УДК 518.9

Л.В. Барановська

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВА ЗАДАЧА ГРУПОВОГО ЗБЛИЖЕННЯ З НЕФІКСОВАНИМ ЧАСОМ

In this paper, we tackle the group approach problem with unfixed time. The information on the initial function and the prehistory of the evader's control is used in the course of the game. We propose the way of solving the problem with unfixed time where the evader's mistakes can be used for reducing the time of approach. The game is considered to be over when an integral of some numeral function describing the course of the game is getting equal to the unit. Our research method is based on Minkowski's inverse functionals of multi-valued maps closely related to the conflict-controlled process as well as on constructing the resolving functions. Additionally, L.S. Pontryagin's condition is at the heart of the method's scheme. It allows choosing pursuers' control in the form of Borel's measurable selections of the specific multi-valued map. Moreover, there is the period of switching from the method of resolving functions to the Pontryagin's first direct method. Finally, we single out specific classes for differential-difference systems for which there is no such dependence.

Вступ

Диференціальні ігри належать до одного з розділів математичної теорії керування, де розглядаються об'єкти, які рухаються і функціонують в умовах конфлікту і невизначеності. У диференціальних іграх групового зближення з нефіксованим часом моделюється конфліктно-керований процес з одним втікачем іількома переслідувачами. Метою таких ігор є знаходження умов на параметри процесу і початковий стан системи, за яких хоча б один із переслідувачів "спіймає" втікача не пізніше певного часу.

При розв'язуванні задач групового зближення існують два основних підходи. Перший з них пов'язаний із позиційним переслідуванням і розвиває правило екстремального прицілювання М.М. Красовського. Другий підхід базується на використанні обернених функціоналів Мінковського [1] і побудові розв'язувальних функцій [2]. Для реалізації цього підходу необхідна інформація про передісторію керування втікача з урахуванням його миттєвого значення. Коло задач групового зближення у цьому випадку набагато ширше. Для диференціальних задач групового зближення з нефіксованим часом добре відомий метод розв'язувальних функцій, у якому, якщо втікач робить помилку, існує час переключення на перший прямий метод Понтрягіна [2]. Однак для диференціально-різницевої задачі зближення загалом не існує такої можливості зменшити час закінчення гри. Причиною цього є залежність розв'язувальної функції від часу. У зв'язку з цим виникає актуальна проблема виділити певні класи диференціально-різницевих ігор, для яких можна розв'язати задачу групового зближення з нефіксованим часом.

Постановка задачі

У даній статті запроваджується метод розв'язувальних функцій для диференціально-різницевої задачі групового зближення з нефіксованим часом. Раніше цей метод був розроблений для диференціально-різницевих задач з фіксованим часом [3, 4]. Мета статті — виділити певний клас таких ігор, для яких існує можливість врахувати помилки втікача і закінчити гру за найкоротший час.

Основні результати

Розглянемо задачу групового зближення з ν переслідувачами і одним втікачем [3].

Нехай керована система описується диференціально-різницевими рівняннями запізнюючого типу

$$\dot{z}_i(t) = A_i z_i(t) + B_i z_i(t-\tau_i) + \varphi_i(u_i, v), \qquad (1)$$

$$z_i \in \mathrm{R}^{n_i},\ u_i \in U_i,\ v \in V,\ i = 1,\dots,\nu,$$

де R^{n_i} – n_i-вимірний евклідовий простір; A_i, B_i — сталі квадратні матриці порядку n_i; U_i, V — непорожні компакти; функції $\varphi_i : U_i \times V \to \mathrm{R}^{n_i}$ належать класу C^0 на $[0; +\infty)$; $\tau_i = \mathrm{const} > 0$.

Початковим станом системи (1) є дійсна функція

$$z(t) = z^0(t),\quad z^0(t) = (z_1^0(t), \dots, z_\nu^0(t)),$$

де $z_i^0(t)$ – абсолютно неперервні функції, визначені на відрізку $[-\tau_i, 0]$.

Станом системи (1) в момент t є кусок траєкторії

$$z^t(\cdot) = (z_1^t(\cdot), \dots, z_\nu^t(\cdot)),$$

де $z_i^t(\cdot) = \{z_i(t+s), -\tau_i \le s \le 0\}$.

Лема. Нехай конфліктно-керований процес описується системою виду (1), де $A = aE$, $B = bE$. Тоді фундаментальна матриця такої системи має властивість $K(t-s) = K(t)e^{-s}$.

У просторі $R^n = R^{n_1} \times \ldots \times R^{n_\nu}$ виділимо термінальну множину M^*, яка складається з множин $M_i^* \subset R^{n_i}$, $i = 1, \dots, \nu$, кожна з яких є циліндричною і має вигляд $M_i^* = M_i^0 + M_i$, де M_i^0 – лінійні підпростори з R^{n_i}, M_i – непорожні компакти з ортогонального доповнення L_i до M_i^0 у просторі R^{n_i}.

Позначимо Ω_V сукупність вимірних за Лебегом функцій $v(t)$, $v(t) \in V$, $t \ge 0$. Аналогічно визначаються Ω_{U_i}. Відображення, яке ставить у відповідність $z^0(\cdot)$ елемент з Ω_V, назвемо програмною стратегією втікача, а її конкретну реалізацію при заданому початковому стані $z^0(\cdot)$ процесу (1) будемо називати програмним керуванням. У процесі гри (1) втікач використовує програмне керування $v(\cdot) \in \Omega_V$.

Контркеруваннями переслідувачів, які відповідають початковим станам $z_i^0(\cdot)$, назвемо функції $u_i(t) = u_i(z_i^0(\cdot), t, v(t))$, $t \ge 0$, $i = 1, \dots, \nu$, такі, що якщо $v(\cdot) \in \Omega_V$, то $u_i(\cdot) \in \Omega_{U_i}$.

Будемо казати, що задача групового зближення з нефіксованим часом може бути закінчена з початкового стану $z^0(\cdot)$ не пізніше, ніж за час $T = T(z^0(\cdot))$, якщо існують такі вимірні за Лебегом функції $u_i(t) = u_i(z_i^0(\cdot), v^t(\cdot)) \in U_i$, $t \in [0, T]$, $v^t(\cdot) = \{v(s) : 0 \le s \le t\}$, що розв'язок системи (1) при довільних вимірних за Лебегом функціях $v(t), v(t) \in V, t \in [0, T]$, належить відповідній множині M_i^* у момент $t = T$ хоча б для одного i, $i = 1, \dots, \nu$.

При цих припущеннях, прийнявши сторону переслідувача, знайдемо достатні умови на параметри процесу (1) для закінчення гри за деякий гарантований час.

Нехай π_i – ортопроектор, який діє з R^{n_i} в L_i, $K_i(t)$ – матрична функція [3], яка задовольняє умови:

$K_i(t) = 0,\ t < 0$;

$K_i(0) = E$, де E – одинична матриця;

$K_i(t)$ неперервна на $[0, +\infty)$;

$K_i(t)$ задовольняє рівняння $\dot{K}_i(t) = A_i K_i(t) +$

$\dot{K}_i(t) = A_i K_i(t) + B_i K_i(t - \tau_i)$ при $t > 0$.

Умова. Для початкового стану $z^0(\cdot)$

$$\overline{\text{con}}(M_i - \pi_i K_i(t) z_i^0(0) -$$

$$- \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i K_i(t-s-\tau_i) B_i z_i^0(s) ds) \cap \pi_i K_i(t-s) \varphi_i(U_i, v) \ne \varnothing$$

для всіх $i = 1, \dots, \nu$, $0 \le s \le t < +\infty$, $v \in V$.

Введемо розв'язувальну функцію

$$\rho_i(t, s, z_i^0(\cdot), v) =$$

$$= \sup\{\rho \ge 0 : \rho(M_i - \pi_i K_i(t) z_i^0(0) -$$

$$- \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i K_i(t-s-\tau_i) B_i z_i^0(s) ds) \cap \pi_i K_i(t-s) \times$$

$$\times \varphi_i(U_i, v) \ne \varnothing\},$$

$$i = 1, \dots, \nu,\ 0 \le s \le t < +\infty,\ v \in V.$$

Вона напівнеперервна зверху по t, s, v, якщо набуває скінченних значень.

Покладемо

$$T_\nu(z^0(\cdot)) =$$

$$= \min\{t \ge 0 : \inf_{v(\cdot) \in \Omega_V} \max_{i=1,\dots,\nu} \int_0^t \rho_i(t, s, z_i^0(\cdot), v) ds \ge 1\}.$$

Теорема. Нехай процес (1) такий, що $A_i = a_i E, B_i = b_i E$, $M_i = \{0\}$, $i = 1, \dots, \nu$; $\pi_i K_i(t) = K_i(t) \pi_i$; виконується умова і $T_\nu(z^0(\cdot)) < +\infty$.

Тоді така гра може буди закінчена з початкового стану $z^0(\cdot)$ не пізніше, ніж за час $T_\nu(z^0(\cdot))$.

Д о в е д е н н я. З умов теореми випливає, що розв'язувальна функція не залежить від *t*. Дійсно, враховуючи лему, маємо

$$\rho_i(t, s, z_i^0(\cdot), v) = \sup\{\rho \ge 0 : -\rho(\pi_i K_i(t) z_i^0(0) +$$

$$+ \int_{-\tau_i}^{0} K_i(t-s) B_i z_i^0(\text{s}) ds) \in \pi_i K_i(t-s) \varphi_i(U_i, v)\} =$$

$$= \sup\{\rho \ge 0 : -\rho(\pi_i z_i^0(0) + B_i \int_{-\tau_i}^{0} e^{-s} z_i^0(s)ds) \in$$

$$\in \pi e^{-s}\varphi_i(U_i, v)\} = \rho_i(s, z_i^0(\cdot), v).$$

Нехай $v(s), 0 \le s \le T_\nu(z^0(\cdot))$, – деяка вимірна за Лебегом функція зі значеннями з множини V. Розглянемо певну функцію

$$h(t) = 1 - \max_{i=1,\dots,\nu} \int_0^t \rho_i(s, z_i^0(\cdot), v(s))\,ds.$$

Нехай t_* – найменший додатний корінь рівняння $h(t) = 0$. Очевидно, що $t_* \le T(z^0(\cdot))$.

Розглянемо багатозначне відображення

$$U_i(s,v) = \{u_i \in U_i : \pi_i e^{-s}\varphi_i(U_i, v) =$$

$$= -\rho_i(s, z_i^0(\cdot), v)\cdot(\pi_i z_i^0(0) + \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i e^{-s} B_i z_i^0(s)ds)\},$$

$$i = 1,\dots,\nu.$$

Керування переслідувачів на інтервалі $[0, t_*]$ покладемо рівними $u_i(s) = u_i(s, v(s))$, $i = 1,\dots,\nu$, де $u_i(s,v) = \operatorname{lex\,min} U_i(s,v)$.

В силу [2] керування будуть вимірними за Лебегом функціями.

Оскільки $h(t_*) = 0$, то існує такий номер $i_* \in \{1,\dots,\nu\}$, що

$$1 - \int_0^{t_*} \rho_{i_*}(s, z_{i_*}^0(\cdot), v(s))\,ds = 0.$$

З формули Коші [5], враховуючи закон вибору керувань, одержимо

$$\pi_{i_*} z_{i_*}(t_*) = \pi_{i_*} K_{i_*}(t_*) z_{i_*}^0(0) + \int_{-\tau_{i_*}}^{0} \pi_{i_*} K_{i_*}(t_* - s) B_{i_*} z_{i_*}^0(s)ds +$$

$$+ \int_0^{t_*} \pi_{i_*} K_{i_*}(t_* - s)\varphi_{i_*}(u_{i_*}(s), v(s))ds = K_{i_*}(t_*)[\pi_{i_*} z_{i_*}^0(0) +$$

$$+ \int_{-\tau_{i_*}}^{0} \pi_{i_*} e^{-s} B_{i_*} z_{i_*}^0(s)ds + \int_0^{t_*} \pi_{i_*} e^{-s}\varphi_{i_*}(u_{i_*}(s), v(s))\,ds] =$$

$$= K_{i_*}(t_*)[\pi_{i_*} z_{i_*}^0(0) + \int_{-\tau_{i_*}}^{0} \pi_{i_*} e^{-s} B_{i_*} z_{i_*}^0(s)\,ds] \times$$

$$\times [1 - \int_0^{t_*} {}_{i_*}\rho(s, z_{i_*}^0(\cdot), v(s))ds] = 0.$$

Звідси $z_{i_*}(t_*) \in M_{i_*}^*$. Теорема доведена.

Наслідок. Нехай конфліктно-керований процес (1) лінійний, $A_i = a_i E, B_i = b_i E$, $M_i = \{0\}$, $i = 1,\dots,\nu$, $\pi_i K_i(t) = K_i(t)\pi_i$, і нехай існують неперервні додатні функції $r_i(t) : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, такі, що $\pi_i e^t U_i = r_i S_i$, $i = 1,\dots,\nu$, де S_i – одинична сфера простору L_i з центром в нулі. Тоді розв'язувальні функції $\rho_i(s, z_i^0(\cdot), v)$ при $\|\pi_i z_i^0(0) + \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i e^{-s} B_i z_i^0(s)\,ds\| \ne 0$ є більшими додатними коренями квадратних рівнянь

$$\|\pi_i e^{-s} v - \rho_i(\pi_i z_i^0(0) + \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i e^{-s} B_i z_i^0(s)\,ds)\| = r_i(-s)$$

відносно $\rho_i > 0$, $i = 1,\dots,\nu$.

Д о в е д е н н я. З означення розв'язувальної функції $\rho_i(s, z_i^0(\cdot), v)$, враховуючи умови, маємо, що розв'язувальна функція є таким максимальним числом ρ_i, що

$$-\rho_i[\pi_i z_i^0(0) +$$

$$+ \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i e^{-s} B_i z_i^0(s)ds] \cap [\pi_i e^{-s} U_i - \pi_i e^{-s} v] \ne \varnothing.$$

Останнє рівносильне включенню

$$\pi_i e^{-s} v - \rho_i[\pi_i z_i^0(0) + \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i e^{-s} B_i z_i^0(s)\,ds] \in r_i(-s)S_i.$$

В силу лінійності тут лівої частини по ρ_i при максимальному ρ_i вектор $\pi_i e^{-s} v - \rho_i[\pi_i z_i^0(0) + \int_{-\tau_i}^{0} \pi_i e^{-s} B_i z_i^0(s)ds]$ буде лежати на межі сфери $r_i(-s)S_i$. Іншими словами, довжина вектора буде дорівнювати радіусу сфери, що і виражено рівністю, яка доводилась.

Приклад

Розв'яжемо задачу групового зближення

$$\dot z_i(t) = b z_i(t - \tau_i) + u_i(t) - v(t),\ z_i \in \mathrm{R}^{n_i},\ i = 1,\dots,\nu,$$

$$0 < b < 1,\ \tau_i > 0,\ \|u_i\| \le 1,\ \|v\| \le 1 - b,$$

з початковим станом $z_i(t) = z_i^0, -\tau_i \le t \le 0$, методом розв'язувальних функцій з нефіксованим часом. Це можна зробити через виконання умов теореми.

Знайдемо розв'язувальні функції $\rho_i(s, z_i^0(\cdot), v)$.

Виберемо $r_i(t)=e^t$. Тоді $e^tU_i=r_i(t)S_i$. Згідно з наслідком, при $z_i^0(0)+\int\limits_{-\tau_i}^{0}e^{-s}bz_i^0(s)ds\in 0$ $\rho_i(s,z_i^0(\cdot),v)$ є більшими додатними коренями рівняння $\|e^{-s}v-\rho_i\xi_i(z_i^0)\|=e^{-s}$, де $\xi_i(z_i^0)=$ $=z_i^0(1+b-be^{\tau_i})$. Звідси одержимо

$$\rho_i=\frac{2e^{-s}(v,\xi_i(z_i^0))+\sqrt{\begin{array}{l}4e^{-2s}(v,\xi_i(z_i^0))^2-\\-4e^{-2s}\|\xi_i(z_i^0)\|^2(\|v\|^2-1)\end{array}}}{2\|\xi_i(z_i^0)\|^2}=$$

$$=e^{-s}\frac{(v,\xi_i(z_i^0))+\sqrt{(v,\xi_i(z_i^0))^2-\|\xi_i(z_i^0)\|^2(\|v\|^2-1)}}{\|\xi_i(z_i^0)\|^2}=$$

$$=e^{-s}\rho_i(z_i^0,v).$$

Маємо час завершення гри

$$T_\nu(z^0)=$$

$$=\min\{t\ge 0:\inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\max_{i=1,\dots,\nu}\int\limits_0^t e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds=1\}.$$

Знайдемо достатні умови скінченності часу зближення.

Позначимо $\delta(z^0)=\min\limits_{v(\cdot)\in\Omega_V}\max\limits_{i-1,\dots,\nu}\rho_i(z_i^0,v)$, тоді маємо

$$\inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\max_{i=1,\dots,\nu}\int\limits_0^t e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds=$$

$$=\inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\max_{\lambda\in\Sigma}\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i\int\limits_0^t e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds\ge$$

$$\ge\inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\sum_{i=1}^{\nu}\frac{1}{\nu}\int\limits_0^t e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds=$$

$$=\frac{1}{\nu}\inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\int\limits_0^t\sum_{i=1}^{\nu}e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds=$$

$$=\frac{1}{\nu}\int\limits_0^t\inf_{v(\cdot)\in\Omega_V}\sum_{i=1}^{\nu}e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds\ge$$

$$\ge\frac{1}{\nu}\int\limits_0^t\min_{\|v\|\le 1}\max_{i=1,\dots,\nu}e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds=$$

$$=\frac{\delta(z^0)}{\nu}\int\limits_0^t e^{-s}ds=\frac{\delta(z^0)}{\nu}(1-e^{-t}),$$

де Σ – це $(\nu-1)$-вимірний симплекс [6]:

$$\sum=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_\nu):\sum_{i=1}^{\nu}\lambda_i=1,\lambda_1\ge 0,\dots,\lambda_\nu\ge 0\}.$$

Таким чином,

$$\inf_{v(\cdot)\in V}\max_{i=1,\dots,\nu}\int\limits_0^t e^{-s}\rho_i(z_i^0,v(s))ds\ge\frac{\delta(z^0)}{\nu}(1-e^{-t}),$$

звідки знаходимо оцінку зверху для часу зближення:

$$T_\nu(z^0)\le\ln\left(1-\frac{\nu}{\delta(z^0)}\right)^{-1}. \quad (2)$$

З останньої рівності випливає, що час групового зближення $T_\nu(z^0)$ скінченний, якщо $\delta(z^0)>0$.

Покажемо, що якщо $0\in\operatorname{int}co\left\{\bigcup\limits_{i=1,\dots,\nu}\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}\right\}$, то $\delta(z^0)>0$.

Нерівність $\delta(z^0)>0$ виконується, якщо

$$\min_{\|v\|=1}\max_{i=1,\dots,\nu}\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|},v\right)>0 \text{ для всіх } t>0. \quad (3)$$

Дійсно, якщо виконується (3), то розглянувши випадки $\|v\|=0$ і $\|v\|=1$, одержимо $\delta(z^0)>0$.

Покажемо, що нерівність (3) має місце, якщо нуль простору R^{n_i} належить внутрішності випуклої оболонки, натягнутої на вектори

$$0\in\operatorname{int}co\left\{\bigcup_{i=1,\dots,\nu}\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}\right\}. \quad (4)$$

Оскільки маємо випуклу оболонку ν точок, то включення (4) означає, що нуль належить внутрішності випуклого багатогранника, натягнутого на одиничні вектори $\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|}$, $i=1,\dots,\nu$; і оскільки випуклий багатогранник є компактом, а його опорна функція [2, 6] дорівнює $\max\limits_{i=1,\dots,\nu}\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|},v\right)$, то з (4) одержимо $0<\max\limits_{i=1,\dots,\nu}\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|},v\right)$ для всіх v, $\|v\|=1$.

Оскільки ліва частина нерівності не залежить від *v*, то

$$\min_{\|v\|=1}\max_{i=1,\dots,\nu}\left(\frac{z_i^0}{\|z_i^0\|},v\right)>0.$$

Таким чином, якщо нуль простору R^n належить внутрішності випуклої оболонки, натягнутої на вектори $\frac{z_i^0}{\| z_i^0 \|}$, $i = 1, \ldots, \nu$, то траєкторія процесу може бути приведена на термінальну множину не пізніше скінченного моменту $T_\nu(z^0)$. При цьому, якщо $t_* = t_*(v(\cdot))$, $t_* \le T_\nu(z^0)$, нуль контрольної функції [2], то керування переслідувачів, які реалізують час $T_\nu(z^0)$, на інтервалі $[0, t_*]$ мають вигляд

$$u_i(s) = v(s) - \rho_i(z_i^0, v(s))\, z_i^0 (1 + b - be^{\tau_i}),\ i = 1, \ldots, \nu,$$

де

$$\rho_i(z_i^0, v(s)) = e^{-s} \frac{(v, z_i^0) + \sqrt{(v, z_i^0)^2 - \| z_i^0 \|^2 (\| v \|^2 - 1)}}{(1 + b - be^{\tau_i}) \| z_i^0 \|^2}.$$

Отже, знайдено час закінчення гри та побудовані керування переслідувачів так, щоб “спіймати” втікача не пізніше цього часу.

Висновки

Запроваджений метод розв’язувальних функцій для диференціально-різницевої задачі групового зближення з нефіксованим часом відкриває широкі можливості моделювання конфліктно-керованих процесів диференціально-різницевими системами, оскільки саме такі системи враховують передісторію процесу, що є більш адекватним у реальних задачах.

З урахуванням великої перспективи одержаних наукових результатів далі планується розширити клас диференціально-різницевих задач, для яких можна застосувати розроблений метод. Оскільки системи диференціально-різницевих рівнянь розв’язуються значно складніше за звичайні диференціальні системи, то планується розв’язання більш широкого кола прикладів диференціально-різницевої задачі групового зближення з нефіксованим часом, а також знаходження їх практичного застосування.

1. *Барановська Л.В.* Метод обернених функціоналів Мінковського у функціонально-диференціальній грі переслідування // Матеріали XI Міжнар. наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. – Київ, 2006. – С. 764.
2. *Чикрий А.А.* Конфликтно управляемые процессы. – К.: Наук. думка, 1992. – 384 с.
3. *Барановская Л.В., Барановская Г.Г.* О дифференциально-разностной игре группового преследования // Доп. НАН України. – 1997. – № 3. – С. 12–15.
4. *Барановская Л.В.* О методе интегральных преобразований для систем с памятью // Мат. модели и вычислительный эксперимент в материаловедении. – К.: ИПМ НАН Украины, 2007. – Вып. 9. – С. 45–51.
5. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 254 с.
6. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1980. – 330 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ “КПІ”

Надійшла до редакції
18 травня 2011 року