ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ, СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА КЕРУВАННЯ

УДК 004.942:519.766.4

П.І. Бідюк, О.М. Трофимчук, О.А. Кожухівська

ПРОГНОЗУВАННЯ ВОЛАТИЛЬНОСТІ ФІНАНСОВИХ ПРОЦЕСІВ ЗА АЛЬТЕРНАТИВНИМИ МОДЕЛЯМИ

An analysis of modern approaches to modeling of conditional variance for nonstationary heteroscedastic processes is performed. A stochastic volatility model structure is proposed for multidimensional case and the methodology is considered for its parameter estimation with the use of Markov chain Monte Carlo technique. The use of this approach provides a possibility for parameter estimation of linear and nonlinear models in conditions of stochastic disturbance influence with various distributions of random variables. For the selected processes of stock price dynamics a set of mathematical models for conditional variance has been constructed with simplified and complex structure. It is shown that the best short term forecasting results could be achieved with the exponential autoregression model with conditional heteroscedasticity and with the stochastic volatility model. It can be explained with the fact that both models take into consideration influence of random disturbances with different signs. The results of numerical modeling can be used in computer based decision support systems for financial process control, making decisions regarding stock trading, forming the financial instruments portfolio and so on.

Вступ

Сучасні методи аналізу фінансових процесів значною мірою ґрунтуються на використанні математичних моделей, які описують динаміку самого процесу (ціноутворення, доходність, інвестиційні процеси, цінові індикатори тощо), тренд, дисперсію, періодичні ефекти, стрибкоподібні зміни та різні нелінійні ефекти. Особливо часто необхідно моделювати динаміку дисперсії процесу (або відповідного стандартного відхилення), яка необхідна для аналізу стаціонарності, обчислення ринкових фінансових ризиків, прийняття рішень при виконанні торгових операцій з фінансовими активами, для формування портфелів фінансових активів та побудови систем підтримки прийняття рішень для керування фінансовими потоками [1, 2]. Стандартне відхилення в аналізі фінансових процесів називають волатильністю. Її можна визначити як міру мінливості (варіабельності) випадкової складової часового ряду, який характеризує поведінку фінансової змінної. Волатильність – це неспостережуваний параметр, а тому її необхідно коректно оцінювати на основі спостережень основної змінної. Простим популярним підходом до оцінювання волатильності при аналізі можливих втрат є використання квадратів інновацій для щоденних значень фінансового процесу (наприклад, доходності).

Незважаючи на те, що квадрати інновацій – це зашумлені історичні (минулі) оцінки волатильності, вони відображають її основну властивість – наявність змін у часі. Іншою властивістю волатильності є те, що її поточні значення пов'язані з минулими, тобто спостерігається кластерний характер її змін у часі або персистентність. Ступінь цього взаємозв'язку важлива з економічної точки зору, оскільки це дає можливість встановити тривалість відповідних цінових шоків та їх вплив на величину ризику. Наявність персистентності також важлива з точки зору можливості її прогнозування. Це дає змогу прогнозувати волатильність з більшою точністю, ніж сам процес ціноутворення або доходності. Однією з ключових моделей, які використовують для опису умовної дисперсії, є узагальнена авторегресія із умовною гетероскедастичністю, що має структуру авторегресії з ковзним середнім [2, 3]. Недоліком цієї моделі є те, що згідно з таким описом волатильність експоненційно затухає в часі, що не завжди відповідає дійсності. Численні дослідження свідчать, що зміни волатильності можна краще описати так званою "довгою пам'яттю", яка передбачає гіперболічне спадання цінових шоків, тобто спадання з меншою швидкістю. З іншого боку, така поведінка волатильності спостерігається не завжди. При дослідженні фінансових процесів також важливо встановити наявність структурних змін у відповідних часових рядах, що дає можливість відслідковувати довгострокові ефекти, включаючи волатильність.

Стаття присвячена аналізу можливості прогнозування волатильності за альтернативними моделями.

Постановка задачі

Метою роботи є: 1) аналіз і вибір для практичного використання сучасних моделей для прогнозування волатильності; 2) модифікація існуючих моделей умовної дисперсії з метою підвищення якості оцінок прогнозів; 3) застосування вибраних і запропонованих моделей до оцінювання прогнозів волатильності, виконання порівняльного аналізу.

Моделі умовної дисперсії

Модель авторегресії з умовною гетероскедастичністю. Формально випадковий процес $\{\varepsilon(k)\}$ вважається гетероскедастичним (ГСП), якщо його дисперсія $\mathrm{Var}[\varepsilon(k)] = \sigma_\varepsilon^2 \neq \mathrm{const}$. Припущення щодо гомоскедастичності означає, що варіація кожного значення випадкової величини $\varepsilon(k)$ навколо її математичного сподівання залишається сталою величиною незалежно від значень впливових факторів. Гетероскедастичність означає, що дисперсія процесу зменшується чи збільшується в часі або ж є складнішою функцією часу. Тобто вона може змінюватись за складним законом, який і потрібно визначити при створенні моделі процесу. Іноді використовують припущення про існування такої простої форми опису:

$$\sigma^2_{\varepsilon(k)} = c^2 x^2(k),$$

де c — константа, яку необхідно оцінити за допомогою експериментальних даних і вибраного методу оцінювання параметрів; $x(k)$ — випадкова змінна, яка визначає дисперсію процесу. У випадку впливу на основну змінну мультиплікативного збурення модель має вигляд

$$y(k+1) = \varepsilon(k+1)\, x(k),$$

де $y(k+1)$ — основна залежна змінна; $\varepsilon(k+1)$ — збурення у вигляді, наприклад, білого шуму із скінченною дисперсією σ^2; $x(k)$ — незалежна змінна, виміри якої відомі на відрізку часу, що розглядається. У випадку, якщо $x(k) = x(k-1) = = x(k-2) = \ldots = \mathrm{const}$, послідовність $\{y(k)\}$ являє собою білий шум з постійною дисперсією. Однак у випадку, коли $\{y(k)\}$ — послідовність різних за значеннями чисел, то умовна дисперсія $y(k+1)$ за відомих значень $x(k)$ визначається так:

$$\mathrm{Var}[y(k+1) | x(k)] = x^2(k)\sigma^2.$$

Отже, умовна дисперсія величини $y(k+1)$ залежить від конкретної реалізації $x(k)$. Оскільки $x(k)$ можна виміряти в момент k, то дисперсію величини $y(k)$ можна визначити як умовну, якщо відоме значення $x(k)$ Якщо величина $x^2(k)$ велика (мала), то дисперсія $y(k+1)$ також буде великою (малою). З цього випливає, що за наявності додатної кореляції між значеннями послідовності $\{x(k)\}$ (тобто є тенденція, що за великим значенням $x(k)$ знову іде велике значення) умовна дисперсія послідовності $\{y(k)\}$ також матиме тенденцію до послідовної додатної кореляції. Іноді розглядають модифіковану модель типу

$$\ln(y(k)) = a_0 + a_1 \ln(x(k-1)) + \ln e(k),$$

де $e(k)$ — похибка моделі. Недоліком такої моделі є те, що потрібно дійсно знайти таку змінну $x(k)$, яка суттєво впливає на дисперсію процесу $y(k)$ і в основному визначає її, що не завжди можливо з практичної точки зору (такої змінної може просто не існувати).

Замість того щоб шукати одну змінну $x(k)$, яка визначає дисперсію процесу $\{y(k)\}$, і робити додаткові перетворення даних, можна одночасно моделювати (описувати) середнє значення та дисперсію ряду. Перш ніж переходити до розгляду цієї моделі, зазначимо, що використання умовного прогнозування має значні переваги над використанням безумовного. Умовна дисперсія розвивається, як правило, неперервно, тобто стрибки в її значеннях мають місце нечасто. Ще одна відома властивість дисперсії — асиметричність зміни умовної дисперсії залежно від знака зміни ціни фінансового інструменту. Так, величина зміни умовної дисперсії є від'ємно корельованою з ціною фінансового інструменту (ефект левериджу).

Першою широко використовуваною моделлю умовної дисперсії була модель, запропонована Енглом у [3]. Ідея створення цієї моделі полягає в тому, що послідовність змін ціни фінансового інструменту є залежною, але послідовно некорельованою:

$$x(k) = \sigma(k)\, v(k);$$

$$v(k) \sim N(0, 1);$$

$$\sigma^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1 x^2(k-1) + \ldots + \alpha_n x^2(k-n).$$

Якщо позначити через $\{\hat{\varepsilon}(k)\}$ процес оцінок залишків (похибок) моделі першого порядку $y(k) = a_0 + a_1 y(k-1) + \varepsilon(k)$, то у такому випадку умовна дисперсія основної змінної визначається так:

$$\operatorname{Var}[y(k+1) \mid y(k)] =$$
$$= E_k\{[y(k+1) - a_0 - a_1 y(k)]^2\} = E_k[\hat{\varepsilon}^2(k+1)].$$

Одним із простих підходів до опису змінної дисперсії є застосування моделі авторегресії типу АР(q) до квадратів оцінок залишків моделі низького порядку, наприклад:

$$\hat{\varepsilon}^2(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2(k-1) +$$
$$+ \alpha_2 \hat{\varepsilon}^2(k-2) + \ldots + \alpha_q \hat{\varepsilon}^2(k-q) + v(k),$$

де $v(k)$ — процес білого шуму з нульовим середнім для адекватної моделі. Якщо всі коефіцієнти $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ дорівнюють нулю (у статистичному смислі), то оцінка дисперсії буде просто константою. Інакше, умовна дисперсія для $y(k)$ описується наведеним рівнянням. Цим рівнянням можна скористатись для прогнозування умовної дисперсії на один крок:

$$E_k[\hat{\varepsilon}^2(k+1)] =$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}^2(k) + \alpha_2 \hat{\varepsilon}^2(k-1) + \ldots + \alpha_q \hat{\varepsilon}^2(k-q+1).$$

Оскільки цю модель можна побудувати за умови, що $\operatorname{Var}[y(k)] \neq \mathrm{const}$, то його називають *авторегресійним умовно гетероскедастичним* (АРУГ) рівнянням. Залишки $\varepsilon(k)$ можна отримати на основі рівнянь регресії, авторегресії або авторегресії з ковзним середнім (АРКС) низького порядку. Очевидно, що моделлю АРУГ можна скористатись для прогнозування волатильності. Вона дає можливість отримати більший ексцес, ніж у гауссової величини, тобто існує більша імовірність отримати значення, далекі від математичного сподівання. Це відповідає емпіричним властивостям досліджуваної величини. З іншого боку, цій моделі властивий ряд недоліків. АРУГ не дає можливості врахувати антисиметричну залежність зміни умовної дисперсії від зміни ціни фінансового інструменту. Також ця модель накладає обмеження на значення параметрів, що ускладнює їх оцінювання, особливо при великому порядку моделі. Ще одним недоліком цієї моделі є схильність до завищення значень умовної дисперсії при виникненні одноразових стрибків у ціні фінансового інструменту, тобто спостерігається повільна реакція на такі стрибки.

Моделі з ускладненою структурою (УАРУГ). Природним продовженням ідеї АРУГ моделі є введення в рівняння оцінювання умовної дисперсії компонентів ковзної середньої. Нехай зміни ціни описуються рівнянням $\varepsilon(k) = v(k)[h(k)]^{1/2}$, тоді умовну дисперсію вважатимемо розподіленою за такою моделлю [4]:

$$h(k) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon^2(k-i) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h(k-i).$$

Наявність компонентів ковзної середньої дає можливість знизити порядок моделі АРУГ. УАРУГ зберігає таку перевагу АРУГ-моделей, як наявність емпірично обумовлених важких хвостів розподілу основної величини.

Достатньо повно гетероскедастичний процес можна описати за допомогою експоненційної моделі УАРУГ (ЕУАРУГ), запропонованої в [5]. Основною перевагою моделі ЕУАРУГ є наявність компонент, які дають можливість врахувати антисиметричність впливу зміни ціни фінансового інструменту на його волатильність. Модель ЕУАРУГ може мати різні модифікації, наприклад таку:

$$\log[h(k)] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{|\varepsilon(k-i)|}{\sqrt{h(k-i)}} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{p} \beta_i \frac{\varepsilon(k-i)}{\sqrt{h(k-i)}} + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i \log[h(k-i)] + \upsilon(k).$$

Компоненти $\alpha_i \frac{|\varepsilon(k-i)|}{\sqrt{h(k-i)}}$ виражають реакцію моделі на абсолютні зміни ціни фінансового інструменту, а компоненти $\beta_i \frac{\varepsilon(k-i)}{\sqrt{h(k-i)}}$ враховують знак цієї зміни. Доцільність врахування цих значень окремо підтверджується емпіричним досвідом. До переваг моделі ЕУАРУГ належить її логарифмована форма, що знімає обмеження на додатність коефіцієнтів, які були в попередніх моделях.

Модель стохастичної волатильності. В сучасній літературі запропоновано нову структуру моделі умовної дисперсії — модель стохастичної волатильності (МСВ). Основна ідея створення цієї моделі полягає у тому, що рівняння умовної дисперсії містить явно заданий стохастичний процес [6]:

$$r(k) = \mu + \varepsilon(k),$$

$$\varepsilon(k) = z(k)\exp(0{,}5h(k)),$$

$$h(k) = \omega + \beta h(k-1) + v(k).$$

Наявність додаткової стохастичної компоненти надає моделі додаткової гнучкості, але призводить до значних труднощів при оцінюванні її параметрів. МСВ краще настроюється на вибірку даних, проте точність оцінок прогнозів, отриманих на основі цієї моделі, не завжди прийнятна. Загалом деякі автори вважають стохастичну волатильність більше теоретичною моделлю, ніж практичним інструментом для оцінювання умовної дисперсії.

Прийнятні результати прогнозування отримано за МСВ загального вигляду [2, 5, 6]:

$$\begin{gathered} y(k) = \beta_0 + \beta_1 x_1(k) + \beta_2 x_2(k) + \beta_p x_p(k) + u(k), \\ u(k) = \sqrt{h(k)}\,\varepsilon(k), \end{gathered} \tag{1}$$

$$\ln[h(k)] = \alpha_0 + \alpha_1 \ln[h(k-1)] + v(k), \tag{2}$$

$$\{\varepsilon(k)\} \sim N(0,1);\ \{v(k)\} \sim N(0,\sigma_v^2); \tag{3}$$

$$E[\varepsilon(k)v(k-l)] = 0 \ \ \forall k,l,$$

де $\{x_i(k), i = 1,\dots,p\}$ — пояснюючі змінні, які можуть включати затримані в часі значення залежної змінної, тобто $x_i(k) = y(k-i)$, а також додаткові фінансові індикатори. Для забезпечення стаціонарності процесу $\ln[h(k)]$ необхідно, щоб $|\alpha_1| < 1$. Очевидно, що рівняння (2) може мати, за необхідності, вищий порядок, тобто це може бути авторегресія АР(p).

Розглянемо процедуру оцінювання моделі (1)–(3). Позначимо вектор параметрів рівняння (1) через $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p]^T$, а вектор параметрів моделі (2) через $\theta = [\alpha_0, \alpha_1, \sigma_v^2]^T$. Нехай $\mathbf{y} = [y(1), y(2), \dots, y(N)]^T$ — вектор спостережень залежної змінної; $\mathbf{X}$ — матриця спостережень пояснюючих змінних; $\mathbf{h} = [h(1), h(2), \dots, h(N)]^T$ — вектор невимірюваних значень волатильності процесу $\{y(k)\}$, тобто вектор умовних дисперсій цього процесу, який ми будемо розглядати як допоміжну змінну моделі (1), (2). Оцінювання такої моделі за методом максимальної правдоподібності пов’язане із значними труднощами, оскільки функція правдоподібності в цій задачі являє собою N-вимірний розподіл вектора $\mathbf{h}$ такого вигляду:

$$f(\mathbf{y}|\mathbf{X},\beta,\theta) = \int f(\mathbf{y}|\mathbf{X},\beta,\mathbf{h}) f(\mathbf{h}|\theta)\, d\mathbf{h}. \tag{4}$$

У байєсівській постановці задачі вектор волатильностей $\mathbf{h}$ включає в себе так звані розширені параметри, а процес у цілому характеризується розподілами умовних ймовірностей $f(\mathbf{y}|\mathbf{h},\beta)$ і $f(\mathbf{h}|\theta)$ з апріорним розподілом параметрів моделі $p(\beta,\theta)$ [7]. Припустимо, що апріорний розподіл параметрів можна подати у вигляді добутку:

$$p(\beta,\theta) = p(\beta)p(\theta);$$

тобто апріорні розподіли для параметрів основної регресії та параметрів для рівняння, що описує волатильність, є незалежними. Тепер за методом Гіббса необхідно згенерувати випадкові вибірки для оцінювання параметрів рівнянь (1) і (2) з таких умовних апостеріорних розподілів:

$$f(\beta|\mathbf{y},\mathbf{X},\mathbf{h},\theta),\ f(\mathbf{h}|\mathbf{y},\mathbf{X},\beta,\theta),\ f(\theta|\mathbf{y},\mathbf{X},\beta,\mathbf{h}).$$

Розглянемо спочатку одновимірний випадок (одна залежна змінна). Якщо поділити обидві частини рівняння (1) на $\sqrt{h(k)}$, то отримаємо таку модель:

$$y_0(k) = \mathbf{x}_0^T(k)\beta + \varepsilon(k),\ k = 1,2,\dots,N, \tag{5}$$

де $y_0(k) = y(k)/\sqrt{h(k)}$; $\mathbf{x}_0(k) = \mathbf{x}(k)/\sqrt{h(k)}$; $\mathbf{x}(k) = [1, x_1(k), \dots, x_p(k)]^T$. Припустимо, що вектор β має багатовимірний нормальний апріорний розподіл: $\beta \sim \mathbf{N}(\beta_0, \mathbf{B}_0)$, де $\mathbf{B}_0$ — відповідна коваріаційна матриця. У такому випадку апостеріорний розподіл вектора β також буде нормальним із середнім β^* та коваріаційною матрицею $\mathbf{B}^*$. Ці дві величини можна обчислити за виразами

$$\mathbf{B}^* = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_0(k)\mathbf{x}^T(k) + \mathbf{B}_0^{-1},$$

$$\beta^* = \mathbf{B}^*\left(\sum_{k=1}^{N} \mathbf{x}_0(k)y_0(k) + \mathbf{B}_0^{-1}\beta_0\right).$$

Обчислення починаються із $(p+1)$-го значення для того, щоб врахувати $y(k-p)$ попередніх значень. Елементи вектора волатильностей обчислюють послідовно один за одним за допомогою умовного апостеріорного розподілу $f[h(k)|\mathbf{y},\mathbf{X},\mathbf{h}(-k),\beta,\theta]$, який формується з нормального розподілу для $u(k)$ та логнормального розподілу для волатильності:

$$f[h(k)|\mathbf{y},\mathbf{X},\mathbf{h}(-k),\beta,\theta] \propto$$

$$\propto f[u(k)|h(k),y(k),\mathbf{x}(k),\beta]\, f[h(k)|h(k-1),\theta]\times$$

$$\times f[h(k+1)|h(k),\theta] \propto$$

$$\propto \frac{1}{\sqrt{h(k)}}\exp\left[-\frac{[y(k)-\mathbf{x}^T(k)\beta]^{\;2}}{2h(k)}\right]h^{-1}(k)\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{[\ln h(k)-\mu(k)]^2}{2\sigma^2}\right] \propto \frac{1}{\sqrt{[h(k)]^3}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{[y(k)-\mathbf{x}^T(k)\beta]^2}{2h(k)}-\frac{[\ln h(k)-\mu(k)]^2}{2\sigma^2}\right], \quad (6)$$

де $\mu(k)=\dfrac{\alpha_0(1-\alpha_1)+\alpha_1[\ln h(k+1)]+\ln h(k-1)]}{1+\alpha^2}$;

$\sigma^2=\dfrac{\sigma_v^2}{1+\alpha_1^2}$. Для отримання цих характеристик використані такі властивості процесу:

а) $\{u(k)\,|\,h(k)\}\sim N(0,h(k))$;

б) $\{\ln h(k)|\ln h(k-1)\}\sim N(\alpha_0+\alpha_1\ln h(k-1),\sigma_v^2)$;

в) $\{\ln h(k+1)|\ln h(k)\}\sim N(\alpha_0+\alpha_1\ln h(k),\sigma_v^2)$;

г) $d\ln h(k)=h^{-1}(k)dh(k)$;

д) $(x-a)^2A+(x-b)^2C=(x-c)^2(A+C)+$
$+(a-b)^2AC/(A+C)$,

де d – оператор диференціювання; $c = =(Aa-Cb)/(A+C)$ за умови, що $A+C\neq 0$. Ця рівність є скалярною версією відомої леми [8]. У цьому випадку елементи цієї рівності мають такі значення: $A=1, a=\alpha_0+\ln h(k-1)$, $C=\alpha_1^2$ і $b=[\ln h(k+1)-\alpha_0]/\alpha_1$. Член $(a-b)^2AC/(A+C)$ не містить випадкової змінної $h(k)$ і не впливає на умовний апостеріорний розподіл. Для генерування випадкових значень застосуємо алгоритм Гіббса на решітці; при цьому діапазон зміни $h(k)$ вибирається кратним безумовній вибірковій дисперсії процесу $y(k)$.

Для того щоб згенерувати випадкову вибірку вектора параметрів θ, розділимо параметри таким чином: $\alpha=[\alpha_0,\alpha_1]^T$ і σ_v^2. Відповідно до цього розділимо також функцію апріорного розподілу: $p(\theta)=p(\alpha)p(\sigma_v^2)$. Тепер умовні апостеріорні розподіли можна описати так:

– $f(\alpha|\mathbf{y},\mathbf{X},\mathbf{h},\beta,\sigma_v^2)=f(\alpha|\mathbf{h},\sigma_v^2)$: за наявності $\mathbf{h}$ можна оцінити параметри моделі АР(1) для умовної дисперсії відповідно до процедури, яка розроблена для авторегресійних моделей. За апріорний розподіл для α виберемо багатовимірний нормальний розподіл із середнім α_0 і коваріаційною матрицею $\mathbf{C}_0$, що приводить до багатовимірного нормального розподілу $f(\alpha|\mathbf{h},\sigma_v^2)$ із середнім α^* і коваріаційною матрицею $\mathbf{C}^*$:

$$(\mathbf{C}^*)^{-1}=\frac{\sum_{k=2}^{N}\mathbf{z}(k)\mathbf{z}^T(k)}{\sigma_v^2}+\mathbf{C}_0^{-1},$$

$$\alpha^* = \mathbf{C}^*\left[\frac{\sum_{k=2}^{N}\mathbf{z}(k)\ln h(k)}{\sigma_v^2}+\mathbf{C}_0^{-1}\alpha_0\right],$$

де $\mathbf{z}(k)=[1,\ln h(k-1)]^T$.

– $f(\sigma_v^2|\mathbf{y},\mathbf{X},\mathbf{h},\beta,\alpha)=f(\sigma_v^2|\mathbf{h},\alpha)$: за відомих значень $\mathbf{h}$ і α можна обчислити $v(k)=\ln h(k)-$ $-\alpha_0-\alpha_1\ln h(k-1)$, $k=2,3,\ldots,N$. Якщо апріорним розподілом для σ_v^2 є $\left(\dfrac{m\lambda}{\sigma_v^2}\right)\sim\chi_m^2$, то умовним апостеріорним розподілом для σ_v^2 буде інвертований розподіл *xi*-квадрат з $m+n-1$ ступенями свободи, тобто $\left(m\lambda+\sum_{k=2}^{N}v^2(k)\right)/\sigma_v^2\sim$ $\sim\chi_{m+n-1}^2$.

Необхідно зазначити, що вираз (6) справедливий для $1<k<N$, де N – довжина вибірки. Крайні значення $h(1)$ і $h(N)$ необхідно модифікувати, наприклад $h(1)=\text{const}$, а обчислення $h(k)$

починається з $k = 2$. При $k = N$ можна скористатись виразом $\ln[h(N)] \sim [\alpha_0 + \alpha_1 \ln[h(N-1)$, $\sigma_v^2]$. Можна також використати прогноз $h(N+1)$, а також зворотній прогноз $h(0)$, а далі вже застосовувати вираз (6). Оскільки нас цікавить $h(N)$, то значення $h(N+1)$ обчислюється як двокроковий прогноз на основі наявного значення $h(N-1)$. За допомогою моделі (2) можна записати

$$\hat{h}_{N-1}(N+1) = \alpha_0 + \alpha_1[\alpha_0 + \alpha_1 \ln h(N-1)].$$

Зворотний прогноз з метою визначення $h(0)$ ґрунтується на моделі

$$\ln h(k) - b = \alpha_1[\ln h(k-1) - b] + v(k),$$

де $b = \dfrac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ при $|\alpha_1| < 1$. Модель зворотного часового ряду має вигляд

$$\ln h(k) - b = \alpha_1[\ln h(k+1) - b] + v^*(k),$$

де $\{v^*(k)\} \sim N(0, \sigma_v^2)$. Таким чином, прогноз на два кроки назад визначається за формулою $h_2(-2) - b = \alpha_1^2[\ln h(2) - b]$. Вираз (6) можна також отримати за допомогою результатів, які стосуються обробки пропусків даних при побудові моделі АР(1). Припустимо, що пропущеним значенням є $\ln h(k)$. Це пропущене значення є сусіднім для $\ln h(k-1)$ і $\ln h(k+1)$, $1 < k < N$. Скористаємось моделлю процесу

$$\ln h(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k-1) + u(k)$$

і введемо позначення $z(k) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k-1)$, $x(k) = 1, \varphi(k) = -u(k)$. Тепер можна записати

$$z(k) = x(k) \ln h(k) + \varphi(k). \qquad (7)$$

З рівняння $\ln h(k+1) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln h(k) + u(k+1)$ можна визначити, що $z(k+1) = \ln h(k+1) - \alpha_0$, $x(k+1) = \alpha_1$ і $\varphi(k+1) = u(k+1)$, а тому

$$z(k+1) = x(k+1) \ln h(k) + u(k+1). \qquad (8)$$

Таким чином, рівняння (7) і (8) утворюють просту лінійну регресію з двома спостереженнями і невідомим параметром $\ln h(k)$. Зазначимо, що $u(k)$ і $u(k+1)$ мають однаковий розподіл, оскільки $-u(k)$ також має нормальний розподіл $N(0, \sigma_v^2)$. Оцінку $\ln h(k)$ позначимо $\widehat{lh}(k)$; використовуючи метод найменших квадратів, її можна знайти за виразом

$$\widehat{lh}(k) = \frac{x(k)\,z(k) - x(k+1)\,z(k+1)}{x^2(k) + x^2(k+1)} =$$

$$= \frac{\alpha_0(1-\alpha_1) + \alpha_1[\ln h(k+1) + \ln h(k-1)]}{1 + \alpha_1^2},$$

що являє собою умовне середнє для $\ln h(k)$, яке визначається рівнянням (6). Крім того, ця оцінка є нормально розподіленою із середнім $\ln h(k)$ і дисперсією $\dfrac{\sigma_v^2}{1+\alpha_1^2}$. Вираз (6) являє собою добуток розподілів $\{u(k)\} \sim N(0, h(k)$ і $\{\widehat{lh}(k)\} \sim N\left(\ln h(k), \dfrac{\sigma_v^2}{1+\alpha_1^2}\right)$ із застосуванням перетворення $d \ln h(k) = h^{-1}(k) dh(k)$. Наведений метод обчислення оцінки для $\ln h(k)$ можна узагальнити на модель довільного порядку АР(p). Початкове значення для $\ln h(k)$ можна отримати в результаті оцінювання моделі (1) за часовим рядом.

Багатовимірна модель стохастичної волатильності. Розглянемо багатовимірну МСВ на прикладі двовимірної моделі [9]. Модель двовимірного фінансового ряду $\mathbf{y}(k) = [y_1(k) y_2(k)]^T$ запишемо у такому вигляді:

$$\mathbf{y}(k) = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k), \qquad (9)$$

$$\ln g_{ii}(k) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \ln g_{ii}(k-1) + v_i(k),\ i = 1, 2, \qquad (10)$$

$$q_{21}(k) = \gamma_0 + \gamma_1 q_{21}(k-1) + \eta(k), \qquad (11)$$

де $\{\mathbf{u}(k)\}$ — послідовність некорельованих випадкових гауссових векторів з нульовим середнім і матрицею умовних коваріацій $\Sigma(k)$; β_0 — двовимірний вектор констант; $\mathbf{x}(k)$ — вектор пояснюючих змінних; $\{v_1(k)\}, \{v_2(k)\}, \{\eta(k)\}$ — незалежні послідовності білого шуму, такі, що $\mathrm{Var}[v_i(k)] = \sigma_{iv}^2$ і $\mathrm{Var}[\eta(k)] = \sigma_\eta^2$. Логарифмування в рівнянні (10) застосовується з метою забезпечення додатної визначеності значень $g_{ii}(k)$.

Матриця $\Sigma(k)$ визначається рівнянням

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}(k) & \sigma_{12}(k) \\ \sigma_{21}(k) & \sigma_{22}(k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{21}(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11}(k) & 0 \\ 0 & g_{22}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q_{21}(k) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

де $g_{ii}(k) = \mathrm{Var}\,[\varphi_i(k) | y(k-1)]$ і $\varphi_1(k) \perp \varphi_2(k)$. В цьому випадку при моделюванні використовуються $g_{11}(k), g_{22}(k)$ і $q_{21}(k)$.

Застосування декомпозиції Холецького дає можливість виконати перетворення

$$\varphi_1(k) = u_1(k), \varphi_2(k) = u_2(k) - q_{21}(k)\,\varphi_1(k),$$

де $\varphi_2(k), q_{21}(k)$ можна інтерпретувати як залишки та оцінку за методом найменших квадратів параметра регресії:

$$u_2(k) = \varphi_2(k) + q_{21}(k) u_1(k).$$

Для зручності введемо такі позначення: $\mathbf{G}_i = [g_{ii}(1), \ldots, g_{ii}(N)]^T$, $\mathbf{G} = [\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2]$ і $\mathbf{Q} = [q_{21}(1), \ldots, q_{21}(N)]^T$. Параметрами моделі (9)–(11), які необхідно оцінити, є: $\beta = [\beta_0, \beta_1]^T$, $\theta_i = [\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \sigma_{iv}^2]^T$, $i = 1, 2$, і $\gamma = [\gamma_0, \gamma_1, \sigma_\eta^2]^T$. Розширеними векторами параметрів є $\mathbf{Q}, \mathbf{G}_1$ і $\mathbf{G}_2$. Для того щоб оцінити параметри двовимірної моделі стохастичної волатильності за методом дискретизації Гіббса, скористаємось результатами оцінювання одновимірної моделі, отриманими вище, а також двома додатковими умовними апостеріорними розподілами. Необхідні випадкові вибірки можна отримати таким чином:

– для параметрів β_0 і β_1 скористаємось результатом, отриманим для рівняння (5);

– для $g_{11}(k)$ скористаємось виразом (6) із заміною $u(k)$ на $u_1(k)$;

– для вектора параметрів θ_1 скористаємось методом, розглянутим для одновимірного випадку, за умови заміни $u(k)$ на $u_1(k)$.

Для того щоб згенерувати випадкові вибірки для ω_2 і $g_{22}(k)$, необхідно обчислити значення $\varphi_2(k)$. Це можна зробити за допомогою виразу $\varphi_2(k) = u_2(k) - q_{21}(k) u_1(k)$ при відомому векторі $\mathbf{Q}$. Також відомо, що $\varphi_2(k)$ має нормальний розподіл з нульовим середнім та умовною дисперсією $g_{22}(k)$. Тепер необхідно знайти апостеріорні розподіли

$$f(\bar{\theta} | \mathbf{Q}, \sigma_\eta^2), f(\sigma_\eta^2 | \mathbf{Q}, \bar{\theta}), f(q_{21}(k) | \mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}(-k), \gamma),$$

де $\bar{\theta} = [\gamma_0, \gamma_1]^T$ – вектор коефіцієнтів рівняння (11); $\mathbf{A}$ містить множину значень $\mathbf{u}(k)$, яку можна знайти, якщо відомі значення $\mathbf{y}, \mathbf{X}, \beta_0$ і β_1. При відомих значеннях $\mathbf{Q}$ і σ_η^2 модель (11) – це проста модель АР(1) з гауссовим шумом. Таким чином, якщо $\bar{\theta}$ має двовимірний нормальний апріорний розподіл із середнім $\bar{\theta}_0$ та коваріаційною матрицею $\mathbf{D}_0$, то умовний апостеріорний розподіл для $\bar{\theta}$ також буде двовимірним нормальним розподілом із середнім $\bar{\theta}_*$ і коваріаційною матрицею $\mathbf{D}_*$, де

$$\mathbf{D}_*^{-1} = \frac{\sum_{k=2}^N \mathbf{z}(k)\,\mathbf{z}^T(k)}{\sigma_\eta^2} + \mathbf{D}_0^{-1};$$

$$\bar{\theta}_* = \mathbf{D}_* \left(\frac{\sum_{k=2}^N \mathbf{z}(k) q_{21}(k)}{\sigma_\eta^2} + \mathbf{D}_0^{-1} \bar{\theta}_0 \right),$$

де $\mathbf{z}(k) = [1, q_{21}(k-1)]^T$. Аналогічно, якщо апріорним розподілом для σ_η^2 є $\frac{m\lambda}{\sigma_\eta^2} \sim \chi_m^2$, то умовним апостеріорним розподілом для σ_η^2 буде

$$\frac{m\lambda + \sum_{k=2}^N \eta^2(k)}{\sigma_\eta^2} \sim \chi_{m+N-1}^2,$$

де $\eta(k) = q_{21}(k) - \gamma_0 - \gamma_1 q_{21}(k-1)$. Насамкінець,

$$f(q_{21}(k) | \mathbf{A}, \mathbf{G}, \mathbf{Q}(-k), \sigma_\eta^2, \bar{\theta}) \propto$$

$$\propto f\,[(\varphi_2(k) | g_{22}(k)]\, f\,[q_{21}(k) | q_{21}(k-1),$$

$$\bar{\theta}, \sigma_\eta^2]\, f\,[q_{21}(k+1) | q_{21}(k), \bar{\theta}, \sigma_\eta^2] \propto$$

$$\propto g_{22}^{-0,5}(k) \exp[-(u_2(k) - q_{21}(k) u_1(k))^2 / 2 g_{22}(k)] \times$$

$$\times \exp[-(q_{21}(k) - \mu(k))^2 / (2\sigma^2)], \quad (13)$$

де $\mu(k) = [\gamma_0(1-\gamma_1) + \gamma_1(q_{21}(k-1) + q_{21}(k+1))]/(1+\gamma_1^2)$ і $\sigma^2 = \sigma_\eta^2/(1+\gamma_1^2)$. У загальному випадку значення $\mu(k)$ і σ^2 можна отримати за допомогою результату аналізу пропущених значень у процесі АР(p).

Вираз (13) являє собою замкнену форму розподілу для $q_{21}(k)$. Перший член цього виразу — це умовний розподіл для $q_{21}(k)$ при відомих $g_{22}(k)$ і $\mathbf{u}(k)$; він являє собою нормальний розподіл із середнім $u_2(k)/u_1(k)$ і дисперсією $g_{22}(k)/(u_1(k))^2$. Другий член цього виразу — це також щільність нормального розподілу з середнім $\mu(k)$ і дисперсією σ^2. Таким чином, умовний апостеріорний розподіл $q_{21}(k)$ є нормальним розподілом із середнім μ_* і дисперсією σ_*^2, де

$$\frac{1}{\sigma_*^2} = \frac{u_1^2(k)}{g_{22}(k)} + \frac{1+\gamma_1^2}{\sigma_\eta^2};$$

$$\mu_* = \sigma_*^2 \left(\frac{1+\gamma_1^2}{\sigma_\eta^2} \mu(k) + \frac{u_1^2(k)}{g_{22}(k)} \frac{u_2(k)}{u_1(k)} \right).$$

Побудова моделей і оцінювання прогнозів

Для виконання обчислювальних експериментів стосовно побудови моделей і оцінювання прогнозів використано дані про ціни акцій компаній Microsoft, Dell та ще шести інших компаній при закритті торгів на фондовій біржі з бази даних фінансової системи Yahoo Finance.

Кращий результат прогнозування волатильності цін акцій компанії Microsoft (табл. 1) на один крок отримано за експоненційною моделлю авторегресії з умовною гетероскедастичністю (САПП = 5,868 % на перевірочній вибірці, потужність перевірочної вибірки становила 30 значень). Неприйнятний за якістю прогноз обчислено за моделлю АРУГ, яка має найпростішу структуру і, відповідно, неадекватна процесу.

***Таблиця* 1.** Результати прогнозування волатильності цін акцій компанії Microsoft

Тип моделі	Характеристики оцінок прогнозів на навчальній вибірці			Характеристики оцінок прогнозів на перевірочній вибірці		
	САП	САПП	Тейл	САП	САПП	Тейл
АРУГ	0,9756	3554,2	0,327	0,4183	3983,6	0,415
УАРУГ	0,8473	25,96	0,138	0,2135	34,723	0,159
ЕУАРУГ	0,5675	3,874	0,019	0,0637	5,868	0,026
МСВ	0,6502	5,653	0,035	0,2343	8,390	0,048

Примітка. САП — середня абсолютна похибка; САПП — середня абсолютна похибка у процентах; Тейл — коефіцієнт Тейла.

***Таблиця* 2.** Результати прогнозування волатильності цін акцій компанії Dell

Тип моделі	Характеристики оцінок прогнозів на навчальній вибірці			Характеристики оцінок прогнозів на перевірочній вибірці		
	САП	САПП	Тейл	САП	САПП	Тейл
АРУГ	0,9589	3637,4	0,671	0,0886	4101,2	0,749
УАРУГ	0,6445	21,37	0,169	0,0963	29,352	0,251
ЕУАРУГ	0,3703	4,539	0,028	0,0187	6,759	0,043
МСВ	0,4681	7,831	0,051	0,4489	10,943	0,078

***Таблиця* 3.** Порівняння точності оцінювання волатильності ціни акцій за моделлю ЕУАРУГ на навчальній вибірці на цінах акцій шістьох типів

ЕУАРУГ	САП	САПП	Тейл
Тип 1	0,4353	4,9400	0,0380
Тип 2	0,5348	6,1500	0,0500
Тип 3	0,4890	6,1700	0,0420
Тип 4	0,5590	7,0900	0,0450
Тип 5	0,3570	4,3800	0,0300
Тип 6	0,4750	5,7460	0,0410

***Таблиця* 4.** Порівняння точності оцінювання волатильності ціни акцій за моделлю ЕУАРУГ на перевірочній вибірці на цінах акцій шістьох типів

ЕУАРУГ	САП	САПП	Тейл
Тип 1	0,5053	5,9300	0,0440
Тип 2	0,7154	9,2400	0,0630
Тип 3	0,4030	5,6800	0,0320
Тип 4	0,6050	8,6900	0,0520
Тип 5	0,4030	5,5500	0,0300
Тип 6	0,5263	7,0180	0,0442

Кращі результати прогнозування волатильності цін акцій компанії Dell отримано за моделями ЕУАРУГ та МСВ (табл. 2). Ці дві моделі надалі використано для прогнозування волатильності ще шести типів акцій (результати обчислювальних експериментів подано у табл. 3—6).

***Таблиця* 5.** Порівняння точності оцінювання волатильності ціни акцій за моделлю стохастичної волатильності на навчальній вибірці

МСВ	САП	САПП	Тейл
Тип 1	0,6400	7,5000	0,0470
Тип 2	0,8000	9,5700	0,0580
Тип 3	0,8800	9,0900	0,0540
Тип 4	0,6800	8,9000	0,0570
Тип 5	0,4800	6,0000	0,0390
Тип 6	0,6960	8,2120	0,0510

***Таблиця* 6.** Порівняння точності оцінювання волатильності ціни акцій за моделлю стохастичної волатильності на перевірочній вибірці

МСВ	САП	САПП	Тейл
Тип 1	0,8400	10,9000	0,0560
Тип 2	0,8900	12,3000	0,0650
Тип 3	0,6700	10,4500	0,0630
Тип 4	0,4900	7,0100	0,0360
Тип 5	0,3500	5,0500	0,0310
Тип 6	0,6480	9,1420	0,0502

Виконані емпіричні дослідження моделей умовної дисперсії свідчать про те, що кращі результати короткострокового прогнозування можна отримати за моделями ЕУАРУГ і МСВ, структура яких краще узгоджується із фактичними часовими змінами дисперсії вибраних фінансових процесів. Значення середньої абсолютної похибки оцінок прогнозів у процентах на перевірочній вибірці становить 3,88—9,24 % для моделі ЕУАРУГ, а для моделі стохастичної волатильності — 5,05—12,3 %. Тобто отримані значення похибок свідчать, що оцінки короткострокових прогнозів мають цілком прийнятні значення для подальшого використання, наприклад при прийнятті рішень стосовно виконання торгових операцій на біржі.

Висновки

Дослідження моделей умовної дисперсії простої та ускладнених структур дало можливість виявити, що фактичні зміни волатильності фінансових процесів краще відображають ускладнені моделі — експоненційна узагальнена авторегресія з умовною гетероскедастичністю і модель стохастичної волатильності. На відміну від простої моделі АРУГ, випадкове збурення в обох ускладнених моделях враховано таким чином, щоб відображати його фактичний різнознаковий вплив на дисперсію фінансового процесу. Запропоновано модель стохастичної волатильності для багатовимірного випадку та методику її оцінювання з використанням методу Монте-Карло для марковських ланцюгів.

За результатами обчислювальних експериментів побудовано альтернативні моделі умовної дисперсії для вибраних процесів ціноутворення на біржі. Отримані числові результати свідчать, що кращі оцінки короткострокових прогнозів волатильності можна отримати за моделями ЕУАРУГ і МСВ. Значення середньої абсолютної похибки оцінок прогнозів у процентах на перевірочній вибірці становить 3,88—9,24 % для моделі ЕУАРУГ, а для моделі стохастичної волатильності — 5,05—12,3 %. Тобто отримані результати свідчать, що оцінки короткострокових прогнозів мають цілком прийнятні значення для подальшого використання, наприклад при прийнятті рішень стосовно виконання торгових операцій на біржі, аналізі ринкових ризиків, формуванні портфеля фінансових інструментів тощо. Дещо гірший результат прогнозування, отриманий за МСВ, можна пояснити тим, що моделі цього типу перебувають на стадії розвитку і для їх практичного застосування необхідно продовжувати пошук прийнятних структур. Крім того, процедура оцінювання параметрів таких моделей потребує досить складних обчислень, що також впливає на якість остаточних оцінок прогнозів. Разом із тим можна стверджувати, що навіть в існуючій формі модель дає можливість робити високоякісні прогнози.

У майбутніх дослідженнях передбачається подальше удосконалення структури моделі стохастичної волатильності, методики оцінювання її параметрів та її застосування в системах оцінювання фінансових ризиків з метою підвищення точності оцінок прогнозів можливих втрат.

1. *Грін В.Г.* Економетричний аналіз. – К.: Основи, 2005. – 1198 с.
2. *Бідюк П.І., Романенко В.Д., Тимощук О.Л.* Аналіз часових рядів. – К.: Політехніка, 2012. – 520 с.
3. *F.R. Engle,* "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", Econometrica, vol. 50, no. 4, pp. 987–1007, 1982.
4. *T. Bollerslev,* "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity", J. of Econometrics Volume, vol. 31, no. 3, pp. 307–327, 1986.
5. *D.B. Nelson,* "Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: A New Approach", Econometrica, vol. 59, no. 2, pp. 347–370, 1991.
6. *S.J. Taylor,* "Modeling stochastic volatility: A review and comparative study", Mathematical Finance, vol. 4, no. 2, pp. 183–204, 1994.
7. *S.H. Poon,* Practical guide to forecasting financial market volatility. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2005, 238 p.
8. *Зельнер А.* Байесовские методы в эконометрии. – М.: Статистика, 1980. – 438 с.
9. *R.S. Tsay,* Analysis of financial time series. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2010, 715 p.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
25 вересня 2012 року