminus \setminus \{z_1,\ldots,z_p\})$, де $\{x_1,\ldots,x_n\} \cap \{t_1,\ldots,t_m\} = \{x_{i1},\ldots,$ $x_{i_m}\}$, та $i_r \neq i_s$, $r \neq s$ і $x_{i_s} = t_s$, $s = 1,\ldots,m.$ Її значення покладається рівним $f(x_1,\ldots,x_{i_1-1},$ $f_1(y_1,\ldots,y_k),\ x_{i_1+1},\ldots,$ $x_{i_m-1}, f_m(z_1,\ldots,z_p), x_{i_m+1},\ldots,x_n).$

Розгалуження являє собою $(m+1)$-арну операцію $\lozenge^{m+1}$, $m = 2, 3, \ldots$, яка кортежу функцій $\langle h(x_1,\ldots,x_n), f_1(y_1,\ldots,y_k), \ldots, f_m(z_1,\ldots,z_r)\rangle$, в якому функція $h(x_1,\ldots,x_n)$ – функція зі скінченною множиною значень $\{h_1,\ldots,h_m\}$, ставить у відповідність нову функцію g, яка залежить від змінних множини $\{x_1,\ldots,x_n\} \cup \{y_1,\ldots,y_k\} \cup \cup \ldots \cup \{z_1,\ldots,z_r\}$ та набуває значення, яке вважається рівним $f_i(t_1,\ldots,t_p)$, якщо $h(x_1,\ldots,x_n) = = h_i$, і не визначене в іншому випадку.

Циклування задається як сім'я $(n+1)$-арних операцій $*^{(n+1)}$: $\langle p, f_1,\ldots,f_n\rangle \to g$, де p – предикат, а f_i, g – функції, причому арність p, f_i, g дорівнює *n*. Значення $g(x_1,\ldots,x_n)$ визначається таким чином. Розглянемо послідовність кортежів $\{(y_i^1,\ldots,y_i^n),\ \ i = 0,1,\ldots\}$, де $y_0^j := x_j,\ \ y_{i+1}^j := f_j(y_i^1,\ldots,y_i^n),\ \ i = 0, 1, \ldots, j = \overline{1, n}$. Знайдемо перший кортеж $(y_k^1,\ldots,y_k^n)$ такий, що $p(< y_k^1,\ldots,y_k^n >) = \text{false}$. Покладемо $g(x_1,\ldots,x_n) = = y_k^1$. Якщо такого кортежу в послідовності не існує, то $g(x_1,\ldots,x_n)$ вважається невизначеним.

Зазначимо, що операція $*^{(n+1)}$ по суті збігається з операцією повторення першого роду функторів по предикату [8, 15].

Очевидно, що $p * f = *^{(n+1)}(p, f, I_2^n,\ldots,I_n^n)$, де арності p та f дорівнюють *n*. Звідси випливає, що всі твердження, отримані в [3–7] в рамках попереднього визначення ППА, зберігаються при переході до нового.

При термальному запису циклування використовуємо запис вигляду $p(x_1,\ldots,x_n) \underset{y_1,\ldots,y_m}{*}$ $\underset{y_1,\ldots,y_m}{*} \langle f_1(z_1^1,\ldots,z_{k_1}^1),\ldots,f_m(z_1^m,\ldots,z_{k_m}^m)\rangle$, вказуючи явно лише ті змінні, значення яких будуть змінюватися. При цьому функція $f_i(z_1^i,\ldots,z_{k_i}^i)$ керує зміною значення змінної y_i, а змінна y_1 вважається "вихідною". Поновлення операторного запису при цьому є очевидним.

Тепер звернемося до носія, над яким визначені досліджувані обчислювані функції. З огляду на те, що існує щонайменше кілька рівноцінних за суттю, але різних за формою визначень скінченного орієнтованого графа, тут зупинимось на тому, яке найбільш адекватне розгляду, проведеному в цій статті. Також дамо визначення деяким суміжним поняттям та наведемо важливі для подальшого викладу дані.

Скінченний орієнтований граф та деякі суміжні поняття та базові результати. Під (скінченним) *орієнтованим графом* g розуміємо пару $< V, E >$, де V – деяка злічена непуста множина об'єктів, а E – бінарне відношення на V.

Стандартна інтерпретація цих об'єктів V та E у цьому визначенні така: V – множина вершин графа, E – множина його дуг.

Домовимось надалі вершини графа позначати латинськими літерами u, v, w, а дуги – літерами e, p, r, можливо з індексами, $v_1,\ldots$, $e_1,\ldots$ За необхідності явно вказати вершини дуги та її напрямок, використовуватимемо позначення $< v, u >$, розуміючи, що дуга направлена від v до u.

Вершини v та u дуги $e \equiv < v, u >$ будемо називати *суміжними*. При цьому дуга e вважається *додатно інцидентною* вершині u та *від'ємно інцидентною* вершині v. Кількість дуг, що додатно (від'ємно) інцидентні вершині w, називається додатним (від'ємним) ступенем w і позначається $\delta_g^+(w)$ $(\delta_g^-(w))$. За аналогією домовимось вершину v графа $g \equiv < V, E >$ називати від'ємно (додатно) інцидентною (*від'ємною* (*додатною*)) до вершини w того ж графа, якщо $< w, v > \in E$ $(< v, w > \in E)$.

Прагматика дослідження, частиною якого є ця робота, спонукає до виділення серед усього розмаїття графів таких, у яких E є рефлексивним. Така вимога природна при розгляді різного роду складних об'єктів, стосовно яких коректно говорити про підлеглість їхніх складових частин. Тому надалі будемо розглядати тільки такі графи. Їх множину позначимо G.

***Зауваження* 1.** Нижче будемо розглядати скінченні орієнтовані псевдографи (тобто графи з петлями – дугами, які з'єднують вершину саму з собою).

***Зауваження* 2.** Для зручності викладу наступного матеріалу, введемо поняття так званої *псевдовершини* або *порожньої* вершини. Будемо вважати, що довільна вершина графа може мати яку завгодно кількість псевдодуг, які пов'язують її з порожньою вершиною.

Під *функціями* далі розуміємо часткові функції з аргументами і значеннями із G, а під предикатами – часткові предикати на G.

Обчислюваність на G вводиться як нумераційна обчислюваність за допомогою арифметичної функції, яка представляє цю функцію на G в зафіксованій нумерації множини G [11]. Існування такої нумерації випливає зі зліченості множини V.

Будь-яку частково-рекурсивну багатомісну функцію або будь-який частково-рекурсивний багатомісний предикат (чр-функція, чр-предикат) також будемо називати *графовим перетворювачем*.

За допомогою A_G позначимо ППА, носій якої становлять усі частково-рекурсивні функції (чр) і предикати на G. Породну множину алгебри назвемо її повною системою, а повну систему ППА – I_m^n-базисом, якщо будь-яка її підсистема, одержувана видаленням будь-якого предиката або якої-небудь функції, відмінної від селекторної, вже не буде повною.

Через скінченність розглянутих графів не буде істотним обмеженням, якщо як вершину графа розглядати натуральні числа. При цьому на множині вершин графа вводиться цілком природний порядок. Крім того, стає очевидним, що множина всіх скінченних графів є зліченою, а отже, для неї має існувати ефективна нумерація $\alpha_G : N \to G$ (визначена у сенсі [11]).

Основою цього дослідження є теореми про ізоморфізм і про базис ППА. Для зручності наведемо їх формулювання.

Теорема 1 (про ізоморфізми ППА). Біективне відображення $\theta_\alpha : A_{\mathrm{G}}^{\text{чр}} \to A_{\mathrm{N}}^{\text{чр}}$, яке ставить у відповідність кожній функції на G певну арифметичну функцію (у нумерації α_{G}), задає ізоморфізм ППА $A_G^{\text{чр}}$ на ППА $A_N^{\text{чр}}$, де $A_N^{\text{чр}}$ – ППА всіх чр-функцій і чр-предикатів над N.

Теорема 2 (про базис ППА). Існує I_m^n-базис алгебри $A_{\mathrm{G}}^{\text{чр}}$, який складається з точністю до селекторних функцій з двох функцій і одного предиката.

При побудовах у ППА часто є зручними логічні зв'язки для предикатів [6, 9, 14]; вони легко моделюються в ППА з допомогою скрізь істинного і скрізь хибного предикатів (p_T, p_F):

$$p(x_1,\ldots,x_n) \vee q(y_1,\ldots,y_m) =$$
$$= \Diamond(p(x_1,\ldots,x_n),\ p_{\mathrm{T}}(x_1),\ \Diamond(q(y_1,\ldots,y_m),$$
$$p_T(x_1),\ p_{\mathrm{F}}(x_1))).$$
$$p(x_1,\ldots,x_n)\ \&\ q(y_1,\ldots,y_m) =$$
$$= \Diamond(p(x_1,\ldots,x_n),\ \Diamond(q(y_1,\ldots,y_m),$$
$$p_T(x_1),\ p_{\mathrm{F}}(x_1)),\ p_{\mathrm{F}}(x_1)).$$
$$\neg p(x_1,\ldots,x_n) = \Diamond(p(x_1,\ldots,x_n),\ p_{\mathrm{F}}, p_T(x_1)).$$

Позначимо за допомогою $[\sigma]_{\mathfrak{B}}$ замикання множини σ операціями сукупності $\mathfrak{B}$, а Ω – сукупність введених вище операцій ППА.

ППА частково-рекурсивних граф-функцій і граф-предикатів

Розглянемо такі функції на множині графів (граф-функції):

1) C_0^{G} – константна функція $C_0^{\mathrm{G}}(g) = g_0^1$;

2) S_{G} – збільшення на одиницю номера першої вершини графа, тобто якщо $g = \langle V = \{v_1,\ldots,v_n\},\ E = \{e_1 = (v_1, v_k),\ldots,e_l = (v_p, v_1),\ldots\}\rangle$, то $S_{\mathrm{G}}(g) = \langle \tilde{V} = \{v_1+1,\ldots,v_n\},\ \tilde{E} = \{e_1 = (v_1+1, v_k),\ldots,$ $e_l = (v_p, v_1+1),\ldots\}\rangle$;

3) $\cup$ – об'єднання графів: $g_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $g_2 = \langle V_2, E_2\rangle$, $g_1 \cup g_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2\rangle$;

4) $\setminus$ – різниця графів: $g_1 = \langle V_1, E_1\rangle$, $g_2 = \langle V_2, E_2\rangle$, $g_1 \setminus g_2 = \langle V_1, E_1 \setminus E_2\rangle$;

5) E_e – виділення перших дуг, тобто для $g = \langle V = \{v_1,\ldots,v_n\},\ E = \{e_1 = (v_l, v_k),\ldots\}\rangle$, $E_e(g) = \langle \tilde{V} = \{v_l, v_k\},\ \tilde{E} = \{\tilde{e}_1 = = (v_l, v_k)\}\rangle$;

6) R – ототожнення кореня графа з першою негативно інцидентною вершиною: $g = \langle V = \{v_1,\ldots,v_{k-1},v_k,v_{k+1},\ldots,v_n\},\ \ E = \{e_1 = (v_l, v_k),\ldots,$ $e_s = (v_p, v_k),\ldots\}\rangle$, тоді $R(g) = \langle \tilde{V} = \{v_1,\ldots,v_{k-1},$ $v_{k+1},\ldots,v_n\},\ \tilde{E} = \{\tilde{e}_1 = (v_l, v_l),\ldots,\tilde{e}_s = (v_p, v_l),\ldots\}\rangle$;

7) A – стягування кореня графа з першою негативно інцидентною вершиною: $g = \langle V = \{v_1,\ldots,v_{l-1},v_l,v_{l+1},\ldots,v_n\},\ \ E = \{e_1 = (v_l, v_k),\ e_2 = (v_l, v_r),\ldots,\ \ e_s = (v_p, v_l),\ldots\}\rangle$, тоді $R(g) = \langle \tilde{V} =$

$= \{v_1, \dots, v_{l-1}, v_{l+1}, \dots, v_n\}$, $\tilde{E} = \{\tilde{e}_1 = (v_k, v_r), \dots, \tilde{e}_{s-1} = (v_p, v_k), \dots\}\rangle$;

8) $\cup^*$ — об'єднання графів g_1 і g_2 з доданням дуги з кореня графа g_1 в корінь графа g_2: $g_1 = \langle V_1 = \{v_{11}, \dots\}$, $E_1 = \{e_{11} = (v_{11}, v_l), \dots\}\rangle$, $g_2 = \langle V_2 = \{v_{21}, \dots\}$, $E_2 = \{e_{21} = (v_{21}, v_p), \dots\}\rangle$, $g_1 \cup^* g_2 = \langle V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{e_s = (v_{11}, v_{21})\}\rangle$;

9) E_v — виділення кореня графа: $g = \langle V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1 = (v_l, v_k), \dots\}\rangle$, $E_v(g) = \langle \tilde{V} = \{v_l\}, \varnothing\rangle$.

Також знадобляться ще й такі функції:

1) D_e — видалення першої дуги: $g = \langle V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}\rangle$, $D_e(g) = \langle V, \tilde{E} = \{e_2, \dots, e_m\}\rangle$;

2) D_v — видалення першої ізольованої вершини;

3) E_v^{out} — виділення підграфа, який складається з кореня графа і всіх негативно інцидентних йому дуг: $g = \langle V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{e_1 = (v_l, v_k), \dots, e_s = (v_l, v_r), e_{s+1} = (v_p, v_q), \dots\}\rangle$, $E_v^{\text{out}}(g) = \langle \tilde{V} = \{v_l, v_k, \dots, v_r\}$, $\tilde{E} = \{e_1, \dots, e_s\}\rangle$;

4) C_{Δ_G} — функція переведення в порожній граф: $C_{\Delta_G}(g) = \Delta_G$.

Покладемо $\sigma_G := \{C_0^G, S_G, \cup, \setminus, E_e, R, A, \cup^*, E_v, =_G, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\dots}$ і доведемо, що ця сукупність частково-рекурсивних функцій та предикатів є повною системою ППА обчислюваних функцій та предикатів над графами.

Відображення графа у вектор. Через те, що розглядаються графи з вершинами з N, будь-якому графу g можна поставити у відповідність певний вектор u, при цьому псевдовершині буде відповідати число 0. Вектор u формується поелементно таким чином. Першим елементом поставимо номер кореня графа; далі перелічимо всі суміжні з ним вершини, що відповідають негативно інцидентним дугам. Поставимо розподільний нуль. Повторюємо цей процес для всіх вершин графа. Вкінці записуємо номери всіх ізольованих вершин, також розділяючи їх нулями. Порожній граф (аналог порожнього слова) будемо позначати Δ_G.

Позначимо це відображення $\varphi : G \to N^*$, $N^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} N^i$, де $N^0 = \{\Lambda\}$ і Λ — порожній вектор. Очевидно, що φ — ін'єкція, але не сюр'єкція. Позначимо $V := \varphi(G)$. Очевидно, що ця множина є рекурсивною в нумерації α_G.

Нижче під L-функцією (L-предикатом) розуміється багатомісна часткова операція (предикат) на множині L.

Означення 1. V-функцію $F(x_1, \dots, x_n)$ назвемо *векторним образом граф-функції* $\mathsf{F}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, якщо $F(\varphi(\xi_1), \dots, \varphi(\xi_n)) \cong \varphi(\mathsf{F}(\xi_1, \dots, \xi_n))$ для всіх $\xi_1, \dots, \xi_n$. Аналогічно V-предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ назвемо *векторним образом граф-предиката* $\mathsf{P}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, якщо $P(\varphi(\xi_1), \dots, \varphi(\xi_n)) \cong \varphi(\mathsf{P}(\xi_1, \dots, \xi_n))$ для всіх $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Лема 1. Векторним образом чр-граф-функції (чр-граф-предиката) є чр-V-функція (чр-V-предикат).

Безпосередньо з рекурсивності множини V випливає наступна лема.

Лема 2. Будь-яка чр-V-функція є чр-N^*-функцією (тобто просто векторною чр-функцією). Для чр-предикатів аналогічно.

Наслідок. Векторний образ чр-граф-функції (чр-граф-предиката) є векторною чр-функцією (векторним чр-предикатом).

Відображення вектора в граф. З метою моделювання векторних функцій граф-функціями побудуємо кодувальне відображення $\Phi : N^* \to G$ таким чином:

$$\Phi(\Lambda) = \Delta_G,$$

$$\Phi(v_1, \dots, v_n) = \langle V = \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{1, \dots, n\};$$
$$E = \{(1, v_1), \dots, (n, v_n)\}\rangle.$$

Означення 2. Граф-функція $\mathsf{F}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ називається граф-моделлю векторної функції $F(x_1, \dots, x_n)$, якщо $\mathsf{F}(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)) \cong \Phi(F(v_1, \dots, v_n))$ для всіх $v_1, \dots, v_n \in N^*$. Граф-модель предиката вводиться аналогічно.

Очевидною є справедливість наступного твердження.

Лема 3. Для будь-яких векторних чр-функцій і чр-предикатів існують їхні граф-моделі, які належать замиканню $[\sigma_G]_\Omega$.

Кодувальне та декодувальне відображення. Нехай $\psi := \varphi \cdot \Phi$. Очевидно, що $\psi : G \to \Phi(V)$ — бієкція. Через χ позначимо будь-яке розширення відображення ψ^{-1}. Граф-функції ψ та χ відіграють ролі кодувальної та декодувальної функцій відповідно.

Безпосередньо з наведених вище визначень випливає лема.

Лема 4. Нехай $F(g_1, \ldots, g_n)$ — чр-граф-функція, а $\mathsf{H}(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — граф-модель векторного образу функції $F(g_1, \ldots, g_n)$. Тоді матимемо

$$F(g_1, \ldots, g_n) = \chi(\mathsf{H}(\psi(g_1), \ldots, \psi(g_n)))$$
$$\text{для всіх } g_1, \ldots, g_n \in G.$$

Аналогічно, нехай $P(g_1, \ldots, g_n)$ — чр-граф-предикат, а $\mathsf{K}(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ — граф-модель векторного образу цього предиката. Тоді отримаємо

$$P(g_1, \ldots, g_n) = \mathrm{K}(\psi(g_1), \ldots, \psi(g_n))$$
$$\text{для всіх } g_1, \ldots, g_n \in G.$$

Тепер, якщо виразити функції ψ та χ за допомогою замикання $[\sigma_{\mathsf{G}}]_{\Omega}$, то звідси безпосередньо слідує повнота вибраної породної множини.

Лема 5. Справедливе твердження: $\psi, \chi \in [\sigma_{\mathsf{G}}]_{\Omega}$.

Доведення. Розглянемо такі граф-функції:

1) $\mathsf{G}_1(\pi, \xi, \zeta) = (D_e(R(E_e(\zeta))) \neq \tau) \underset{\pi,\xi,\zeta,\tau}{*} \langle \pi \cup \xi, E_e(\zeta), D_e(\zeta), \tau \rangle$;

2) $\mathsf{G}_2(\pi, \xi, \zeta) = (\zeta \cup^{*} D_e(R(E_e(\xi)))) \cup ((\xi \neq \Delta) \underset{\pi,\xi,\zeta}{*} \underset{\pi,\xi,\zeta}{*} \langle \pi \cup (\zeta \cup^{*} A(E_e(\xi))), D_e(\xi), S_{\mathsf{G}}(\zeta) \rangle)$;

3) $\mathsf{G}_3(\xi, \{n\})$ — збільшення номера вершини графа на n;

4) $\mathsf{G}_4(\xi) = \Diamond((E_e(\xi) = \Delta), \Delta, \mathsf{F}(\{1\}, D_e(\xi)))$, де $F(\pi, \xi) = (E_e(\xi) \neq \delta) \underset{\pi,\xi}{*} \langle S_{\mathsf{G}}(\pi), D_e(\xi) \rangle$;

5) $\mathsf{G}_5(\pi, \xi, \zeta) = (E_e(\xi) \neq \Delta) \underset{\pi,\xi,\zeta}{*} \langle \pi \cup (\mathsf{G}_2(\Delta, \xi, S_{\mathsf{G}}(\zeta))), \xi \setminus \mathsf{G}_2(\Delta, \xi, S_{\mathsf{G}}(\zeta)), S_{\mathsf{G}}(\mathsf{G}_3(\zeta, \mathsf{G}_4(\mathsf{G}_2(\Delta, \xi, S_{\mathsf{G}}(\zeta))))) \rangle$;

6) $\mathsf{G}_6(\pi, \xi, \zeta) = (\xi \neq \Delta) \underset{\pi,\xi,\zeta}{*} \langle \pi \cup (\zeta \cup^{*} E_v(\xi)), D_v(\xi), S^2_{\mathsf{G}}(\zeta) \rangle$;

7) $\mathsf{G}_7(\pi, \zeta) = (S^2_{\mathsf{G}}(D_e(R(\xi))) \neq D_e(R(E_e(\zeta)))) \underset{\pi,\xi,\zeta}{*} \underset{\pi,\xi,\zeta}{*} \langle \pi \cup \xi, E_e(\xi), D_e(\zeta) \rangle$;

8) $\mathsf{G}_8(\xi) = D_e(R(E_e(\xi)))$;

9) $\mathsf{G}_9(\pi, \xi, \tau) = (\tau \neq \Delta) \underset{\pi,\xi,\zeta,\tau}{*} \langle \pi \cup (\xi \cup^{*} \zeta), \xi, \mathsf{G}_8(\tau), D_e(\tau) \rangle$;

10) $\mathsf{G}_{10}(\pi, \xi) = (\xi \neq \Delta) \underset{\pi,\xi}{*} \langle \pi \mathbin{\hat{\cup}} \mathsf{G}_9(\Delta, \mathsf{G}_8(\mathsf{G}_7(\Delta, \xi)), D_e(\mathsf{G}_7(\Delta, \xi))), \xi \setminus \mathsf{G}_7(\Delta, \xi) \rangle$.

Нескладно показати, що

$$\psi(g) = \mathsf{G}_5(\Delta, g, g_0) \cup \mathsf{G}_6(\Delta, g \setminus ((\xi \neq \Delta) \underset{\pi,\xi}{*} \langle \pi \cup E_e(\xi), D_e(\xi) \rangle\rangle),$$
$$S^2_{\mathsf{G}}(\mathsf{G}_4(g^1_0, \mathsf{G}_5(\Delta, g, g_0)))) \text{ та } \chi(\tilde{g}) = \mathsf{G}_{10}(\Delta, (\tilde{g})).$$

З наведених вище визначень і тверджень безпосередньо випливає основне твердження цієї статті.

Теорема 3. σ_{G} є повною системою алгебри $A^{\text{чр}}_{\mathsf{G}}$.

Висновки

У цій статті розглянуто ППА, носієм якої є множина обчислюваних функцій над скінченними графами. Знайдено породну множину σ_{G} цієї ППА $A^{\text{чр}}_{\mathsf{G}}$ та доведено її повноту. На закінчення зауважимо, що рівність із сукупності σ_{G} не можна видалити як єдиний предикат системи. Із усіх функцій σ_{G} лише S_{G} не не зберігає денотати (денотата в цьому випадку — вершина). Лише функція E_e не зберігає множину графів з кількістю дуг більшою або рівною двом. Лише функція E_v не зберігає множину графів, які мають хоча б одну (непусту) дугу. Таким чином, функції S_{G}, E_e, E_v та предикат $=_{\mathsf{G}}$ не можуть бути вилучені з породної сукупності σ_{G}. Стосовно інших функцій із σ_{G} питання залишається відкритим. Тому, хоча проблема існування I^n_m-базису ППА $A^{\text{чр}}_{\mathsf{G}}$ принципово вирішується відповідною теоремою про базис ППА, пошук природного для області графових перетворювачів I^n_m-базису є актуальною задачею. Її розв'язанню будуть присвячені подальші праці. Зокрема, наступним кроком цього дослідження може стати пошук нових властивостей функцій з σ_{G}, що зберігаються в сигнатурі ППА, а також спроба скоротити кількість функцій породної множини.

1. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965. – 392 с.
2. *Буй Д.Б., Редько В.Н.* Примитивные программные алгебры целочисленных и словарных функций / Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – **3**. – С. 69–71.
3. *Буй Д.Б., Мавлянов А.В.* К теории программных алгебр // Укр. мат. журн. – 1984. – № 6. – С. 761–764.
4. *Буй Д.Б., Редько В.Н.* Примитивные программные алгебры. Т. I // Кибернетика. – 1984. – **5**. – С. 1–7.
5. *Буй Д.Б., Редько В.Н.* Примитивные программные алгебры. Т. II // Кибернетика. – 1985. – **1**. – С. 28–33.
6. *Буй Д.Б.* Примитивные программные алгебры: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – К., 1985. – 22 с.
7. *Заславский И.Д.* Граф-схемы с памятью // Тр. мат. ин-та АН СССР. – 1964. – **72**. – С. 99–192.
8. *Голунков Ю.В.* О полноте операций в системах алгоритмических алгебр // Алгоритмы и автоматы. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – С. 11–53.
9. *Мальцев А.И.* Конструктивные алгебры. I // Усп. мат. наук. – 1961. – **3**. – С. 3–60.
10. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
11. *Буй Д.Б.* Теорія програмних алгебр композиційного типу та її застосування: дис. ... докт. фіз.-мат. наук. – К.: КНУ, 2002. – 364 с.
12. *Буй Д.Б., Редько В.Н.* Программологические аспекты метода неподвижной точки // Кибернетика и системный анализ. – 1994. – № 5. – С. 158–167.
13. *Зубенко В.В.* Алгебраїчні засоби специфікації інформаційних моделей. Ч. II // Наукові записки НаУКМА. Комп. науки. – 2003. – **21**. – С. 31–38.
14. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000. – 304 с.
15. *Буй Д.Б.* Композиційна семантика маніпуляційних дій: збереження денотатів, характеристики, обчислювальність, необхідні умови повноти // Вісник Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 169–188.

Рекомендована Радою
факультету електроніки НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
15 квітня 2011 року