УДК 519.688:519.7

С.В. Лазаренко, О.С. Макаренко

АНАЛІЗ ЛОГІСТИЧНОГО АНТИСИПАЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ІЗ СИЛЬНОЮ АНТИСИПАЦІЄЮ

This article is dedicated to research of the logistic equation with the first order strong anticipation, to the research of the stability scopes of its fixed points in parameter space and to the sufficient condition for the existing of the accumulating hyperincursion behaviors. We consider anticipatory system constructed by the multivalue evolution operator with two selectors. During investigating we are using the dynamic system iterating tools with the multivalue operators, Lamerey diagrams using witch we describe main types of hyperincursion. We use basic concepts of the discrete anticipatory system theory of such type. During investigating of such system we are separating a few hyperincursion behavior types by changing of the cardinality of system state sets. In particular cases of hyperincyrsion behavior it can be emerging of fractal structure. It has a significant practical interest. It is advisable to use the stability scopes of the fixed points in the anticipatory system parameter space for an investigation of various transition scenarios from the regular behavior to chaos of such systems. We formulate the sufficient condition for the existing of the accumulating hyperincursion behaviors.

Вступ

Стаття присвячена досить новому напряму математичного моделювання — обчислювальним системам із антисипацією (чи антисипаційним системам) (далі АС), що активно розвивається в останні десятиліття. Широкий клас процесів, що протікають у соціально-економічному та політичному житті людини, так чи інакше можна формально виражати через так звані системи із випередженням, на відміну від систем із затримками. Такі системи називаються антисипаційними системами, або системами із антисипацією. Це стосується як моделювання поведінки натовпу, рефлексії, так і прийняття індивідуальних рішень при багатозначних можливих варіантах, у т.ч. й у фінансово-економічній сфері (конфлікти за обмежені ресурси тощо). Таким чином, ця сфера математичного моделювання має особливе значення у дослідженні складних соціально-економічних та політичних процесів.

Початком розвитку цього напряму обчислювальних систем вважають працю американського біолога Р. Розена “Антисипаційні системи” [1]. Він відомий, зокрема, в математичній біології як засновник класу реляційних моделей живих організмів, які називають (M, R)-системами (метаболічних реплікацій), що можна розглядати як послідовні автомати.

Так, у праці [1] Р. Розен дає визначення антисипаційної системи як “системи, що містить прогнозну модель самої себе та/чи навколишнього середовища і яка дає змогу системі змінювати стан у момент часу відповідно до прогнозів цієї моделі, що належать до більш пізнього моменту часу”. Р. Розен розглядає антисипаційні системи як такі, що пов’язані із граничною причиною за Аристотелем. Майбутня причина могла б бути породжена дією теперішнього часу. Тоді виходить, що принцип причинності “перевертається”. Р. Розен пов’язує деякі антисипаційні системи із циклами зі зворотнім зв’язком. Вивчення автономних агентів як антисипаційних систем були ініційовані П. Девідсоном. Він описав ідею обчислювального фреймворку, задавши базову архітектуру антисипаційного агента, що базується саме на слабкій антисипації, та його навчання [2]. Д. Дюбуа ж базується у моделюванні обчислювальних антисипаційних системах на понятті сильної антисипації на противагу слабкій антисипації, яка, як він стверджує, характеризує підхід Р. Розена [3, 4]. Також для дослідження АС вводить поняття гіперінкурсії та інкурсії [3].

Вклад у дослідження таких обчислювальних систем вніс М. Бюрк [5—7]. У [6] він проводить дослідження динаміки слабких антисипаційних систем, утворених із відповідних неатисипаційних системи першого порядку, та порівнює їх поведінку із поведінками відповідних неантисипаційної та сильної антисипаційної систем. У [7] зосереджується на сильних АС, в яких рекурсія першого порядку замінюється зв’язаною інкурсією, та досліджує вплив такої заміни на стійкість непорушних точок і циклів.

З-поміж вітчизняних праць варто відзначити праці [8—11], зокрема у побудові моделей нейронних мереж із елементами прогнозування на основі антисипації при моделюванні суспільних процесів. Такі моделі передбачають наявність індивідуальних ментальних властивостей об'єктів моделювання. Також розглядається застосування теорії антисипації при конструюванні нових моделей клітинних автоматів [10].

Однак динаміка сильних АС із багатозначним оператором еволюції все ще залишається малодослідженою сферою таких обчислювальних систем, тому і присвячуємо нашу роботу дослідженню саме такого класу обчислювальних систем.

Постановка задачі

Метою роботи є проведення аналізу логістичної антисипаційної системи із сильною антисипацією першого порядку, виділення областей стійкості непорушних точок у просторі параметрів та формулювання достатньої умови виникнення гіперінкурсії із накопиченням станів.

Короткий опис АС, що розглядаються

Введемо основні поняття АС. Дискретночасові динамічні системи (інколи зустрічаємо "причинні") описуються, як правило, рекурсійними співвідношеннями, що задаються функціональним зв'язком між майбутніми (x_{t+i}, $i = 1, 2, \dots$) та поточним (x_t) і минулими (x_{t-i}, $i = 1, 2, \dots$) станами системи і керуючими параметрами ($\bar{p}$):

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, \bar{p}).$$

Д. Дюбуа вводить поняття інкурсійності як неявної рекурсійної системи [3], що задається в загальному випадку співвідношенням

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, \dots, \bar{p}). \quad (1)$$

Розрізняють дві основні групи АС – слабкі та сильні. Слабкі АС із дискретним часом використовують модель, що працює у так званому "швидкому прямому" режимі ("fast forward"), створюючи прогнози станів динамічної системи в наступні моменти часу. Потім із використанням цих прогнозних значень будуються майбутні стани систем у режимі реального часу, тобто таку систему можна формально подати як

$$x_{t+1} = f(\dots, x_{t-1}, x_t, \hat{x}_{t+1}, \dots, \bar{p}),$$

де $\hat{x}_{t+1}$ – прогнозований моделлю стан системи в момент часу $t+1$.

Сильна ж АС при визначені майбутнього стану системи не використовує вбудовану модель для побудови прогнозних майбутніх значень, а є швидше системою, що будується на основі самої себе (посилається на себе). Залежно від унікальності (однозначності) x_{t+1}, що задає функціональний зв'язок f, вирізняють особливий клас інкурсійних АС (1), що мають своїм оператором еволюції в загальному випадку багатозначне відображення, – так звані гіперінкурсійні АС [3].

Значний інтерес у дослідженні АС із сильною антисипацію становлять зв'язні системи із малим параметром зв'язку (системи зв'язних рівнянь), оскільки вони є джерелом дослідження синхронізації антисипаційних систем [11]. Динаміка таких систем особливо важлива, оскільки описує взаємодію контрагентів, здатних до антисипації, у боротьбі за ресурси (вирішення конфліктів).

На сьогодні малодослідженими залишаються сильні АС. Для дослідження такого роду обчислювальних систем першочерговими задачами є: проведення загального аналізу відповідних відображень, виділення областей гіперінкурсії та інкурсії, чому і присвячена в основному дана стаття. Розглядатимемо квадратичну сильну АС першого порядку.

Загальний аналіз відображення

Будемо розглядати динаміку АС із сильною антисипацією першого порядку в загальному вигляді, що подається як

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n+1}, \Lambda),$$

де Λ – вектор керуючих параметрів $(\lambda;\alpha)$.

Як об'єкт дослідження такого роду АС будемо розглядати модифіковане логістичне рівняння із привнесеною антисипаційною складовою

$$x_{n+1} = \lambda \cdot x_n \cdot (1 - x_n) - \alpha \cdot x_{n+1}^2, \quad (2)$$

де $\lambda;\alpha$ – параметри, що визначають логістичну й антисипаційну частини АС відповідно. Таке рівняння цікаве тим, що при деякому керуючому Λ співвідношення (2) набуває вигляду добре відомого логістичного рівняння, яке володіє, як відомо, "багатою" динамікою, описуючи процес зміни чисельності популяцій. Зрозуміло, що в динаміку процесу зміни чисельності популяцій повною мірою доцільно включати фактори, що враховуватимуть оцінки ("відображення") чисельності популяції в майбутньому, тобто включатимуть передбачення (антисипацію).

Отже, непорушні точки відображення (2) знайдемо з рівняння $x = \lambda \cdot x \cdot (1 - x) - \alpha \cdot x^2$. Ними, очевидно, є $x_1^* = 0$ і $x_2^* = \dfrac{\lambda - 1}{\alpha + \lambda}$.

Для подальшого загального аналізу дискретне відображення (2) зручно подати у вигляді $f_\lambda(x_n) = f_\alpha(x_{n+1})$, де

$$\begin{aligned} f_\lambda(x_n) &= \lambda x_n (1 - x_n), \\ f_\alpha(x_{n+1}) &= \alpha x_{n+1}^2 + x_{n+1}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Їх екстремальні значення становлять відповідно $f_\lambda(1/2) = \lambda/4$ і $f_\alpha(-1/2\alpha) = -1/4\alpha$. Відображення (2) задає в загальному випадку багатозначне відображення, визначене двома селекторами (гілками):

$$x_{n+1} = \\ = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda\alpha x_n (1 - x_n)}}{2\alpha} = f_{1,\alpha}^{-1}(f_\lambda(x_n)) = f_1(x_n), \\ \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda\alpha x_n (1 - x_n)}}{2\alpha} = f_{2,\alpha}^{-1}(f_\lambda(x_n)) = f_2(x_n). \end{array} \right.$$

Стійкість непорушних точок

Наступним кроком буде визначення областей стійкості непорушних точок у просторі керуючих параметрів. Для цього знайдемо похідні кожної гілки $\dfrac{dx_{n+1}}{dx_n} = \dfrac{\lambda(1 - 2x_n)}{2\alpha \cdot x_{n+1} + 1} = $ $= \pm \dfrac{\lambda(1 - 2x_n)}{\sqrt{1 + 4\lambda\alpha \cdot x_n (1 - x_n)}}$. Зрозуміло, що непорушна точка x_1^* буде стійкою за умови, коли її мультиплікатор не перевищує по модулю 1:

$$\frac{|\lambda(1 - 2x)|}{\sqrt{1 + 4\lambda\alpha \cdot x(1 - x)}} < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 1,$$

непорушна точка x_2^* буде стійкою за умови

$$\frac{|\lambda(1 - 2x)|}{\sqrt{1 + 4\lambda\alpha \cdot x(1 - x)}} < 1 \Leftrightarrow |2\lambda + \lambda\alpha - \lambda^2| <$$

$$< \sqrt{(\lambda - \alpha)(\lambda - \alpha + 4\alpha\lambda) + 4\alpha^2\lambda^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(1 - \lambda)(\lambda - 1/3)(\alpha + \lambda)\left(\alpha - \lambda \frac{\lambda - 3}{3\lambda - 1}\right) < 0.$$

На рис. 1 сірим кольором у просторі параметрів показано області стійкості x_2^*.

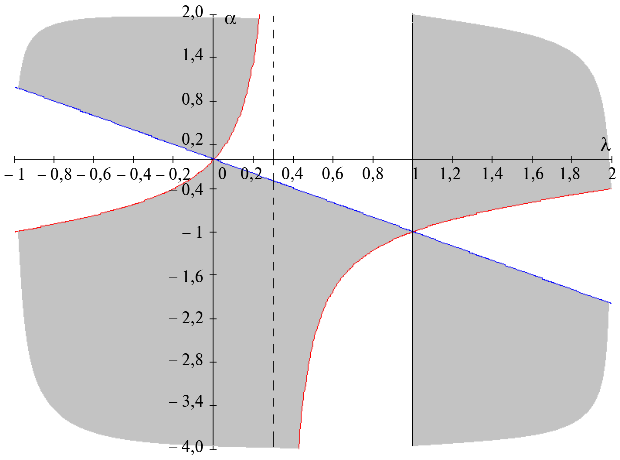

Рис. 1. Області стійкості x_2^*

Різні типи гіперінкурсії

Як було зазначено при описі АС, гіперінкурсія — явище множинності розв'язків антисипаційного відображення. Режим гіперінкурсійності може бути кількох типів. Для опису кожного типу гіперінкурсії спочатку відзначимо, що траєкторія АС описується послідовністю $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, де X_n — стан у дискретний момент часу n, в загальному випадку представлений множиною $X_n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots, x_m^n\}$ і $X_n = \bigcup_{i=1}^{k} f_i(X_{n-1})$, де f_i — селектор багатозначного оператора еволюції АС. Отже, можна виділити такі типи гіперінкурсійної поведінки. Перший (будемо називати його "накопичувальним") описується постійним зростанням послідовності $p_n = |X_n|$, де $|X_n|$ — потужність n-го стану динамічної системи, другий — із постійним зменшенням p_n (зокрема, $p_n \equiv 1$). Третій випадок виділяється, коли p_n можуть почергово зростати та спадати (хаотично чи регулярно), і четвертий — при незмінному p_n.

Зосередимося на першому типі гіперінкурсії. Зрозуміло, що необхідною умовою її виникнення є багатозначність (2), тобто виконання умови $1 + 4\lambda\alpha x_n(1 - x_n) > 0$. Однак цього

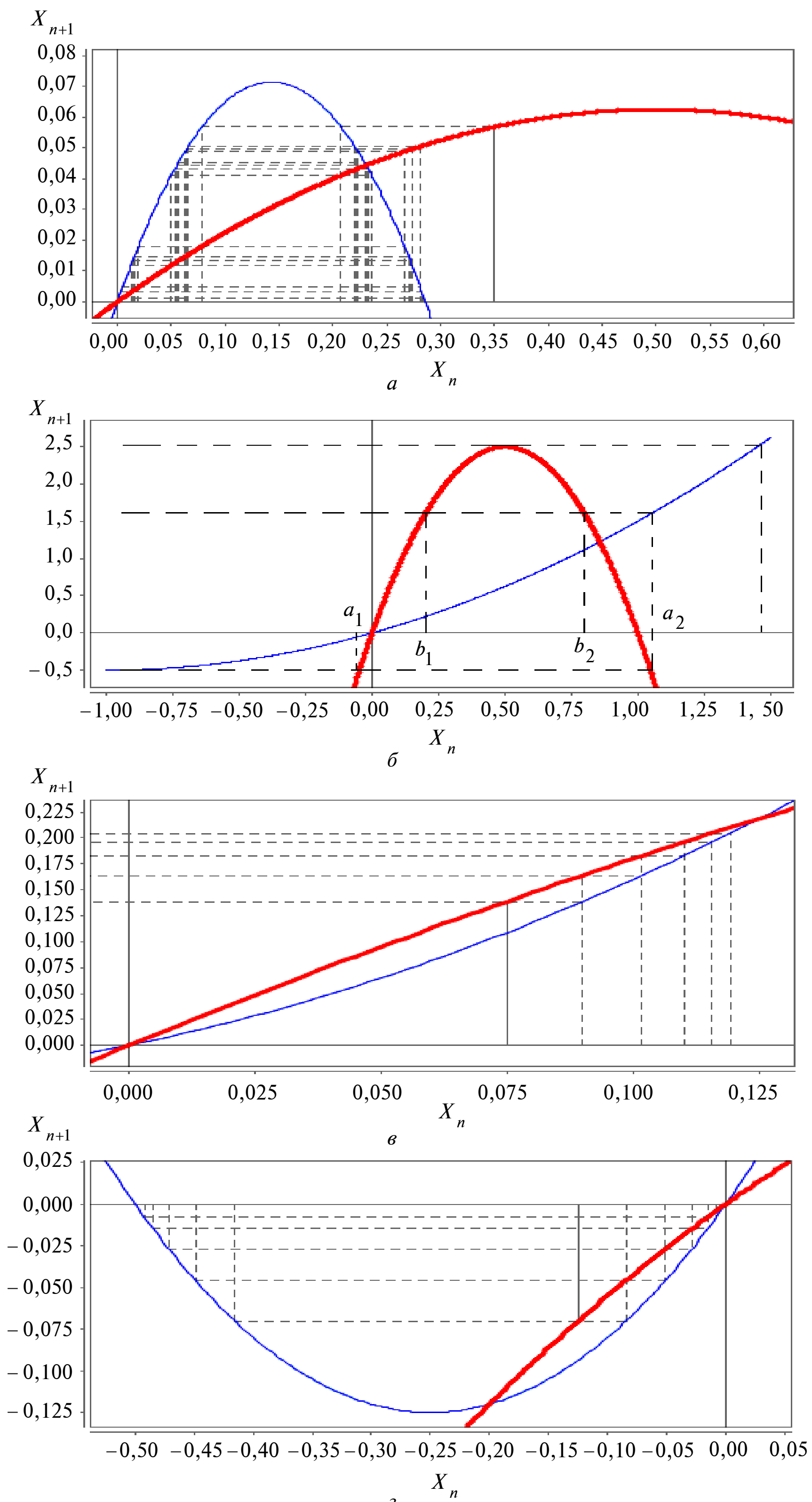

Рис. 2. Діаграми Ламерея: *а* – перші п'ять ітерацій станів АС із параметрами $\lambda = 0,25; \alpha = -3,5$ із початковою точкою, що належить обом басейнам притягання, *б* – АС із параметрами $\lambda = 10; \alpha = 0,5$, *в* – перших п'ять ітерацій АС із параметрами $\lambda = 2; \alpha = 6$, *г* – п'ять ітерацій АС із параметрами $\lambda = 0,5; \alpha = 2$; ——— – криві f_α, ——— – криві f_λ, — — – лінії, що утворюють діаграму Ламерея

не достатньо для її виникнення, оскільки деякі послідовності $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$, що стартують із окремих станів $y_0 = x_i^j$, можуть покидати область, що розглядаємо, чи "перериватися" (мають лише комплексні значення). Таким чином, даний параграф присвятимо пошуку достатньої умови виникнення такого типу гіперінкурсії для відображення (2).

Так, багатозначність (2) матиме місце, коли

$$\begin{cases} \alpha\lambda \in (-1;\, 0), & x_n \in R; \\ \alpha\lambda > 0, & x_n \in (0,5 - \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda};\\ & 0,5 + \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}); \\ \alpha\lambda \in (-\infty;\, -1), & x_n \in (-\infty;\, 0,5 - \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda}) \cup \\ & \cup (0,5 + \sqrt{1 + 1/\alpha\lambda};\, \infty). \end{cases}$$

Для виведення достатньої умови виникнення накопичувальної гіперінкурсії розглянемо чотири випадки нашої АС у вигляді (3) в просторі параметрів λ і α із різними наборами стійкостей пар непорушних точок x_1^* і x_2^* (рис. 2). На рис. 2 зображено криві f_α і f_λ та діаграми Ламерея станів X_n нашої динамічної системи, утворені за допомогою цих кривих. На рис. 2, *а* зображено стани АС, обидві непорушні точки якої – стійкі, на рис. 2, *б* – АС із обома нестійкими непорушними точками, на рис. 2, *в* – ітерації станів АС із єдиною стійкою непорушною точкою x_2^*, на рис. 2, *г* – із єдиною стійкою x_1^*. Рис. 2, *а* цікавий ще й тим, що наглядно можна спостерігати утворення структури із станів X_n АС, що може претендувати на набуття властивостей фрактальності. Нагадаємо, що структура є фракталом, якщо їй властива самоподібність у певному розумінні і вона має не цілу фрактальну розмірність.

З рис. 2, *б*, при старті траєкторії АС із точок поза $(a_1; b_2)$ (кінці цього відрізка – точки, при яких f_λ збігається із екстремумом f_α) вона не матиме наступних дійсних значень ("обірветься"), як, аналогічно, і для будь-якої точки з $(b_1;\ a_2)$. При старті ж із $(a_1; b_1)$ чи $(a_2; b_2)$ в силу нестійкості непорушних точок траєкторії покидатимуть зазначені області та "обриватимуться" чи можуть утворювати цикл, точки якого належатимуть $(a_1; b_1)$ і $(a_2; b_2)$. У випадку стійкості однієї із непорушних точок (рис. 2, *в* і *г*) видно, що ітерації по одному із селекторів можуть покидати басейн притягання до іншої непорушної точки чи "перериватися", тим самим порушуючи умову строгого зростання послідовності p_n. Отже, для того щоб АС проявляла накопичувальну гіперінкурсійність, достатньо, щоб щонайменше дві непорушні точки були стійкими і мали спільний басейн притягання.

Висновки

Розглянуто логістичну АС із сильною антисипацією першого порядку. Така система задається багатозначним оператором еволюції із двома селекторами. В результаті проведеного загального аналізу виділено області стійкості непорушних точок у просторі її параметрів. Ці області слід використовувати при дослідженні різноманітних сценаріїв переходу від регулярної поведінки до хаосу. Виділено різні типи гіперінкурсійної поведінки такої системи на основі зміни потужності станів АС. Кілька таких основних типів гіперінкурсії описуються за допомогою діаграм Ламерея. Для сильної антисипаційної динамічної системи такого типу сформульовано достатню умову виникнення в ній гіперінкурсії з накопиченням станів.

Для подальших досліджень дискретних обчислювальних систем з антисипацією такого роду доцільно використовувати методи карт динамічних режимів для демонстрування сценаріїв переходу від регулярної поведінки до хаотичної із чередуванням різних типів гіперінкурсії, а також застосування показників Ляпунова для візуального зображення областей із хаотичною поведінкою. Значний прикладний інтерес становить визначення умов, за яких потужності множин станів будуть обмежені чи регулярно (хаотично) змінюватимуться, зокрема породжуючи фрактальні структури її станів.

1. *R. Rosen*, Anticipatory Systems: Philosophical, Mathematical and Methodological Foundations. New York: Pergamon Press, 1985, p. 436.
2. *P. Davidsson et al.*, "A Framework for Autonomous Agents based on the Concept of Anticipatory Systems", in Cybernetics and Systems'94, R. Trappi, Ed., 1994, pp. 1427–1434.

3. *D.M. Dubois*, "Introduction to Computing Anticipatory Systems", Int. J. of Computing Anticipatory Syst., Publ. by CHAOS, vol. 2, pp. 3–14, 1998.
4. *D.M. Dubois*, "Review of Incursive, Hyperincursive and Anticipatory Systems – Foundation of Anticipation in Electromagnetism", in Computing Anticipatory Systems: CASYS'99 – 3rd Int. Conf., AIP Conf. Proc., vol. 517, 2000, pp. 3–30.
5. *M.E. Burke*, "Properties of Derived Scalar Anticipatory Systems", in Computing Anticipatory Systems: CASYS'01 – 5th Int. Conf., AIP Conf. Proc., vol. 627, 2001, pp. 49–58.
6. *M.E. Burke*, "Scalar Weak Anticipatory Systems", Ibid, pp. 85–94.
7. *M.E. Burke*, "Further Properties of Derived Scalar Strong Anticipatory Systems", in Computing anticipatory systems: CASYS'03 – 6th Int. Conf., AIP Conf. Proc., vol. 718, 2004, pp. 219–227.
8. *A. Makarenko*, "Anticipating in modeling of large social systems – neuronets with internal structure and multivaluedness", Int. J. of Computing Anticipatory Syst., vol. 13, pp. 77–92, 2002.
9. *A. Makarenko and A. Stashenko*, "Some two-steps discrete-time anticipatory models with "boiling" multivaluedness", in AIP Conf. Proc., vol. 839, 2006, pp. 265–272.
10. *Макаренко О.С., Крушинський Д.А., Гольденгорін Б.І.* Модель клітинного автомата з антисипацією // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 1. – С. 30–35.
11. *A. Makarenko*, "Different type of chaotic behavior for different space and time scales in complex systems", in Proceedings INDS'09, 2nd Int., Workshop on Nonlinear Dynamics and Synchronization, Klagenfurt, AUSTRIA, 2009, pp. 60–64.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу"факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
4 червня 2012 року