УДК 539.3

К.М. Рудаков, О.А. Добронравов

МОДЕЛЮВАННЯ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЙ. ПОВІДОМЛЕННЯ 3. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНОЇ МІРИ ДЕФОРМАЦІЇ ГЕНКІ

This paper represents the comprehensive data on theoretical foundations of applying logarithmic measure of Hencky deformation for deformation modelling with various types of large deformations: thermal, elastic, plastic and creep. We consider the properties of the logarithmic deformation (Hencky) for the fiber of materials. We use basic measures of stresses and the second law of thermodynamics as auxiliary information. Crucially, we define the law of elastic deformation (for an isotropic material) using Hencky strains – the stress measure corresponding to Hencky strains. We also uncover an equivalent formulation of the energy of internal forces. We show that components of the Hencky strains correspond to concepts of strains measure. As energy conjugating tensor stress components they have main components of Kirchhoff stress (stress of Noll). They are linked with key components of Euler-Cauchy "rotated" stress tensor solely through the scale factor. They allow using Hooke classical law to calculate the stress for unchanged isotropic material (metal).

Вступ

Моделювання значних деформацій матеріалу, які одночасно містять деформації різного типу (температурні, пружні, пластичні, повзучості), є складною проблемою. Такий комплекс деформацій може виникати, зокрема, в околі вершини в'язкої тріщини в аварійних режимах роботи енергетичного агрегата з невиявленою заздалегідь тріщиною.

У праці [1] розглянуто, яким чином ідею мультиплікативного розкладу Лі градієнта пружно-пластичних деформацій Коші–Гріна [2] можна застосувати для узагальненого розкладу на випадок одночасної наявності чотирьох вказаних типів деформації. Отримано вирази (52) і (61), в яких виявляється адитивність швидкостей просторових градієнтів різних типів деформацій.

У [3] наведено теоретичні основи визначення температурних деформацій та відокремлення їх від повних деформацій, визначення напружень при моделюванні процесу деформування лише з великими термопружними деформаціями (при застосуванні міри деформацій Гріна–Лагранжа).

Постановка задачі

Мета роботи – навести повні відомості про теоретичні основи застосування логарифмічної міри деформації Генкі для моделювання процесу деформування з великими деформаціями різного типу: температурних, пружних, пластичних і повзучості.

Застосовували декартову систему координат. Для встановлення еквівалентних пар мір "напруження–деформації" розглядали потужність внутрішніх сил. Матеріал – ізотропний метал.

Для цілісності викладу спочатку будуть наведені потрібні далі основні відомості про логарифмічні деформації, міри напружень та еквівалентні формулювання потужності внутрішніх сил.

Логарифмічні деформації (деформації Генкі)

Поздовжню деформацію волокна з початковою довжиною s_0 можна визначити як

$$\in_H = \int_{s_0}^{s} \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{s}{s_0}\right) = \ln\left(\frac{s_0 + \Delta s}{s_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon),$$

де позначена *умовна* деформація $\varepsilon = \frac{\Delta s}{s_0}$. Так вводиться логарифмічна деформація Генкі [4] для волокна матеріалу. Оскільки для кутових логарифмічних деформацій Генкі виразів не існує, то спочатку ці деформації визначають у головних осях деформації, з їх значень створюють діагональну матрицю $[\underline{\Delta}]_H$, а для обчислення компонент лівого або правого тензора деформацій Генкі в основній (нерухомій) системі координат використовують симетричні матриці $[W_L]$ або $[W_R]$, що визначають положення головних осей деформацій (тріад Ейлера та Лагранжа), відповідно:

$$([\in]_H)_L = [W_L]^T [\underline{\Delta}]_H [W_L];$$
$$([\in]_H)_R = [W_R][\underline{\Delta}]_H [W_R]^T. \tag{1}$$

Для знаходження матриць $[W_L]$ або $[W_R]$ використовують теорему Коші про полярну декомпозицію [4], згідно з якою матрицю з компонентами градієнта руху $[X]$ завжди можна однозначно розкласти на матрицю $[R]$ жорсткого повороту елементарного об'єму та симетричну ліву або праву матрицю його чистої деформації $[\upsilon_L]$ або $[\upsilon_R]$ відповідно (при відсутності жорсткого повороту матриця $[R]$ є одиничною): $[X]=[\upsilon_L][R]=[R][\upsilon_R]$. При цьому, після формування матриці $[\theta]=[X][X]^T$ або $[C]=[X]^T[X]$, із системи $[\theta][W_L]=[\lambda][W_L]$ або $[C][W_R]=[\lambda][W_R]$ знаходять діагональну матрицю власних значень $[\lambda]$ з компонентами λ_{ii} (однакові для обох розкладів) і матрицю власних векторів $[W_L]$ або $[W_R]$, а також три головні компоненти логарифмічних деформацій Генкі $(\in_i)_H$, які розміщують на діагоналі діагональної матриці $[\underline{\Lambda}]_H$, яка застосовується в (1):

$$(\underline{\Lambda}_{ii})_H=(\in_i)_H=\ln\sqrt{\lambda_{ii}}=\ln(1+\underline{\varepsilon}_i),\quad i=1,2,3, \tag{2}$$

де позначені компоненти головних умовних деформацій $\underline{\varepsilon}_i=\sqrt{\lambda_{ii}}-1;\ i=1,2,3.$

Міри напружень при наявності великих деформацій

За визначенням Л. Ейлера та О.Л. Коші, напруження – це внутрішня сила, яка діє на елементарній площадці, віднесена до її площі при умові прагнення цієї площі до нуля. Крім того, розглядаються шість елементарних площадок на сторонах елементарного (нескінченно малого) *паралелепіпеда*, який уявно вирізається з тіла. Результуючий вектор напружень на елементарній площадці dS_m, яка перпендикулярна базовому орту e_m, позначають як $\mathrm{s}^m dS_m$, де s^m – вектор напружень на одиниці площі $dS_m,\ m=1,2,3$. Компоненти векторів s^m в основному базисі e_n, а саме σ^{mn}, називають контраваріантними компонентами симетричного *тензора напружень Ейлера–Коші* [4–9] $\mathrm{s}^m=\sigma^{mn}\mathrm{e}_n$.

У кожній точці елементарної похилої площадки dS, зовнішня нормаль до якої ν має компоненти ν_m, результуючий вектор напружень такий: $\mathrm{s}=\mathrm{s}^m\nu_m=\sigma^{mn}\mathrm{e}_n\nu_m$.

При наявності геометричної нелінійності розглядають ще кілька мір напружень [4–9].

Зокрема, компоненти векторів $\underset{\sim}{\mathrm{s}}^m$ у *здеформованому* базисі E_n, а саме $\underset{\sim}{\sigma}^{mn}$, називаються (контраваріантними) компонентами симетричного *другого тензора напружень Піола–Кірхгофа*: $\underset{\sim}{\mathrm{s}}^m=\underset{\sim}{\sigma}^{mn}\mathrm{E}_n$. У кожній точці елементарної площадки dS результуючий вектор напружень $\underset{\sim}{\mathrm{s}}=\underset{\sim}{\mathrm{s}}^m\nu_m=\underset{\sim}{\sigma}^{mn}\mathrm{E}_n\nu_m$. Але оскільки при деформуванні базис E_n зазвичай не є ортогональним, то $\underset{\sim}{\mathrm{s}}$ з його компонентами застосовують лише як деяку розрахункову (допоміжну) дефініцію. В різних точках здеформованого тіла напрямки локального здеформованого базису E_n відносно осей e_n будуть різними, тому є сенс подавати результати розрахунків відносно осей e_n, тобто відносно відомих початкових напрямків. Крім того, оскільки на момент обчислення компонент системи алгебричних рівнянь поточна геометрія тіла може бути ще не визначеною, то доводиться використовувати "опорну" конфігурацію. Наприклад, у випадку TL-формулювання (Total Lagrange) "опорною" конфігурацією є *вихідна*, а при UL-формулюванні (Update Lagrange) – попередня.

Симетричний *другий тензор напружень Піола–Кірхгофа* $(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0$ на елементарній площадці початкової конфігурації $(dS)_0$ створює результуючий вектор напружень $(\underset{\sim}{\mathrm{s}})_0=(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0\mathrm{E}_n(\nu_m)_0$, причому розглядається саме та площадка $(dS)_0$, яка перетворилася в dS. За допомогою формули Нансона [4] $X_{im}\nu_i dS=J(\nu_m)_0(dS)_0$, $i,m=1,2,3,$ встановлюється співвідношення між компонентами тензорів Ейлера–Коші та другого тензора напружень Піола–Кірхгофа [4–9] (одночасно введемо напруження Кірхгофа τ^{mn}):

$$\tau^{mn}=J\,\sigma^{mn}=X_{nj}(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0X_{mi};\qquad [\tau]=J\,[\sigma]=[X][\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T, \tag{3}$$

де $J = \det[X]$; матриця градієнтів руху $[X]$ має компоненти $X_{mi} = \nabla_i x^m = \delta_{mi} + \dfrac{\partial u^m}{\partial a^i}$; ∇_i – оператор просторової похідної; a^i визначають вихідний базис. Матриці

$$[\Sigma] = [R]^T [\sigma][R];$$
$$[T] = J[\Sigma] = J[R]^T [\sigma][R] \qquad (4)$$

містять компоненти "тензора напружень Ейлера–Коші з виключеним поворотом" і "тензора напружень Кірхгофа з виключеним поворотом" (тензора Нолла) відповідно [9].

Еквівалентні формулювання потужності внутрішніх сил

При змінах мір напружень і деформацій потрібно обов'язково дотримуватися еквівалентності формулювання потужності внутрішніх сил [5–7], тобто застосована міра напружень повинна мати свою міру деформацій, і навпаки. Другий закон термодинаміки (див. формулу (15) з [3]) дає змогу встановити це, а також *допустимі* форми фізичних рівнянь суцільного середовища:

$$\sigma^{mn} d_{mn} - \bar{\rho}(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) - \left(\frac{q_m}{\theta}\right)\nabla_m \theta \geq 0, \qquad (5)$$

де $\bar{\rho}$ – питома густина середовища; θ – температура (абсолютна); s – питома ентропія; величина $\psi = e - \theta s$ є питомою вільною енергією системи (Гельмгольца), а e – питомою внутрішньою енергією системи.

Компоненти симетричного "тензора швидкості деформації" (Velocity Strein Tensor) Гріна–Лагранжа d_{mn} є частиною виразу для швидкості деформацій Гріна–Лагранжа $\dot{\in}_{ij} = \dfrac{d \in_{ij}}{dt}$ (див. формули (17) і (18) з [3]):

$$\dot{\in}_{ij} = \frac{d \in_{ij}}{dt} = X_{mi} d_{mn} X_{nj};$$
$$[\dot{\in}] = [X]^T [d][X], \qquad (6)$$

причому $d_{mn} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \dot{u}^m}{\partial r^n} + \dfrac{\partial \dot{u}^n}{\partial r^m}\right)$. Вираз $\dfrac{\sigma^{mn} d_{mn}}{\bar{\rho}}$, із врахуванням співвідношення (3), виразів $\dfrac{1}{\bar{\rho}} = \dfrac{J}{\bar{\rho}_0}$ [4], (6) і симетричності тензорів σ^{mn}, d_{mn} і $(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0$, перетворюється на

$$\frac{\sigma^{mn} d_{mn}}{\bar{\rho}} = \left(\frac{J}{\bar{\rho}_0}\right)\left(\frac{X_{nj}(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 X_{mi}}{J}\right) d_{mn} =$$
$$= \frac{(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 \, \dot{\in}_{ij}}{\bar{\rho}_0}, \qquad (7)$$

де $\bar{\rho}_0$ є початковою густиною матеріалу. Саме такі рівності встановлюють еквівалентність формулювання потужності внутрішніх сил для різних мір напружень і деформацій.

Теоретичні основи застосування логарифмічної міри деформації при великих деформаціях

Встановимо закон пружного деформування, який використовує міру деформацій Генкі, відповідну їй міру напружень, а також перевіримо еквівалентність формулювання потужності внутрішніх сил. Для цього потрібно користуватися величинами, визначеними в головних напрямках.

Позначимо головні пружні "подовження" (Principal Elastic Stretches) як $\underline{\upsilon}^e_i$, $i = 1, 2, 3$, (усюди головні компоненти підкреслюємо). Визначимося, що

$$\underline{\upsilon}^e_i = \sqrt{\lambda^e_{ii}} = 1 + \underline{\varepsilon}^e_i;$$
$$J^e = \det[X^e] = \sqrt{\lambda^e_{11}\lambda^e_{22}\lambda^e_{33}} = \underline{\upsilon}^e_1 \underline{\upsilon}^e_2 \underline{\upsilon}^e_3. \qquad (8)$$

В [1] показано, що матрицю градієнтів руху $[X]$ завжди можна подати як $[X] = [X^e][X^p][X^c][X^\theta]$ (формула (9)), тому якобіан $J = J^e J^p J^c J^\theta$ (формула (10)). Тобто проблем із застосуванням (8) немає.

Позначимо *ізохорні* головні пружні "подовження" (Isochoric Principal Elastic Stretches) як $\breve{\underline{\upsilon}}^e_i$, $i = 1, 2, 3$ [10]. Вони обчислюються через головні пружні "подовження" $\underline{\upsilon}^e_i$, введені виразом (8), за формулою

$$\breve{\underline{\upsilon}}^e_i = \frac{\underline{\upsilon}^e_i}{\sqrt[3]{J^e}} = (J^e)^{-\frac{1}{3}} \underline{\upsilon}^e_i, \qquad (9)$$

де величина $\sqrt[3]{J^e} = \sqrt[3]{\underline{\upsilon}^e_1 \underline{\upsilon}^e_2 \underline{\upsilon}^e_3}$ надає усереднене значення головних пружних "подовжень". Відповідно до (2) головні компоненти пружних деформацій Генкі дорівнюють

$$\ln \underline{\upsilon}_i^e = \ln(1+\underline{\varepsilon}_i^e) = (\underline{\in}_i^e)_H\,,\qquad i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

Із використанням властивостей логарифмів і (9) можемо отримати, що

$$\sum_{i=1}^{3} \ln \tilde{\underline{\upsilon}}_i^e = \sum_{i=1}^{3} \ln\left((J^e)^{-\frac{1}{3}} \underline{\upsilon}_i^e \right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \ln J^e + \sum_{i=1}^{3} \ln \underline{\upsilon}_i^e =$$

$$= -\ln J^e + \ln(\underline{\upsilon}_1^e \underline{\upsilon}_2^e \underline{\upsilon}_3^e) = -\ln J^e + \ln J^e = 0. \tag{11}$$

Відомо, що “слід” (Trace) девіаторних частин будь-якого тензора має дорівнювати нулю, тому, із врахуванням (11), визначимо девіаторні частини головних пружних деформацій Генкі через ізохорні головні пружні “подовження”:

$$(\underline{\in}_i^e)_H^d = \ln \tilde{\underline{\upsilon}}_i^e = \ln\left((J^e)^{-\frac{1}{3}} \underline{\upsilon}_i^e \right),\qquad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Очевидно, що величина об’ємної пружної деформації Генкі становитиме

$$(\in_V^e)_H = (\underline{\in}_i^e)_H - (\underline{\in}_i^e)_H^d =$$

$$= \ln \underline{\upsilon}_i^e - \ln\left((J^e)^{-\frac{1}{3}} \underline{\upsilon}_i^e \right) =$$

$$= \ln\left(\frac{\underline{\upsilon}_i^e}{(J^e)^{-\frac{1}{3}} \underline{\upsilon}_i^e} \right) = \ln\left((J^e)^{\frac{1}{3}} \right) = \frac{1}{3} \ln J^e. \tag{13}$$

Отже, можна визначити компоненти головних пружних деформацій Генкі як

$$(\underline{\in}_i^e)_H = (\in_V^e)_H + (\underline{\in}_i^e)_H^d =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \ln J^e + \ln\left((J^e)^{-\frac{1}{3}} \underline{\upsilon}_i^e \right),\qquad i = 1, 2, 3,$$

або у матричному вигляді (всі матриці – діагональні):

$$[\underline{\in}^e]_H = (\in_V^e)_H [I] + [\underline{\in}^e]_H^d\,.$$

Тепер розглянемо питання про функціонал, який визначає питому потенціальну енергію пружного деформування. Для цього знадобиться кілька допоміжних співвідношень [10–12].

Із використанням правил диференціювання, властивостей логарифмів та (11) можемо послідовно отримати таке (за індексами, що повторюються, не складати):

$$\frac{\partial J^e}{\partial \underline{\upsilon}_i^e} = \frac{\partial(\underline{\upsilon}_1^e \underline{\upsilon}_2^e \underline{\upsilon}_3^e)}{\partial \underline{\upsilon}_i^e} = \frac{J^e}{\underline{\upsilon}_i^e}; \tag{14}$$

$$\frac{\partial \tilde{\underline{\upsilon}}_n^e}{\partial \underline{\upsilon}_i^e} = \frac{\partial((J^e)^{-1/3} \underline{\upsilon}_n^e)}{\partial \underline{\upsilon}_i^e} =$$

$$= \frac{\partial\left((J^e)^{-\frac{1}{3}} \right)}{\partial \underline{\upsilon}_i^e} \underline{\upsilon}_n^e + (J^e)^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial \underline{\upsilon}_n^e}{\partial \underline{\upsilon}_i^e} =$$

$$= -\frac{1}{3}(J^e)^{-\frac{4}{3}} \frac{\partial J^e}{\partial \underline{\upsilon}_i^e} \underline{\upsilon}_n^e + (J^e)^{-\frac{1}{3}} \delta_{ni} =$$

$$= (J^e)^{-\frac{1}{3}} \left(\delta_{ni} - \frac{1}{3J^e} \frac{J^e}{\underline{\upsilon}_i^e} \underline{\upsilon}_n^e \right) =$$

$$= (J^e)^{-\frac{1}{3}} \left(\delta_{ni} - \frac{1}{3} \frac{\underline{\upsilon}_n^e}{\underline{\upsilon}_i^e} \right) = (J^e)^{-\frac{1}{3}} \left(\delta_{ni} - \frac{1}{3} \frac{\tilde{\underline{\upsilon}}_n^e}{\tilde{\underline{\upsilon}}_i^e} \right); \tag{15}$$

$$\frac{\partial(\ln \underline{\upsilon}_m^e)}{\partial \underline{\upsilon}_n^e} = \frac{\partial(\ln \underline{\upsilon}_m^e)}{\partial \underline{\upsilon}_m^e} \frac{\partial \underline{\upsilon}_m^e}{\partial \underline{\upsilon}_n^e} = \frac{\delta_{mn}}{\underline{\upsilon}_m^e}; \tag{16}$$

$$\frac{\partial \underline{\upsilon}_k^e}{\partial(\ln \underline{\upsilon}_i^e)} = \left(\frac{\partial(\ln \underline{\upsilon}_i^e)}{\partial \underline{\upsilon}_k^e} \right)^{-1} = \left(\frac{\delta_{ik}}{\underline{\upsilon}_i^e} \right)^{-1} = \underline{\upsilon}_i^e \delta_{ik}; \tag{17}$$

$$\frac{\partial J^e}{\partial(\ln \underline{\upsilon}_i^e)} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial J^e}{\partial \underline{\upsilon}_k^e} \frac{\partial \underline{\upsilon}_k^e}{\partial(\ln \underline{\upsilon}_i^e)} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{J^e}{\underline{\upsilon}_k^e} \underline{\upsilon}_i^e \delta_{ik} \right) = J^e \sum_{k=1}^{3} \frac{\underline{\upsilon}_i^e \delta_{ik}}{\underline{\upsilon}_i^e} = J^e; \tag{18}$$

$$\frac{\partial \sum_{m=1}^{3} (\ln \tilde{\underline{\upsilon}}_m^e)^2}{\partial(\ln \underline{\upsilon}_i^e)} = \sum_{m=1}^{3} \left(2 \ln \tilde{\underline{\upsilon}}_m^e \frac{\partial(\ln \tilde{\underline{\upsilon}}_m^e)}{\partial(\ln \underline{\upsilon}_i^e)} \right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{3} \left(\ln \tilde{\underline{\upsilon}}_m^e \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{\partial(\ln \tilde{\underline{\upsilon}}_m^e)}{\partial \tilde{\underline{\upsilon}}_n^e} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \tilde{\underline{\upsilon}}_n^e}{\partial \underline{\upsilon}_k^e} \frac{\partial \underline{\upsilon}_k^e}{\partial(\ln \underline{\upsilon}_i^e)} \right) \right) \right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{3} \left(\ln \tilde{\underline{\upsilon}}_m^e \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{\delta_{mn}}{\tilde{\underline{\upsilon}}_m^e} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \tilde{\underline{\upsilon}}_n^e}{\partial \underline{\upsilon}_k^e} \underline{\upsilon}_i^e \delta_{ik} \right) \right) \right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}\sum_{n=1}^{3}\left(\delta_{mn}\left(\frac{\partial \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{n}}{\partial \underline{\upsilon}^{e}_{i}}\underline{\upsilon}^{e}_{i}\right)\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}\sum_{n=1}^{3}\left(\delta_{mn}(J^{e})^{-\frac{1}{3}}\left(\delta_{ni}-\frac{1}{3}\frac{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{n}}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}}\right)\underline{\upsilon}^{e}_{i}\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}\sum_{n=1}^{3}\left(\delta_{mn}\left(\delta_{ni}-\frac{1}{3}\frac{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{n}}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}}\right)\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}\sum_{n=1}^{3}(\delta_{mn}\delta_{ni}\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i})\right) -$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}\sum_{n=1}^{3}\left(\delta_{mn}\frac{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{n}}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}}\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}\right)\right) =$$

$$= 2\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}(\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m})(\delta_{mi}\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i})\right) -$$

$$-\frac{2}{3}\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}\sum_{n=1}^{3}(\delta_{mn}\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{n})\right) =$$

$$= 2\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}}\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}\right) - \frac{2}{3}\sum_{m=1}^{3}\left(\frac{1}{\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}}(\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m})\underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m}\right) =$$

$$= 2\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i} - \frac{2}{3}\sum_{m=1}^{3}\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m} = 2\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i} - \frac{2}{3}\cdot 0 = 2\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i}. \quad (19)$$

Для отримання (15), (17) і (18) використовували формули (14), (16) і (17) відповідно.

Відомі кілька виразів для функціонала, який визначає питому потенціальну енергію деформування W при врахуванні геометричної нелінійності, анізотропії, нестисливості тощо (інакше це називають моделями матеріалу) [4]. Тут розглядаємо лише ізотропні металічні матеріали, які зазвичай є стисливими, тобто для них величина J^{e} змінна. Подамо пружну частину функціонала W як суму питомих потенціальних енергій зміни об’єму $\mathsf{U}^{e}=\mathsf{U}^{e}(J^{e})$ та форми $\mathsf{V}^{e}=\mathsf{V}^{e}(\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m})$, причому для V^{e} застосуємо квадратичну форму:

$$\mathsf{W}^{e}(\underline{\upsilon}^{e}_{1},\underline{\upsilon}^{e}_{2},\underline{\upsilon}^{e}_{3}) = \mathsf{U}^{e}+\mathsf{V}^{e} =$$

$$= \mathsf{U}^{e}(J^{e}) + G\sum_{m=1}^{3}(\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m})^{2} =$$

$$= \mathsf{U}^{e}(J^{e}) + G\sum_{m=1}^{3}((\underline{\in}^{e}_{m})^{d}_{H})^{2}. \quad (20)$$

Із (20), з використанням співвідношень (12), (14), (17) і (19), знайдемо, що

$$\frac{\partial \mathsf{W}^{e}}{\partial(\in^{e}_{i})_{H}} = \frac{\partial \mathsf{W}^{e}(\underline{\upsilon}^{e}_{1},\underline{\upsilon}^{e}_{2},\underline{\upsilon}^{e}_{3})}{\partial(\ln \underline{\upsilon}^{e}_{i})} =$$

$$= (\mathsf{U}^{e}(J^{e}))'\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial J^{e}}{\partial \underline{\upsilon}^{e}_{k}}\frac{\partial \underline{\upsilon}^{e}_{k}}{\partial(\ln \underline{\upsilon}^{e}_{i})}\right) +$$

$$+ G\frac{\partial \sum_{m=1}^{3}(\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{m})^{2}}{\partial(\ln \underline{\upsilon}^{e}_{i})} = (\mathsf{U}^{e}(J^{e}))'\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{J^{e}}{\underline{\upsilon}^{e}_{k}}\underline{\upsilon}^{e}_{i}\delta_{ik}\right) +$$

$$+ 2G\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i} = (\mathsf{U}^{e}(J^{e}))'\left(\frac{J^{e}}{\underline{\upsilon}^{e}_{i}}\right)\underline{\upsilon}^{e}_{i} + 2G\ln \underline{\breve{\upsilon}}^{e}_{i} =$$

$$= (\mathsf{U}^{e}(J^{e}))'J^{e} + 2G(\in^{e}_{i})^{d}_{H}. \quad (21)$$

Оскільки класичний закон Гука в головних осях записується як $\underline{\sigma}_{i} = 3k\,\underline{\in}^{e}_{V} + 2G(\underline{\in}^{e}_{i})^{d}$, $i=1,2,3,$ де $k = \dfrac{E(\theta)}{[3(1-2\mu(\theta))]} = k(\theta)$ є модулем об’ємного стискання, то й для логарифмічних деформацій Генкі можна застосувати аналогічний вираз правої частини (21), тобто (із врахуванням (13))

$$(\mathsf{U}^{e}(J^{e}))'J^{e} = 3k(\in^{e}_{V})_{H} = k\ln J^{e}. \quad (22)$$

З усіх відомих виразів для $\mathsf{U}^{e}(J^{e})$ виберемо той, який добре описує ізотропні матеріали (зокрема, метали) при не дуже великих пружних об’ємних деформаціях:

$$\mathsf{U}^{e}(J^{e}) = 0,5k(\ln J^{e})^{2}. \quad (23)$$

Тоді з (22) для правої частини (21) маємо

$$(\mathsf{U}^{e}(J^{e}))'J^{e} = \frac{\partial \mathsf{U}^{e}(J^{e})}{\partial J^{e}}J^{e} =$$

$$= \frac{\partial(0,5k(\ln J^{e})^{2})}{\partial J^{e}}J^{e} =$$

$$= k\ln J^{e}\frac{\partial(\ln J^{e})}{\partial J^{e}}J^{e} =$$

$$= k\ln J^{e}\left(\frac{1}{J^{e}}\right)J^{e} = k\ln J^{e} =$$

$$= 3k\left(\frac{\ln J^{e}}{3}\right) = 3k(\in^{e}_{V})_{H}.$$

Коректний вираз для $\mathrm{U}^e(J^e)$ повинен мати такі властивості [4]:

$$\begin{gathered}\mathrm{U}^e(1)=0;\ (\mathrm{U}^e(1))'=0;\ (\mathrm{U}^e(1))''=k;\\ \mathrm{U}^e(J^e\to\infty)\to\infty;\\ (\mathrm{U}^e(J^e\to\infty))'\to\infty;\\ \mathrm{U}(J^e\to 0)\to k.\end{gathered}\tag{24}$$

Очевидно, що вираз (23) не відповідає тільки останній умові з (24). Тобто при дуже великих пружних об'ємних деформаціях стискання, коли $J^e\to 0$, його застосовувати не можна, але така ситуація не характерна для металів. Отже, встановлено, що при виборі функціонала W^e, який визначає питому потенціальну енергію деформування ізотропних металів при врахуванні геометричної нелінійності, у вигляді

$$\mathrm{W}^e(\underline{\upsilon}^e_1,\underline{\upsilon}^e_2,\underline{\upsilon}^e_3)=\mathrm{U}^e+\mathrm{V}^e=$$

$$=\frac{1}{2}k\,(\ln J^e)^2+G\sum_{m=1}^{3}(\ln\underline{\upsilon}^e_m)^2,$$

маємо

$$\frac{\partial\mathrm{W}^e}{\partial(\underline{\epsilon}^e_i)_H}=\frac{\partial\mathrm{W}^e(\underline{\upsilon}^e_1,\underline{\upsilon}^e_2,\underline{\upsilon}^e_3)}{\partial(\ln\underline{\upsilon}^e_i)}=$$

$$=3k\,(\epsilon_V)_H+2G\,(\underline{\epsilon}^e_i)^d_H.\tag{25}$$

Залишилося виявити, якій мірі напружень відповідає останній вираз. Це можна зробити з другого закону термодинаміки у випадку наявності тільки пружних деформацій. Тоді вираз другого закону термодинаміки (5) спрощується до такого вигляду:

$$\sigma^{mn}d_{mn}-\bar{\rho}\dot{\psi}=0,\quad m,n=1,2,3.\tag{26}$$

Із врахуванням $\dfrac{\sigma^{mn}d_{mn}}{\bar{\rho}}=\dfrac{(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0\,\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\rho}_0}$ (див. (7)), а також $\dot{\epsilon}_{ij}=\dot{\epsilon}^e_{ij}$ при $\epsilon_{ij}=\epsilon^e_{ij}$, замість (26) маємо

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0\,\dot{\epsilon}^e_{mn}-\bar{\rho}_0\dot{\psi}=0,\quad m,n=1,2,3.\tag{27}$$

Вважають, що в цьому випадку функціонал для вільної енергії $\psi=\psi^e$ має параметрами тільки пружні деформації ϵ^e_{ij}, тобто можемо записати, що

$$\bar{\rho}_0\dot{\psi}=\bar{\rho}_0\dot{\psi}^e=\bar{\rho}_0\frac{\partial\psi^e}{\partial\epsilon^e_{mn}}\dot{\epsilon}^e_{mn},$$

$$m,n=1,2,3.\tag{28}$$

Підставимо (28) у (27), отримаємо, що

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0=\bar{\rho}_0\frac{\partial\psi^e}{\partial\epsilon^e_{mn}},\quad m,n=1,2,3.\tag{29}$$

У головних осях з (29) маємо

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{i})_0=\bar{\rho}_0\frac{\partial\psi^e}{\partial\epsilon^e_{i}},\quad i=1,2,3.\tag{30}$$

У головних осях компоненти тензора пружних деформацій Гріна–Лагранжа ϵ^e_{ij}, які даються виразом (11) з [3], будуть визначатися формулою

$$\underline{\epsilon}^e_i=0,5[(\underline{\upsilon}^e_i)^2-1],\ i=1,2,3.\tag{31}$$

Розглянемо вираз (30) із врахуванням (31):

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{i})_0=\bar{\rho}_0\frac{\partial\psi^e}{\partial\underline{\epsilon}^e_i}=\bar{\rho}_0\frac{\partial\psi^e}{\partial(0,5[(\underline{\upsilon}^e_i)^2-1])}=$$

$$=\bar{\rho}_0\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial(\ln\underline{\upsilon}^e_k)}\frac{\partial(\ln\underline{\upsilon}^e_k)}{\partial\underline{\upsilon}^e_i}\frac{\partial\underline{\upsilon}^e_i}{\partial(0,5[(\underline{\upsilon}^e_i)^2-1])}\right)=$$

$$=\bar{\rho}_0\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial(\ln\underline{\upsilon}^e_k)}\frac{\delta_{ki}}{\underline{\upsilon}^e_k}\left(\frac{\partial(0,5[(\underline{\upsilon}^e_i)^2-1])}{\partial\underline{\upsilon}^e_i}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\bar{\rho}_0\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi^e}{\partial(\ln\underline{\upsilon}^e_k)}\frac{\delta_{ki}}{\underline{\upsilon}^e_k}(\underline{\upsilon}^e_i)^{-1}\right)=\bar{\rho}_0\frac{1}{(\underline{\upsilon}^e_i)^2}\frac{\partial\psi^e}{\partial(\ln\underline{\upsilon}^e_i)}.\tag{32}$$

Якщо тепер порівняти вираз (32) з (25), то, із врахуванням (10), тобто $\ln\underline{\upsilon}^e_i=(\underline{\epsilon}^e_i)_H$, $i=1,2,3$, можемо прийняти, що $\bar{\rho}_0\psi^e=\mathrm{W}^e(\underline{\upsilon}^e_1,\underline{\upsilon}^e_2,\underline{\upsilon}^e_3)$, а тоді в головних осях компоненти дорівнюватимуть

$$(\underline{\upsilon}^e{}_i)^2(\underset{\sim}{\sigma}^{i})_0=\frac{\partial\mathrm{W}^e}{\partial(\underline{\epsilon}^e_i)_H}=$$

$$=3k\,(\epsilon_V)_H+2G\,(\underline{\epsilon}^e_i)^d_H,\ i=1,2,3,\tag{33}$$

за індексом i складання немає.

У головних осях друге співвідношення (4) із врахуванням (3) дає вираз

$$\underline{T}^i=J\,\underline{\Sigma}^i=(\underline{\upsilon}^e{}_i)^2(\underset{\sim}{\sigma}^{i})_0,\ i=1,2,3,\tag{34}$$

за індексом i складання немає, тому з (33) маємо, що

$$\underline{T}^{i} = J\,\underline{\Sigma}^{i} = 3k\,(\in^{e}_{V})_{H} + 2G\,(\underline{\in}^{e}_{i})^{d}_{H},$$

$$i = 1, 2, 3, \tag{35}$$

це означає, що закон Гука через пружні логарифмічні деформації визначає головні компоненти тензора напружень Нолла $\underline{T}^{i}$ (компоненти $\underline{\Sigma}^{i}$ тензора "напружень Ейлера–Коші з виключеним поворотом", помножені на величину J).

Залишилося перевірити, чи дійсно є еквівалентність потужності внутрішніх сил для логарифмічних пружних деформацій. Спочатку знайдемо їх швидкість:

$$(\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H} = \frac{d(\underline{\in}^{e}_{i})_{H}}{dt} = \frac{d(\ln \underline{\upsilon}^{e}_{i})}{dt} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial(\ln \underline{\upsilon}^{e}_{i})}{\partial \underline{\upsilon}^{e}_{k}}\frac{d\underline{\upsilon}^{e}_{k}}{dt}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\delta_{ik}}{\underline{\upsilon}^{e}_{i}}\frac{d\underline{\upsilon}^{e}_{k}}{dt}\right) = \frac{1}{\underline{\upsilon}^{e}_{i}}\frac{d\underline{\upsilon}^{e}_{i}}{dt} = \frac{\dot{\underline{\upsilon}}^{e}_{i}}{\underline{\upsilon}^{e}_{i}}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{36}$$

Із (31) маємо швидкість головних пружних деформацій Гріна–Лагранжа:

$$\dot{\underline{\in}}^{e}_{i} = \frac{d\,\underline{\in}^{e}_{i}}{dt} = \frac{d\,(0,5[(\underline{\upsilon}^{e}_{i})^{2} - 1])}{dt} = \underline{\upsilon}^{e}_{i}\dot{\underline{\upsilon}}^{e}_{i},$$

$$i = 1, 2, 3, \tag{37}$$

за індексом i складання немає.

Порівняння (37) з (36) веде до співвідношення

$$\dot{\underline{\in}}^{e}_{i} = (\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H}\,(\underline{\upsilon}^{e}_{i})^{2}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{38}$$

за індексом i складання немає.

Із (6) для головних осей $\dot{\underline{\in}}_{i} = \underline{d}_{i}\,(\underline{\upsilon}_{i})^{2}$. При наявності тільки пружних деформацій маємо, що

$$\dot{\underline{\in}}^{e}_{i} = \underline{d}^{e}_{i}\,(\underline{\upsilon}^{e}_{i})^{2}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{39}$$

за індексом i складання немає, тому з (38) та (39) робимо важливий висновок, що

$$(\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H} = \underline{d}^{e}_{i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{40}$$

Тепер, із послідовним врахуванням (7), (38), (33), (40), $\frac{1}{\bar{\rho}} = \frac{J}{\bar{\rho}_{0}}$ та співвідношення $J\underline{\Sigma}^{i} = \underline{\tau}^{i} = \underline{T}^{i}$ з (34), можемо записати, що в головних осях проміжної конфігурації при наявності тільки пружних деформацій

$$\frac{\underline{\sigma}^{i}\underline{d}^{e}_{i}}{\bar{\rho}} = \frac{(\underline{\sigma}^{i})_{0}\,\dot{\underline{\in}}^{e}_{i}}{\bar{\rho}_{0}} = \frac{(\underline{\sigma}^{i})_{0}(\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H}\,(\underline{\upsilon}^{e}_{i})^{2}}{\bar{\rho}_{0}} =$$

$$= \frac{\underline{\tau}^{i}(\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H}}{\bar{\rho}_{0}} = \frac{\underline{\tau}^{i}\underline{d}^{e}_{i}}{\bar{\rho}_{0}} = \frac{\underline{\tau}^{i}\underline{d}^{e}_{i}}{J\bar{\rho}} = \frac{\underline{\Sigma}^{i}\underline{d}^{e}_{i}}{\bar{\rho}} =$$

$$= \frac{\underline{\Sigma}^{i}(\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H}}{\bar{\rho}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Остаточно пружна частина питомої потужності внутрішніх сил дорівнюватиме

$$\bar{\rho}_{0}\dot{w}^{e} = J\,\underline{\sigma}^{i}\underline{d}^{e}_{i} = (\underline{\sigma}^{i})_{0}\,\dot{\underline{\in}}^{e}_{i} =$$

$$= J\,\underline{\Sigma}^{i}(\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H} = \underline{\tau}^{i}(\dot{\underline{\in}}^{e}_{i})_{H}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{41}$$

У [13] показано, що в головних осях з достатньою точністю (з другим порядком наближення) для пружно-ізотропних матеріалів питома потужність внутрішніх сил становитиме

$$\bar{\rho}_{0}\dot{w} = J\,\underline{\sigma}^{i}\underline{d}_{i} = (\underline{\sigma}^{i})_{0}\,\dot{\underline{\in}}_{i} = J\,\underline{\Sigma}^{i}(\dot{\underline{\in}}_{i})_{H} = \underline{\tau}^{i}(\dot{\underline{\in}}_{i})_{H},$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Але для побудови ефективних алгоритмів моделювання деформування матеріалу з великими деформаціями [14, 15] достатньо мати навіть вказану в (41) пружну еквівалентність потужності внутрішніх сил.

Висновки

Із наведених вище результатів випливає, що компоненти логарифмічних деформацій (Генкі):

- відповідають уявленням про міру деформацій, оскільки мають енергетично спряжені компоненти тензора напружень;
- дають можливість для пружно-ізотропного матеріалу (металу) без змін використовувати класичний закон Гука для обчислення напружень, але не Ейлера–Коші, а Нолла, тобто "напружень Ейлера–Коші з виключеним поворотом", які помножені на величину J.

Теоретичні основи застосування логарифмічної міри деформації Генкі були встановлені раніше [5–13 та ін.], тобто ця стаття значною мірою є оглядовою. На відміну від вказаних та інших публікацій, тут для прояснення ситуації зібрано всі подробиці, ліквідовано значну кількість пропущених викладок, а головне, вважалася наявність чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичності й повзучості.

Залишилося виявити, який вигляд можуть мати рівняння теорій пластичності та повзучості при використанні логарифмічних деформацій. Про це йтиметься у наступній статті.

1. *Рудаков К.М., Добронравов О.А.* Моделювання великих деформацій. Повідомлення 1. Мультиплікативний розклад при наявності чотирьох типів деформацій // Вісн. НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування. – 2012. – № 64. – С. 7–12.
2. *E.H. Lee*, "Elastic–plastic deformations at finite strains", J. Appl. Mech. (ASME), vol. 36, pp. 1–6, 1969.
3. *Рудаков К.М., Яковлєв А.І.* Моделювання великих деформацій. Повідомлення 2. Температурні деформації // Вісн. НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування. – 2012. – № 65. – С. 10–18.
4. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория: Пер. с фр. В.В. Федулова. – М.: Высш. шк., 1983. – 398 с.
5. *Новожилов В.В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. матем. Механ. – 1963. – 27, вып. 5. – С. 794–812.
6. *Хилл Р.* Об определяющих неравенствах для простых материалов // Механика. – 1969. – № 4 (116). – С. 94–118.
7. *R. Hill*, "Aspects of invariance in solid mechanics", Adv. Appl. Mech., vol. 18, pp. 1–75, 1978.
8. *Черных К.Ф.* Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, Ленинград. отд-ние, 1986. – 336 с.
9. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – 262 с.
10. *L. Anand*, "On H. Hencky's approximate strain energy function for modeling deformations", ASME J. Appl. Mech., vol. 46, pp. 78–82, 1979.
11. *S.N. Atluri*, "Alternate stress and conjugate strain measures, and mixed variational formulations involving rigid rotations, for computational analyses of finitely deformed solids, with application to plates and shells: I. Theory", Comput. Struct., vol. 18, pp. 93–116, 1984.
12. *A. Hoger*, "The stress conjugate to logarithmic strain", Int. J. Solids Struct., vol. 23, pp. 1645–1656, 1987.
13. *H. Xiao at al.*, "Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate", Acta Mechanica, vol. 124(1–4), pp. 89–105, 1997.
14. *A.L. Eterović, K-J. Bathe*, "A hyperelastic-based large strain elasto–plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures", Int. J. Num. Meth. Enging, vol. 30, pp. 1099–1114, 1990.
15. *F.J. Montáns, K-J. Bathe*, "Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin", Int. J. Num. Meth. Enging, vol. 63, pp. 159–196, 2005.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
27 вересня 2012 року