УДК 519.832.3+519.711.2

В.В. Романюк

КРИТЕРІЙ УСУНЕННЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛЬНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ З ПРИНЦИПОМ ГАРАНТОВАНО МІНІМАЛЬНИХ АБСОЛЮТНИХ ВТРАТ І СЕРЕДНІМ АРИФМЕТИЧНИМ

There is stated a problem of generation and removal of model uncertainty regarding a single parameter of the being investigated object, which is described with more than one mathematical model. Using the arithmetic mean in removing such single-parameter model uncertainty is compared to the principle of assuredly minimal absolute lacks on the base of the corresponding antagonistic game with symmetric matrix. It has been shown that for the second player optimal strategy, whose support contains equiprobable pure strategies of selecting minimal and maximal values of the being investigated parameter, the corresponding evaluation of the model is not worse than the same evaluation as the arithmetic mean over fixed model values. It is pointed that the nonstrict problem of single-parameter model uncertainty elimination may be solved with the arithmetic mean or principle of assuredly minimal absolute lacks, depending on where minimum of deviate of the being investigated parameter value estimation from its real value is going to be reached. For the strict problem of single-parameter model uncertainty elimination there is suggested to apply all the fixed model values with a probabilistic distribution, being the nearest to the equiprobable distribution within the set of the second player optimal strategies.

Вступ

Усунення невизначеностей є актуальною проблемою теорії прийняття рішень [1, 2] або, зокрема, теорії ігор [3, 4], адже розв’язання практично будь-якої задачі пов’язане з недосконалими знаннями про об’єкт дослідження. В основному можна говорити про три типи невизначеностей, породжуваних відповідними дослідженнями: параметричну [1, 2, 4, 5] (щодо значення невідомого параметра на ненульвимірній підмножині числової прямої), функціональну [6, 7] (щодо невідомої функції у певному функціональному підпросторі) та модельну [8, 9] (де один об’єкт дослідження описується двома або більше математичними моделями, серед яких необхідно вибрати тільки одну). Звичайно, функціональна невизначеність усувається або звужується за допомогою методів усунення параметричної невизначеності (з інтерпретацією кожного значення функції як невизначеного параметра), тоді як усунення модельної невизначеності є найскладнішим через те, що різні моделі можуть давати неодноелементні множини вихідних параметрів [7, 10, 11], причому потужність цих множин, взагалі кажучи, є різною.

Постановка задачі

Вважатимемо, що існує не менше двох математичних моделей для опису одного параметра (стану) досліджуваного об’єкта. Множину всіх цих моделей необхідно принаймні звузити (виключити з неї хоча б один елемент) за критерієм найбільшої придатності до відтворення параметра об’єкта дослідження. При цьому ідеальним буде, зрозуміло, звуження модельної множини до одноелементної множини, тобто коли залишиться єдина модель (найкраща у смислі застосованого критерію) і зникне множинність модельного вибору. Тому метою статті є формулювання критерію усунення модельної невизначеності в однопараметричному описі деякого об’єкта дослідження.

Усування однопараметричної модельної невизначеності через середнє

Нехай для опису одного параметра v деякого об’єкта дослідження є M математичних моделей, де $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, причому i-ту модель подано в неявному вигляді як рівняння

$$\varphi_i(v, \{a_k^{\langle i \rangle}\}_{k=1}^{K_i}) = 0 \quad \forall\ i = \overline{1, M} \tag{1}$$

з K_i визначеними коефіцієнтами $\{a_k^{\langle i \rangle}\}_{k=1}^{K_i}$, $K_i \in \mathbb{N} \quad \forall\ i = \overline{1, M}$. Звісно, невідомий параметр v може бути функцією як часу, так і положення, тому у відображеннях $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ фігуруватимуть також і похідні параметра v за своїми аргументами. Але, не втрачаючи загальність, припустимо, що для зафіксованих аргументів параметра v з i-ї моделі в (1) вдалося визначити його оцінку (наближене значення)

$$v_i = \mu_i(\{a_k^{\langle i \rangle}\}_{k=1}^{K_i}) \quad \forall\ i = \overline{1, M} \tag{2}$$

через відображення μ_i. Тепер, маючи M оцінок $\{v_i\}_{i=1}^M$ досліджуваного параметра v, задачу усунення M модельних невизначеностей у формі рівнянь (1) вдалося звести до задачі вибору одного значення цього параметра з множини M його, взагалі кажучи, різних значень $\{v_i\}_{i=1}^M$, знайдених як (2) або з проміжку

$$[\min(\{v_i\}_{i=1}^M);\ \max(\{v_i\}_{i=1}^M)]. \qquad (3)$$

Задача вибору (прийняття) одного зі значень $\{v_i\}_{i=1}^M$ є більш строгою, ніж задача вибору значення параметра v з проміжку (3), оскільки обмежує вибір дослідника, змушуючи працювати й вибирати лише на скінченній множині $\{v_i\}_{i=1}^M$. Тому звернемося до більш простого варіанта, коли на основі визначених з M моделей (1) за співвідношеннями (2) оцінок $\{v_i\}_{i=1}^M$ необхідно прийняти рішення про значення параметра v у межах відрізка (3). Вважається, що ніяких імовірнісних мір чи розподілів на відрізку (3) не задано і навіть наближено брати нормальний розподіл на ньому не слід, адже прийняття рішення про нормальний розподіл без додаткових умов можливе лише за дуже великого числа M оцінок параметра v, за якими можна буде будувати гістограму відносних частот потрапляння його значень у визначені підінтервали відрізка (3). Тоді очевидним є визначення середнього

$$\bar{v} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} v_i \qquad (4)$$

і прийняття оцінки $\hat{v}$ параметра v як $\hat{v} = \bar{v}$ за умови

$$|\bar{v} - v| \le \delta_v^{(\max)} \qquad (5)$$

для заздалегідь відомого максимально допустимого абсолютного відхилення $\delta_v^{(\max)}$ оцінки значення досліджуваного параметра від його дійсного значення v. Але це значення принаймні в момент визначення середнього (4) є невідомим (воно може ставати відомим згодом, після серії спостережень за параметром, однак тоді буде запізно або вже непотрібно). Відтак для прийняття $\hat{v} = \bar{v}$ замість контролю умови (5) досить природно використати умову

$$\max_{i=\overline{1,\,M}}\{|\bar{v} - v_i|\} \le \delta_v^{(\max)}. \qquad (6)$$

Умова (6) означає, що оцінка (4) параметра v не повинна відрізнятись від його можливих модельних значень (2) більше, ніж на величину $\delta_v^{(\max)}$. Утім легко показати, що уже для майже тривіальних прикладів умову (6) виконати не вдається. Наприклад, якщо існують три моделі для опису одного параметра v деякого об'єкта дослідження, причому

$$\{v_i\}_{i=1}^3 = \{78,\ 80,\ 81\} \qquad (7)$$

при $\delta_v^{(\max)} < \frac{5}{3}$, то

$$\bar{v} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} v_i = 79\frac{2}{3} \qquad (8)$$

й оцінка (8) є недопустимою в смислі (6), оскільки тут

$$\max_{i=\overline{1,\,3}}\{|\bar{v} - v_i|\} = \max\left\{\frac{5}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right\} = \frac{5}{3} > \delta_v^{(\max)} \qquad (9)$$

й умова (6) не виконана. Зауважимо, що в межах $\delta_v^{(\max)} < \frac{5}{3}$ для верхніх значень $\delta_v^{(\max)}$ вимога, скажімо, $\delta_v^{(\max)} = \frac{3}{2}$ є не такою сильною, як здається, становлячи відносно середнього (8) більше 1,5 %. Наведений приклад демонструє, що прийняття оцінки (4) параметра v за умови (5) у формі (6) або є неможливим, або ж вимагає послаблення вимоги (6), тобто збільшення допустимого абсолютного відхилення $\delta_v^{(\max)}$. Крім того, згадаймо, що наразі йдеться про менш строгу задачу вибору значення параметра v з проміжку (3), де, очевидно,

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} v_i \in [\min(\{v_i\}_{i=1}^M);\ \max(\{v_i\}_{i=1}^M)].$$

Для більш строгого формування оцінки $\hat{v}$ параметра v як $\hat{v} \in \{v_i\}_{i=1}^M$ така задача вибору навіть без вимоги (5) взагалі не матиме розв'язку, адже за оцінки (4) належність $\bar{v} \in \{v_i\}_{i=1}^M$ виконуватиметься в ізольованих випадках.

Усування однопараметричної модельної невизначеності з мінімаксним принципом

Підійдемо до задачі вибору значення параметра v з використанням мінімаксного принципу, який дасть можливість здійснювати вибір й у строгому порядку оцінювання $\widehat{v}$ параметра v, себто виключно на множині його зафіксованих значень $\{v_i\}_{i=1}^{M}$. Сформуємо різниці

$$u_{lj} = |v_l - v_j| \quad \forall\ l = \overline{1, M} \ \text{ і } \ \forall\ j = \overline{1, M} \qquad (10)$$

у матрицю $\mathbf{U} = [u_{lj}]_{M \times M}$, побудувавши таким чином матричну $M \times M$-гру

$$\langle \{x_l\}_{l=1}^{M},\ \{y_j\}_{j=1}^{M}, \mathbf{U} \rangle\,, \qquad (11)$$

де чиста стратегія x_l першого гравця означає те, що дійсним значенням параметра v є число $v_l \quad \forall\ l = \overline{1, M}$ (іншими словами, прийнятною моделлю досліджуваного параметра є l-а модель), а використання другим гравцем його чистої стратегії y_j означає вибір оцінки $\widehat{v}$ параметра v як $\widehat{v} = v_j \quad \forall\ j = \overline{1, M}$ (другого гравця персоніфікує дослідник, перед яким стоїть задача вибору однієї з M математичних моделей). Із розв’язку гри (11) нас цікавить лише оптимальна стратегія

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \cdots \quad \breve{q}_{M-1} \quad \breve{q}_M] \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q} \qquad (12)$$

дослідника, де

$$\mathcal{Q} = \\ = \Big\{ \mathbf{Q} = [q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{M-1} \quad q_M] \in \mathbb{R}^M : \\ q_j \in [0;\ 1]\ \forall\ j = \overline{1, M},\ \sum_{j=1}^{M} q_j = 1 \Big\} \qquad (13)$$

є фундаментальним $(M-1)$-вимірним симплексом у просторі $\mathbb{R}^M$. За, взагалі кажучи, змішаною стратегією (12) маємо

$$\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) = \sum_{j=1}^{M} \breve{q}_j v_j \qquad (14)$$

і тоді

$$\max_{i=\overline{1, M}} \{ | \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) - v_i | \} \leqslant \delta_v^{(\max)}. \qquad (15)$$

Але множина $\breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}$ оптимальних стратегій другого гравця може виявитись неодноелементною, тому замість вимоги (15) варто дотримуватись вимоги

$$\min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\max_{i=\overline{1, M}} \{ | \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) - v_i | \} \right) \leqslant \delta_v^{(\max)}. \qquad (16)$$

Якщо вимога (16) виконана, то $\widehat{v} = \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}_{\min})$, де

$$\breve{\mathbf{Q}}_{\min} \in \arg \min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\max_{i=\overline{1, M}} \{ | \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) - v_i | \} \right). \qquad (17)$$

Звичайно, при заданому допустимому абсолютному відхиленні $\delta_v^{(\max)}$ існують чотири варіанти виконання умови (5), коли (6) і (16) виконані або не виконані одночасно, (6) виконується і (16) не виконується або (6) не виконується і (16) виконується. Тоді за оцінку $\widehat{v}$ параметра v слід брати значення

$$\widehat{v} \in \arg \min_{\{\bar{v},\ \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}_{\min})\}} \left\{ \max_{i=\overline{1, M}} \{ | \bar{v} - v_i | \},\ \min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\max_{i=\overline{1, M}} \{ | \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) - v_i | \} \right) \right\}, \qquad (18)$$

якщо тільки стоїть задача вибору значення параметра v з проміжку (3), а не вибору на множині його зафіксованих значень $\{v_i\}_{i=1}^{M}$. Мають місце подані далі вельми корисні твердження.

Теорема 1. Оптимальна стратегія (12) у грі (11) з компонентами

$$\breve{q}_{j_1} = \breve{q}_{j_2} = \frac{1}{2} \ \text{ при } \ j_1 \in \{\overline{1, M}\} \ \text{ та } \ j_2 \in \{\overline{1, M}\}, \qquad (19)$$

$$j_1 \in \arg \min_{i=\overline{1, M}} \{v_i\},\quad j_2 \in \arg \max_{i=\overline{1, M}} \{v_i\}, \qquad (20)$$

дає оцінку (14) параметра v, не гіршу у смислі вимоги (5) за його оцінку (4).

Д о в е д е н н я. При (19) і (20) в (12) маємо оцінку (14):

$$\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) = \breve{q}_{j_1} v_{j_1} + \breve{q}_{j_2} v_{j_2} = \frac{v_{j_1} + v_{j_2}}{2}. \qquad (21)$$

За найкращої оцінки (4) в лівій частині умови (6) буде значення

$$\min_{\bar{v} \in [\min(\{v_i\}_{i=1}^{M});\ \max(\{v_i\}_{i=1}^{M})]} \left\{ \max_{i=\overline{1, M}} \{ | \bar{v} - v_i | \} \right\} = \\ = \min_{\bar{v} \in [\min(\{v_i\}_{i=1}^{M});\ \max(\{v_i\}_{i=1}^{M})]} \{ \max \{ \bar{v} - \min(\{v_i\}_{i=1}^{M}), \\ \max(\{v_i\}_{i=1}^{M}) - \bar{v} \} \} = \\ = \max \left\{ \frac{\max(\{v_i\}_{i=1}^{M}) + \min(\{v_i\}_{i=1}^{M})}{2} - \min(\{v_i\}_{i=1}^{M}), \right.$$

$$\max(\{v_i\}_{i=1}^M) - \frac{\max(\{v_i\}_{i=1}^M) + \min(\{v_i\}_{i=1}^M)}{2}\Bigg\} =$$

$$= \frac{\max(\{v_i\}_{i=1}^M) - \min(\{v_i\}_{i=1}^M)}{2} = \frac{v_{j_2} - v_{j_1}}{2}. \quad (22)$$

Але з урахуванням (21) і (22) значення в лівій частині умови (15)

$$\max_{i=\overline{1,M}}\{|\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) - v_i|\} = \max_{i=\overline{1,M}}\left\{\left|\frac{v_{j_1} + v_{j_2}}{2} - v_i\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{v_{j_1} + v_{j_2}}{2} - v_{j_1},\ v_{j_2} - \frac{v_{j_1} + v_{j_2}}{2}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{v_{j_2} - v_{j_1}}{2}, \frac{v_{j_2} - v_{j_1}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{v_{j_2} - v_{j_1}}{2} \le \max_{i=\overline{1,M}}\{|\bar{v} - v_i|\}, \quad (23)$$

що і доводить сформульоване твердження. Теорему доведено.

Теорема 2. Для оптимальної стратегії (12) при (19) і (20) у грі (11) вимоги (15) та (16) є еквівалентними.

Доведення. Використовуючи співвідношення (22), де замість $\bar{v}$ слід брати $\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})$, отримаємо

$$\min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}}\left(\max_{i=\overline{1,M}}\{|\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) - v_i|\}\right) =$$

$$= \min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}}\left(\max_{i=\overline{1,M}}\left\{\left|\frac{v_{j_1} + v_{j_2}}{2} - v_i\right|\right\}\right) =$$

$$= \max_{i=\overline{1,M}}\left\{\left|\frac{v_{j_1} + v_{j_2}}{2} - v_i\right|\right\} = \frac{v_{j_2} - v_{j_1}}{2}, \quad (24)$$

звідки і випливає еквівалентність лівих частин нерівностей (15) і (16) і, взагалі кажучи, самих вимог (15) та (16). Теорему доведено.

Наслідком теорем 1 і 2 є те, що оптимальною стратегією (12) при (19) і (20) у грі (11) є (17), де оцінка

$$\hat{v} = \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}_{\min}) = \frac{v_{j_1} + v_{j_2}}{2} \quad (25)$$

параметра v є тією ж, що й у співвідношенні (18). Повертаючись до прикладу з трьома моделями та їх результатом (7) через гру (11), яка набуває форми

$$\left\langle \{x_l\}_{l=1}^3, \{y_j\}_{j=1}^3, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad (26)$$

отримаємо множину

$$\breve{\mathcal{Q}} = \left\{\breve{\mathbf{Q}} = \left[\frac{1}{4}(1+\lambda)\quad \frac{3}{4}(1-\lambda)\quad \frac{1}{2}\lambda\right] \in \right.$$

$$\left. \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;1]\right\} \subset \mathcal{Q} \quad (27)$$

оптимальних стратегій другого гравця у цій грі. Цікаво, що кожен елемент з континуума (27) оптимальних стратегій другого гравця у грі (26) є стратегією (17). Дійсно, $\forall \breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}}$

$$\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) = \sum_{j=1}^{3} \breve{q}_j v_j = \frac{1}{4}(1+\lambda)v_1 + \frac{3}{4}(1-\lambda)v_2 + \frac{1}{2}\lambda v_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\lambda v_1 - \frac{3}{4}\lambda(v_1 + 2) + \frac{1}{2}\lambda(v_1 + 3) + \frac{1}{4}v_1 + \frac{3}{4}(v_1 + 2) =$$

$$= \lambda\left(\frac{1}{4}v_1 - \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{2}v_1\right) +$$

$$+ \lambda\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}v_1 + \frac{3}{4}v_1 + \frac{3}{2} = v_1 + \frac{3}{2}, \quad (28)$$

а

$$\min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}}\left(\max_{i=\overline{1,3}}\{|\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) - v_i|\}\right) =$$

$$= \min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}}\left(\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\left|v_1 + \frac{3}{2} - v_i\right|\right\}\right) =$$

$$= \max_{i=\overline{1,3}}\left\{\left|v_1 + \frac{3}{2} - v_i\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2} = \frac{v_3 - v_1}{2}, \quad (29)$$

тому згідно з теоремою 1 оцінка (28) є не гіршою за оцінку (8). Втім, порівнюючи значення у лівій частині нерівності (9) зі значенням у (29), бачимо, що оцінка (28) є кращою за оцінку (8) і за співвідношенням (18) завжди буде вибиратись значення (28).

Висновки

Задача усунення однопараметричної модельної невизначеності, яка породжується через M оцінок (2) досліджуваного параметра v з M моделей-рівнянь (1), розв'язується за допомогою співвідношення (18), якщо значення параметра v може вибиратись з проміжку (3). Тут, навіть якщо не виконується жодна з вимог (6) і (16), так чи інакше доводиться робити вибір за співвідношенням (18). Для більш строгої задачі вибору значення параметра v, де слід вибирати тільки на скінченній множині $\{v_i\}_{i=1}^{M}$ зафіксованих значень, природним є використання оптимальної стратегії (12) не у визначенні оцінок (14), а у смислі практичної реалізації спектра цієї стратегії [12, 13], тобто реалізації кожної чистої стратегії y_j, яка відповідає прийняттю $\hat{v} = v_j$ з імовірністю $\breve{q}_j$ $\forall\ j = \overline{1, M}$. При цьому гарантовано забезпечується мінімізація абсолютних втрат у вигляді елементів (10) матриці $\mathbf{U} = [u_{lj}]_{M \times M}$ відповідної $M \times M$-гри (11). Однак варіант з оптимальною стратегією (12) при (19) і (20) для $M > 2$ є найгіршим, оскільки у перебиранні потенційних оцінок параметра v з множини $\{v_i\}_{i=1}^{M}$ буде задіяно лише два елементи, хоча й виконуватиметься (23)–(25). Найкращим варіантом розв'язання строгої задачі прийняття оцінки досліджуваного параметра на множині $\{v_i\}_{i=1}^{M}$ буде використання такого набору імовірностей на фундаментальному $(M-1)$-вимірному симплексі (13), який у межах підмножини $\breve{\mathcal{Q}}$ цього симплекса буде якнайближчим до рівноімовірного розподілу з

$$q_j = \frac{1}{M} \quad \forall\ j = \overline{1, M} \tag{30}$$

на (13). Імовірності $\{\breve{q}_j\}_{j=1}^{M}$ такого найбільш близького до (30) розподілу визначатимуться за розв'язком задачі

$$\min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \sum_{j=1}^{M} \left(\breve{q}_j - \frac{1}{M} \right)^2 \tag{31}$$

або задачі

$$\min_{\breve{\mathbf{Q}} \in \breve{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \sum_{j=1}^{M} \sum_{l=1}^{j-1} (\breve{q}_j - \breve{q}_l)^2, \tag{32}$$

але тотожність розв'язків задач (31) і (32) у перспективі слід ще доводити. І наслідком використання квазірівноімовірного розподілу в межах множини $\breve{\mathcal{Q}}$ за розв'язком задачі (31) або (32) буде те, що кожне зі значень (2) входитиме максимально глибоко у процес практичної реалізації відповідної оптимальної стратегії (12).

Зрештою, розв'язок задачі (31) або (32) можна вважати оцінкою невідомого ймовірнісного розподілу на множині M значень $\{v_i\}_{i=1}^{M}$ за умови повної невизначеності. Така попередня оцінка є зручною для багатьох випадків ідентифікації об'єктів на початковій стадії цієї процедури, коли статистичні дані спостережень є малозначними або відсутні взагалі.

1. *Трухаев Р.И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1981. – 258 с.
2. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
3. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. – 496 с.
4. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит-ры, 1985. – 272 с.
5. *S. de Wit and G. Augenbroe,* "Analysis of uncertainty in building design evaluations and its implications", Energy and Buildings, vol. 34, is. 9, pp. 951–958, 2002.
6. *C.J. Hopfe and J.L.M. Hensen,* "Uncertainty analysis in building performance simulation for design support", Ibid, vol. 43, is. 10, pp. 2798–2805, 2011.
7. *A. Smith et al.,* "Analysis of a combined cooling, heating, and power system model under different operating strategies with input and model data uncertainty", Ibid, vol. 42, is. 11, pp. 2231–2240, 2010.
8. *S. Andersson et al.,* "A random wear model for the interaction between a rough and a smooth surface", Wear, vol. 264, is. 9-10, pp. 763–769, 2008.
9. *T. Nilsen and T. Aven*, "Models and model uncertainty in the context of risk analysis", Reliability Engineering & System Safety, vol. 79, is. 3, pp. 309–317, 2003.

10. *I. Park et al.,* "A Bayesian approach for quantification of model uncertainty", Ibid, vol. 95, is. 7, pp. 777–785, 2010.
11. *J. Jacques et al.,* "Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs", Ibid, vol. 91, is. 10, 11, pp. 1126–1134, 2006.
12. *Романюк В.В.* Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2009. – № 2. – С. 45–52.
13. *Романюк В.В.* Обчислювальний метод реалізації оптимальної змішаної стратегії у матричних іграх // XV Int. Conf. "Problems of Decision Making Under Uncertainties (PDMU-2010)", May 17–21, 2010, Lviv: abstracts. – Lviv, 2010. – P. 142–144.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
25 січня 2012 року