УДК 517.9

О.А. Сивак

СТРУКТУРА МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

This paper considers the structure of a set of systems of continuous solutions in a number of cases depending on the hypotheses for the matrices *A*, *B*, number *q* and their properties. Using the methods of the theory of differential and difference equations, we define new conditions for the existence of continuous solutions of these systems of equations. Specifically, we develop the method of their construction and examine their properties. In theorems 1 and 3 we obtain the results under the conditions $a_i > 1,\ i = 1,\dots, n,\ \ q > 1,\ (t \le 0),\ \ 0 < a_i < 1,\ \ i = 1, \dots, m,\ \ q > 1,\ (t \ge 0)$, whilst in theorems 5, 6 we obtain the research results under $0 < a_i < 1 < a_j,\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{m+1, n},\ \ 0 \le m \le n,\ q > 1$.

Вступ

Системи функціонально-різницевих рівнянь такого вигляду:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt), \tag{1}$$

де $t \in R$, A, B — деякі дійсні $(n\times n)$-матриці, $q = \mathrm{const}$, поєднують в собі властивості функціональних (q-різницевих) і різницевих рівнянь. Незважаючи на це при дослідженні багатьох важливих питань з їх теорії доводиться розробляти специфічні методи, оскільки наявні, які є ефективними при вивченні аналогічних питань для різницевих і функціональних рівнянь, не дають бажаних результатів. Зокрема, в статті досліджується структура множини неперервних при $t \in R^+$ $(t \in R^-)$ розв'язків системи (1) у випадку, коли серед власних чисел $a_i,\ i = 1,\dots,n$, матриці A — рівні. На матрицю B і число q накладаються деякі додаткові умови. Не обмежуючи загальності, далі будемо припускати, що $A = \mathrm{diag}(A_1,\dots,A_m)$, $m \le n$, де $A_i - (k_i \times k_i)$-матриці вигляду

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_i & \varepsilon & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$1 \le i \le m, \qquad \sum_{i=1}^{m} k_i = n,$$

ε — достатньо мала додатна стала.

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження структури множини неперервних розв'язків системи рівнянь (1) у ряді випадків залежно від припущень відносно матриць *A*, *B*, числа *q* та вивчення їхніх властивостей.

Основні результати

Дослідимо систему рівнянь (1) при $t \ge 0$ у випадку, коли виконуються такі умови:

1) $0 < a_i < 1,\ \ i = 1,\dots,m,\ \ q > 1$.

Покажемо, що вона має розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{3}$$

де $x_i(t),\ \ i = 0,1,\dots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Підставляючи (3) в (1), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = A\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + B\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t),\ \ i = 0,1,\dots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t+1) = Ax_0(t), \tag{4_0}$$

$$x_i(t+1) = Ax_i(t) + Bx_{i-1}(qt),\ i = 1,2,\dots, \tag{4_i}$$

то ряд (3) буде формальним розв'язком системи рівнянь (1).

Дослідження системи рівнянь (4_0) зводиться до дослідження m підсистем рівнянь вигляду

$$x_0^i(t+1) = A_i x_0^i(t),\ i = 1, \ldots, m,\ m \le n, \qquad (4_0^i)$$

де $x_0^i = (x_1^i, \ldots, x_{k_i}^i)$, $i = 1, \ldots, m.$ Згідно з умовою 1 та матрицею (2) можна показати, що при достатньо малих ε існують додатні сталі $a, b,$ $a^* < a < 1$ і $b < a_* < 1$ $(a^* = \max|a_j|,\ j = 1, \ldots, n,$ $a_* = \min|a_j|,\ j = 1, \ldots, n)$ такі, що виконується умова

$$2)\ a^q < b,\ \Delta = \frac{\tilde{b}}{b(1 - b^{-1}a^q)} < 1,$$

де $\tilde{b} = |B|$.

Використовуючи подання загального неперервного розв'язку системи (4_0) і умову 1, можна побачити, що існує додатна стала M така, що при всіх $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|x_0(t)| \le Ma^t. \qquad (5_0)$$

Оскільки ряди

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)}\ B\ x_{i-1}(q(t+j)),\ i = 1, 2, \ldots, \qquad (5_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (4_i), $i = 1, 2, \ldots,$ (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ в (4_i), $i = 1, 2, \ldots$), то, беручи до уваги (5_0) й умови 1 і 2, покажемо, що ряди (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких при всіх $i \ge 1$, $t \ge 0$ виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le M\Delta^i a^{qt},\ i = 1, 2, \ldots \qquad (6)$$

Справді, враховуючи (5_0) та (5_1), маємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} |B|\ |x_0(q(t+j))| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} b^{-(j+1)}\ \tilde{b}\ Ma^{q(t+j)} \le M\ \tilde{b}\ b^{-1}a^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} (b^{-1}a^q)^j \le$$

$$\le M \frac{\tilde{b}}{b(1 - b^{-1}a^q)} a^{qt} \le M\Delta a^{qt},$$

тобто оцінка (6) справедлива при $i = 1.$ Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (6) доведена вже для деякого $i \ge 1,$ і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1.$ Відповідно до (5_{i+1}) і (6) маємо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1}\ |B|\ |x_i(q(t+j))| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} b^{-(j+1)}\ \tilde{b}\ M\Delta^i a^{q(q(t+j))} \le$$

$$\le M\ \Delta^i\ \tilde{b} b^{-1} a^{q^2 t} \sum_{j=0}^{\infty} (b^{-1}a^{q^2})^j \le$$

$$\le M\Delta^i \tilde{b} b^{-1} a^{qt} \sum_{j=0}^{\infty} (b^{-1}a^q)^j \le$$

$$\le M\Delta^i \frac{\tilde{b}}{b(1 - b^{-1}a^q)} a^{qt} \le M\Delta^{i+1} a^{qt}.$$

Отже, оцінка (6) виконується при всіх $i \ge 1,$ $t \ge 0.$ Звідси випливає, що ряди (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються при $t \ge 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких має місце оцінка (6). З огляду на (6), ряд (3) рівномірно збігається при $t \ge 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \le \frac{M}{1 - \Delta}$$

і є розв'язком системи рівнянь (1). Тим самим доведено наведену нижче теорему.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1 і 2. Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної *1*-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.

Розглянемо тепер неоднорідну систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt) + F(t), \qquad (7)$$

де матриці A, B задовольняють умови теореми 1, а $F(t) : R \to R^n$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. Нехай виконуються такі умови:

1) $0 < a_i < 1$, $i = 1, \ldots, m,$ $q > 1;$

2) $\dfrac{\tilde{b}}{1 - a} = \theta < 1;$

3) усі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \bar{M} < \infty$.

Тоді система рівнянь (7) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{8}$$

де $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ вектор-функції.

Д о в е д е н н я. Підставляючи (8) у (7), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = A\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + B\sum_{i=0}^{\infty} x_i(qt) + F(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$x_0(t+1) = Ax_0(t) + F(t), \tag{9_0}$$

$$x_i(t+1) = Ax_i(t) + Bx_{i-1}(qt), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{9_i}$$

то ряд (8) є формальним розв'язком системи рівнянь (7).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряд

$$x_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} F(t-j) \tag{10_0}$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$, задовольняє систему рівнянь (9_0), і виконується оцінка

$$|x_0(t)| \le \frac{\bar{M}}{1-a} = \bar{M}'. \tag{11_0}$$

Враховуючи (11_0), послідовно можна показати, що ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} B x_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{10_i}$$

рівномірно збігаються при $t \in R$, задовольняють відповідні системи рівнянь (9_i), $i = 1, 2, \ldots$, і виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le \bar{M}'\theta^i, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{11_i}$$

Таким чином, оскільки вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, що визначаються за допомогою співвідношень (10_i), $i = 0, 1, \ldots$, задовольняють умови (11_i), $i = 0, 1, \ldots$, то ряд (8) рівномірно збігається при $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь (7) і задовольняє умову

$$|x(t)| \le \frac{\bar{M}'}{1-\theta}.$$

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 1.** Виконуючи в (7) заміну змінних

$$x(t) = z(t) + \bar{x}(t), \tag{12}$$

отримаємо систему рівнянь (1) відносно вектор-функції $z(t)$. Оскільки для цієї системи рівнянь справедлива теорема 1, то, беручи до уваги заміну змінних (12), можна побудувати сім'ю неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків системи рівнянь (7).

Отримані вище результати можна узагальнити на випадок, коли матриця $B = B(t)$, тобто для системи рівнянь такого вигляду:

$$x(t+1) = Ax(t) + B(t)x(qt) + F(t), \tag{13}$$

де $A = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_m)$, $m \le n$, $A_i - (k_i \times k_i)$-матриці $i = 1, \ldots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i = n$, q — деяка стала, $B(t): R \to R^{n^2}$, $F(t): R \to R^n$.

Розглянемо тепер систему рівнянь (1) у випадку, коли $t \le 0$. Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. Нехай виконуються такі умови:

1) $a_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

2) $b^q > a$, $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{b^q - a} < 1$, $b > 1$, $a > 1$.

Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \le 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної *1*-періодичної вектор-функції $\omega(t)$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що система рівнянь (1) має сім'ю розв'язків у вигляді функціонального ряду (3). Для цього, очевидно, достатньо показати, що вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності систем рівнянь (4_i), $i = 0, 1, \ldots$, і задовольняють оцінки

$$|x_i(t)| \le M\Delta^i b^{qt}, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

де $M = \max_t |\omega(t)|$.

Справді, беручи до уваги умови теореми 3 і подання загального неперервного розв'язку системи (4_0), можна показати, що для довільного неперервного при $t \le 0$ розв'язку системи (4_0) виконується співвідношення

$$|x_0(t)| \le Mb^t, \qquad (15_0)$$

де M — деяка стала. Після безпосередньої підстановки в (4_i), $i = 1, 2, \ldots$, виявимо, що вектор-функції

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1}\, B\, x_{i-1}(q(t-j)),\ i = 1, 2, \ldots, \qquad (15_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (4_i), $i = 0, 1, \ldots$

Покажемо тепер, що ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких при всіх $i \ge 1$, $t \le 0$ виконуються оцінки (14). Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \le Mb^t$, то з огляду на (15_1) маємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1}\ |B|\ |x_0(q(t-j))| \le$$

$$\le \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} b^{q(t-j)}\ M \le M\ \tilde{b}a^{-1}b^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}(ab^{-q})^j \le$$

$$\le M\ \frac{\tilde{b}\ a^{-1} a\ b^{-q}}{1-ab^{-q}}\ b^{qt} \le M\ \frac{\tilde{b}}{b^q - a}\ b^{qt} \le M\Delta b^{qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (14) доведена вже для деякого $i \ge 1$, і доведемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (14), (15_{i+1}) отримуємо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1} |B|\ |x_i(q(t-j))| \le$$

$$\le \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} M\Delta^i\ b^{q(q(t-j))} \le M\Delta^i\ \tilde{b}\ a^{-1} b^{q^2 t}\sum_{j=1}^{\infty}(a\ b^{-q^2})^j \le$$

$$\le M\Delta^i\ \tilde{b}\ a^{-1} b^{qt}\sum_{j=1}^{\infty}(a\ b^{-q})^j \le$$

$$\le M\Delta^i\ \frac{\tilde{b}a^{-1}ab^{-q}}{1-ab^{-q}} b^{qt} \le M\Delta^{i+1}\ b^{qt}.$$

Отже, ми довели, що ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, що задовольняють оцінки (14). Цим самим ми показали, що ряд (3) рівномірно збігається при $t \le 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \le \frac{M}{1-\Delta}$$

і є розв'язком системи рівнянь (1). Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідну систему рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + Bx(qt) + F(t) \qquad (16)$$

у випадку, коли виконуються такі умови:

1) $a_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$;

2) $\dfrac{\tilde{b}}{b-1} = \theta < 1$;

3) усі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in R$ функціями і $\sup_t |F(t)| = \hat{M} < \infty$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4. Нехай виконуються умови 1—3. Тоді система рівнянь (16) має неперервний обмежений при всіх $t \in R$ розв'язок

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\hat{x}_i(t), \qquad (17)$$

де $\hat{x}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, — деякі неперервні обмежені при всіх $t \in R$ вектор-функції.

Доведення теореми проводиться аналогічно тому, як було доведено теорему 2.

Розглянемо тепер систему різницевих рівнянь (1) при таких припущеннях:

1) $0 < a_i < 1 < a_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{m+1, n}$, $0 \le m \le n$, $q > 1$;

2) $b > a^q$, $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{b - a^q} < 1$,

де $\tilde{b} = |B|$, $b < a_* < 1$, $a^* < a < 1$, $a_* = \min\{|a_i|$, $i = 1, \ldots, m\}$, $a^* = \max\{|a_i|$, $i = 1, \ldots, m\}$.

Справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, яка залежить від m довільних неперервних 1-періодичних функцій.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що система рівнянь (1) має розв'язки у вигляді ряду (3). Для цього, очевидно, достатньо довести, що системи рівнянь (4_i), $i = 0,1,\ldots$, мають неперервні обмежені при $t \geq 0$ розв'язки $x_i(t)$, $i = 0$, $1,\ldots$, які задовольняють оцінки

$$|x_i(t)| \leq \tilde{M}\Delta^i a^{qt}, \; i = 0,1,\ldots, \qquad (18)$$

де $\tilde{M}$ – деяка додатна стала.

Використовуючи представлення загального неперервного розв'язку системи (4_0) і умову 1, можна показати, що існує додатна стала $\tilde{M}$ така, що при всіх $t \geq 0$ виконується оцінка

$$|x_0(t)| \leq \tilde{M}a^t. \qquad (19_0)$$

Оскільки ряди

$$x_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} A^{-(j+1)}\, B\, x_{i-1}(q(t+j)), \; i = 1,2,\ldots, \quad (19_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (4_i), $i = 1,2,\ldots$, (в цьому можна переконатися безпосередньою підстановкою (19_i), $i = 1,2,\ldots$, в (4_i), $i = 1,2,\ldots$), то, беручи до уваги (19_0) і умови 1, 2, встановимо, що ряди (19_i), $i = 1,2,\ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, для яких при всіх $i \geq 1$, $t \geq 0$ виконуються оцінки (18).

Справді, враховуючи (19_0), (19_1), маємо

$$|x_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \; |B| \; |x_0(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} b^{-(j+1)}\, \tilde{b}\tilde{M}a^{q(t+j)} \leq \tilde{M}\; \tilde{b}\; b^{-1}a^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}(b^{-1}a^{q})^j \leq$$

$$\leq \tilde{M}\frac{\tilde{b}}{b(1-b^{-1}a^{q})}\, a^{qt} \leq \tilde{M}\Delta a^{qt},$$

тобто оцінка (18) виконується при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (18) доведена вже для деякого $i \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (19_{i+1}) і (18) маємо

$$|x_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |A^{-1}|^{j+1} \; |B| \; |x_i(q(t+j))| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} b^{-(j+1)}\, \tilde{b}\tilde{M}\Delta^i a^{q(q(t+j))} \leq$$

$$\leq M\; \Delta^i\; \tilde{b}b^{-1}a^{q^2 t}\sum_{j=0}^{\infty}(b^{-1}a^{q^2})^j \leq$$

$$\leq \tilde{M}\Delta^i\tilde{b}b^{-1}a^{qt}\sum_{j=0}^{\infty}(b^{-1}a^{q})^j \leq$$

$$\leq \tilde{M}\Delta^i\frac{\tilde{b}}{b(1-b^{-1}a^{q})}\, a^{qt} \leq \tilde{M}\Delta^{i+1}a^{qt},$$

звідки випливає оцінка (18) при $i+1$. Цим ми довели, що ряди (19_i), $i = 1,2,\ldots$, рівномірно збігаються при $t \geq 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, що задовольняють оцінки (18). Звідси безпосередньо знаходимо, що ряд (3) рівномірно збігається при $t \geq 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \leq \frac{\tilde{M}}{1-\Delta}.$$

Теорему 5 доведено.

Дослідимо тепер питання про існування неперервних при $t \leq 0$ розв'язків системи різницевих рівнянь (1) у випадку, коли виконуються умови:

1) $0 < a_i < 1 < a_j$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{m+1,n}$, $0 \leq m \leq$ $\leq n, q > 1$;

2) $\bar{b}^q > \bar{a}$, $\bar{\Delta} = \dfrac{\tilde{b}}{\bar{b}^q - \bar{a}} < 1$,

де $\tilde{b} = |B|$, $\bar{a} > \bar{a}^* = \max\{|a_j|, j = m+1,\ldots,n\}$, $\bar{b} < \bar{a}_* =$ $= \min\{|a_j|, j = m+1,\ldots,n\}$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 6. Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \leq 0$ розв'язків, яка залежить від n–m довільних неперервних 1-періодичних функцій $\omega_j(t)$, $j = \overline{m+1,n}$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що система рівнянь (1) має розв'язки у вигляді ряду (3), в якому вектор-функції $x_i(t)$, $i = 0,1,\ldots$, є розв'язками системи рівнянь (4_i), $i = 0,1,\ldots$

Дійсно, система рівнянь (4_0) має сім'ю неперервних розв'зків, що залежить від довільної неперервної *1*-періодичної вектор-функції $\omega(t)$ розмірності $n{-}m$, для яких виконується співвідношення

$$|x_0(t)| \le \bar{M}\ \bar{b}^{\,t},$$

$\bar{M} = \mathrm{const} > 0.$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (4_i), $i = 1, 2, \ldots$, доведемо, що вони мають неперервні при $t \le 0$ розв'язки. Дійсно, оскільки ряди

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^{j-1} B\, x_{i-1}(q(t-j)), \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (20_i)$$

є формальними розв'язками відповідних систем рівнянь (4_i), $i = 1, 2, \ldots$, то для цього достатньо показати, що ці ряди рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t), i = 1, 2, \ldots$ Для чого, в свою чергу, доведемо, що при всіх $i \ge 1$ виконується оцінка

$$|x_i(t)| \le \bar{M}\bar{\Delta}^i \bar{b}^{\,qt}, \; i = 1, 2, \ldots, \qquad (21)$$

де $\bar{M} = \max\limits_t |\omega(t)|$. Справді, оскільки $|x_0(t)| \le$ $\le \bar{M}\ \bar{b}^{\,t}$, то з огляду на (20_1) отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1}\ |B|\ |x_0(q(t-j))| \le$$

$$\le \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty}\bar{a}^{\,j-1}\bar{b}^{\,q(t-j)}\ \bar{M} \le \bar{M}\ \tilde{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{\,qt}\sum_{j=1}^{\infty}(\bar{a}\bar{b}^{-q})^j \le$$

$$\le \bar{M}\ \frac{\tilde{b}\bar{a}^{-1}\bar{a}\ \bar{b}^{-q}}{1-\bar{a}\bar{b}^{-q}}\ \bar{b}^{\,qt} \le \bar{M}\ \frac{\tilde{b}}{\bar{b}^{q}-\bar{a}}\bar{b}^{\,qt} \le \bar{M}\ \bar{\Delta}\ \bar{b}^{\,qt}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (21) доведено вже для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Згідно з (21), (20_{i+1}) отримуємо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty} |A|^{j-1}\,|B|\,|x_i(q(t-j))| \le$$

$$\le \tilde{b}\sum_{j=1}^{\infty}\bar{a}^{\,j-1}\bar{M}\ \bar{\Delta}^i\bar{b}^{\,q(q(t-j))} \le$$

$$\le \bar{M}\ \bar{\Delta}^i\ \tilde{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{\,q^2 t}\sum_{j=1}^{\infty}(\bar{a}\ \bar{b}^{-q^2})^j \le$$

$$\le \bar{M}\bar{\Delta}^i\ \tilde{b}\ \bar{a}^{-1}\bar{b}^{\,qt}\sum_{j=1}^{\infty}(\bar{a}\bar{b}^{-q})^j \le$$

$$\le \bar{M}\ \bar{\Delta}^i\ \frac{\tilde{b}\bar{a}^{-1}\bar{a}\bar{b}^{-q}}{1-\bar{a}\ \bar{b}^{-q}}\bar{b}^{\,qt} \le \bar{M}\ \bar{\Delta}^{i+1}\bar{b}^{\,qt},$$

звідки випливає оцінка (21) при $i+1$.

Отже, ми довели, що ряди (20_i), $i = 1,$ $2, \ldots$, рівномірно збігаються при $t \le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $x_i(t)$, $i = 1,$ $2, \ldots$, що задовольняють оцінки (21). Цим самим ми показали, що ряд (3) рівномірно збігається при $t \le 0$ до деякої неперервної вектор-функції $x(t)$, яка задовольняє умову

$$|x(t)| \le \frac{\bar{M}}{1-\bar{\Delta}}$$

і є розв'язком системи рівнянь (1). Теорему 6 доведено.

Висновки

У цій статті отримано нові умови існування неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини. Зокрема, в теоремі 1 доведено існування сім'ї неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної *1*-періодичної вектор-функції $\omega(t)$ при виконанні умов $0 <$ $< a_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$, $q > 1$, та $a^q < b$, $\Delta =$ $= \dfrac{\tilde{b}}{b(1-b^{-1}a^q)} < 1$, де $\tilde{b} = |B|$. Розв'язки якої представляються у вигляді ряду (3), де $x_i(t)$, $i =$ $= 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції, які є розв'язками послідовності систем рівнянь (4_i), $i = 0, 1, \ldots$, та задовольняють оцінки (5_0) і (6).

У теоремі 3 доведено існування сім'ї неперервних обмежених при $t \le 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної *1*-періодичної вектор-функції $\omega(t)$ при виконанні умов $a_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$, та $b^q > a$, $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{b^q - a} < 1$, $b > 1$, $a > 1$.

Також розглянуто випадок, коли $0 < a_i < < 1 < a_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{m+1, n}$, $0 \le m \le n$, $q > 1$ (теореми 5, 6).

Отримані результати доповнюватимуть уже існуючі праці інших математиків і сприятимуть подальшому вивченню неперервних розв'язків більш широких класів таких рівнянь.

У майбутньому цей матеріал буде використано при дослідженні систем функціонально-різницевих рівнянь (1) у випадку, коли $A = A(t)$, $B = B(t)$.

1. *Agarwal R.P.* Difference Equations and Inequalities, Theory, Methods and Applications. – Second Edition. – Revised and Expanded. – 2000. – 972 p.
2. *Мартынюк Д.И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – К.: Наук. думка, 1972. – 248 с.
3. *Солдатов М.А., Миролюбов А.А.* Линейные однородные разностные уравнения. – М.: Наука, 1981. – 206 с.
4. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – К.: Наук. думка, 1986. – 280 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
7 червня 2011 року