УДК 517.95

С.С. Коваленко, І.М. Копась, В.І. Стогній

ПОПЕРЕДНЯ ГРУПОВА КЛАСИФІКАЦІЯ ОДНОГО КЛАСУ УЗАГАЛЬНЕНИХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ КОЛМОГОРОВА

The group-theoretic method is a modern research method for studying both linear and nonlinear partial differential equations. By using this method, we construct exact partial classical solutions of equations allowing for non-trivial symmetry groups. In this paper, a class of (2+1)-dimensional generalized linear Kolmogorov equations is considered. Our aim is to investigate symmetry properties of equations from the class and to use them to construct invariant fundamental solutions. By using the Akhatov–Gazizov–Ibragimov algorithm, the preliminary group classification of the class under study is carried out. For the equations with non-trivial symmetry properties, maximal invariance algebras re found. By using the Aksenov algorithm, we calculate the invariance algebra of fundamental solutions of the linear Kolmogorov equations. We use the algebra operators obtained to construct invariant fundamental solutions of the equation. We demonstrate that the fundamental solution obtained by A.N. Kolmogorov is an invariant fundamental solution of the linear Kolmogorov equation.

Вступ

У 1934 р. А.М. Колмогоров [1] для опису неізотропних дифузійних процесів запропонував використовувати таке рівняння:

$$u_t - u_{xx} + xu_y = 0\,, \tag{1}$$

де $u = u(t,x,y)$; $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$; $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$; $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. У праці [2] було показано, що рівняння (1), яке в літературі отримало назву лінійного рівняння Колмогорова (ЛРК), має нетривіальні симетрійні властивості, а саме допускає 7-параметричну групу нетривіальних локальних перетворень змінних. Це дає можливість будувати точні розв'язки у явному вигляді рівняння (1) через проведення симетрійної редукції або відокремлення змінних за операторами з алгебри інваріантності цього рівняння [2].

Виникає природне запитання: чи існують серед рівнянь вигляду

$$u_t - u_{xx} + A(x)u_y = 0 \tag{2}$$

інші, відмінні від (1), рівняння з нетривіальними симетрійними властивостями? У класі рівнянь (2) $A(x) \neq \text{const}$ – довільна гладка в деякій області простору $\mathbf{R}$ функція змінної x. Відповімо на це запитання, здійснивши групову класифікацію класу рівнянь (2), які в подальшому називатимемо узагальненими лінійними рівняннями Колмогорова (УЛРК).

Рівняння вигляду (2) є окремими випадками двовимірного рівняння Фоккера–Планка (ФП)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}[A_i(t,x)u] + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[B_{ij}(t,x)u], \tag{3}$$

де $x = (x_1, x_2)$; коефіцієнти зносу $\mathbf{A}(t,x)$ та дифузії $\mathbf{B}(t,x)$ визначаються відповідно як вектор

$$\mathbf{A}(t,x) = (A_1(t,x), A_2(t,x))$$

і матриця

$$\mathbf{B}(t,x) = \| B_{ij}(t,x) \|_{i,\,j=1}^{2}\,.$$

Легко бачити, що коефіцієнти зносу та дифузії УЛРК (2) мають відповідно такий вигляд:

$$\mathbf{A}(t,x,y) = (0, A(x))\,,\ \ \mathbf{B}(t,x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

З погляду теоретико-групових методів, наскільки нам відомо, було досліджено лише окремі класи рівнянь вигляду (3). Так, у праці [3] було розглянуто задачу групової класифікації класу рівнянь ФП з однорідним коефіцієнтом зносу та сталою діагональною матрицею дифузії. У статтях [4, 5] на основі симетрійних властивостей рівняння Крамерса, яке є двовимірним рівнянням ФП (3) з коефіцієнтами зносу та дифузії

$$\mathbf{A}(t,x,y) = (y, -V'(x) - \gamma y)\,,$$

$$\mathbf{B}(t,x,y) = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

знайдено низку його інваріантних розв'язків. У [6] досліджено одне двовимірне рівняння ФП з теорії стохастичних процесів зі змінною матрицею дифузії.

Отже, як випливає зі сказаного вище, питання про групову класифікацію двовимірних рівнянь ФП (3) залишається відкритим і в кожному окремому випадку потребує самостійного вивчення.

Постановка задачі

Метою роботи є: провести попередню групову класифікацію класу УЛРК (2); побудувати фундаментальні розв'язки деяких рівнянь із досліджуваного класу.

Основна алгебра інваріантності класу рівнянь (2)

Визначимо основну алгебру інваріантності рівнянь з класу (2), тобто знайдемо максимальну алгебру інваріантності рівняння (2) за довільної функції $A(x)$.

Теорема 1. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2) за довільної гладкої функції $A(x)$ є алгебра

$$A^{\text{pr}} = \langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, \beta(t, x)\partial_u \rangle, \quad (4)$$

де функція $\beta(t,x)$ є довільним гладким розв'язком лінійного рівняння теплопровідності $\beta_t - \beta_{xx} = 0$.

Доведення. Згідно із загальним алгоритмом Лі [7] інфінітезимальні оператори, що генерують алгебру інваріантності рівняння (2), шукаємо в класі операторів

$$X = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \theta\partial_y + \eta\partial_u, \quad (5)$$

де $\tau = \tau(t,x,y,u)$; $\xi = \xi(t,x,y,u)$; $\theta = \theta(t,x,y,u)$; $\eta = \eta(t,x,y,u)$ — довільні двічі диференційовані функції в деякій області простору незалежних змінних t,x,y та залежної змінної u.

Умова інваріантності рівняння (2) відносно оператора (5) має вигляд

$$\varphi^t - \varphi^{xx} + \xi A' u_y + A\varphi^y \big|_{(2)} = 0, \quad (6)$$

де

$$\varphi^t = D_t(\eta) - u_t D_t(\tau) - u_x D_t(\xi) - u_y D_t(\theta);$$

$$\varphi^x = D_x(\eta) - u_t D_x(\tau) - u_x D_x(\xi) - u_y D_x(\theta);$$

$$\varphi^y = D_y(\eta) - u_t D_y(\tau) - u_x D_y(\xi) - u_y D_y(\theta);$$

$$\varphi^{xx} = D_x(\varphi^x) - u_{tx} D_x(\tau) - u_{xx} D_x(\xi) - u_{xy} D_x(\theta),$$

де D_t, D_x, D_y — узагальнені оператори диференціювання відповідно за змінними t,x,y; умова $|_{(2)}$ в (6) означає заміну u_t на $u_{xx} - A(x)u_y$; $A' = \dfrac{dA}{dx}$.

Виконавши в (6) відповідні перетворення та обчислення, переконуємось, що визначальні рівняння для знаходження координат оператора X та функції $A(x)$ мають такий вигляд:

$$\begin{gathered}
\tau_x = \theta_x = \eta_{uu} = 0; \\
\tau_t - 2\xi_x + \tau_y A = 0; \\
\xi A' + (\tau_t - \theta_y) A + \tau_y A^2 - \theta_t = 0; \\
2\eta_{xu} + \xi_t + \xi_y A - \xi_{xx} = 0; \\
\eta_t - \eta_{xx} + \eta_y A = 0.
\end{gathered} \quad (7)$$

З першого рівняння системи (7) випливає, що $\tau = \tau(t,y)$; $\xi = \xi(t,x,y)$; $\theta = \theta(t,y)$; $\eta = \alpha(t,x,y)u + \beta(t,x,y)$, тоді останні чотири рівняння набудуть такого вигляду:

$$\begin{gathered}
\tau_t - 2\xi_x + \tau_y A = 0; \\
\xi A' + (\tau_t - \theta_y) A + \tau_y A^2 - \theta_t = 0; \\
2\alpha_x + \xi_t + \xi_y A - \xi_{xx} = 0; \\
\alpha_t - \alpha_{xx} + \alpha_y A = 0; \\
\beta_t - \beta_{xx} + \beta_y A = 0.
\end{gathered} \quad (8)$$

Оскільки функція A — довільна, то, розщепивши рівняння системи (8) за A і A', одержимо такі рівності:

$$\tau_t = \tau_y = \xi = \theta_t = \theta_y = \alpha_t = \alpha_x = \alpha_y = \beta_y = 0. \quad (9)$$

Із системи (9) випливає, що

$$\tau = c_1;\ \xi = 0; \theta = c_2;\ \eta = c_3 u + \beta(t,x), \quad (10)$$

де c_1, c_2, c_3 — довільні дійсні сталі, $\beta(t,x)$ — довільний гладкий розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $\beta_t - \beta_{xx} = 0$. Оператор X з координатами (10) породжує алгебру (4).

Теорему доведено.

Група перетворень еквівалентності класу рівнянь (2)

Перш ніж перейти до розв'язання задачі класифікації симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з класу (2), знайдемо групу перетворень еквівалентності цього класу.

***Означення* 1.** Перетворенням еквівалентності класу УЛРК (2) називається невироджена локальна заміна змінних

$$\bar{t} = T(t,x,y,u);\ \bar{x} = X(t,x,y,u);\ \bar{y} = Y(t,x,y,u);$$

$$\bar{u} = U(t,x,y,u);\ \bar{A} = \Phi(t,x,y,u,A),$$

яка переводить кожне рівняння з класу (2) на функцію $u = u(t,x,y)$ з довільним елементом A у деяке інше рівняння з цього самого класу на функцію $\bar{u} = \bar{u}(\bar{t},\bar{x},\bar{y})$ з новим довільним елементом $\bar{A}$.

Множина перетворень еквівалентності становить групу перетворень еквівалентності, яку ми надалі позначатимемо E. Неперервна частина цієї групи E_c утворює групу Лі, алгебру Лі якої знаходять за відомим алгоритмом [7, 8].

Теорема 2. Алгебра Лі неперервної підгрупи E_c групи перетворень еквівалентності E класу рівнянь (2) генерується такими операторами:

$$E_1 = \partial_t;\ E_2 = \partial_x;\ E_3 = \partial_y;\ E_4 = u\partial_u;$$
$$E_5 = t\partial_y + \partial_A;\ E_6 = y\partial_y + A\partial_A;$$
$$E_7 = 2t\partial_t + x\partial_x - 2A\partial_A;\ E_\infty = b(t,x)\partial_u,$$

де $b = b(t,x)$ — довільний гладкий розв’язок лінійного рівняння теплопровідності $b_t = b_{xx}$.

Скінченні перетворення, що відповідають операторам з теореми 2, отримуються розв’язуванням відповідних рівнянь Лі. Провівши необхідні обчислення, приходимо до такого твердження.

Наслідок. Група E_c неперервних перетворень еквівалентності класу УЛРК (2) складається з таких перетворень:

$$\bar{t} = \alpha^2 t + e_1;\ \bar{x} = \alpha x + e_2;\ \bar{y} = \beta y + \delta t + e_3;$$

$$\bar{u} = \gamma u + b(t,x);\ \bar{A} = \frac{\beta}{\alpha^2}A + \frac{\delta}{\alpha^2},$$

де $\alpha > 0$; $\beta > 0$; $\gamma > 0$; δ; $e_i (i = 1,\dots,3)$ — довільні дійсні сталі; $b = b(t,x)$ — довільний гладкий розв’язок лінійного рівняння теплопровідності $b_t = b_{xx}$.

***Зауваження* 1.** Група E перетворень еквівалентності досліджуваного класу диференціальних рівнянь (2), крім неперервної її підгрупи, містить також ряд дискретних перетворень, а саме такі три інверсії:

1) $x \to -x$;
2) $u \to -u$;
3) $y \to -y,\ A \to -A$.

Попередня групова класифікація класу рівнянь (2)

Тепер розглянемо розв’язок задачі виділення з класу (2) тих диференціальних рівнянь, які мають нетривіальні симетрійні властивості, тобто допускають максимальну алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж A^{pr}. Для цього необхідно розв’язати систему диференціальних рівнянь (8). Незважаючи на те що функція $A(x)$ є функцією лише однієї змінної x, провести повний аналіз цієї системи без уведення додаткових умов і припущень досить складно, а тому обмежимося розв’язанням задачі попередньої групової класифікації класу УЛРК (2).

Метод попередньої групової класифікації, який був запропонований наприкінці 80-х років XX ст. [9, 10], для більшості випадків не дає змоги знайти всі специфікації функціональних параметрів, що дають розширення основної алгебри інваріантності. Проте він дає можливість досить легко виділити ряд випадків розширення та виписати відповідні алгебри інваріантності.

Теорема 3. УЛРК (2) допускає максимальну алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж A^{pr}, якщо функція $A(x) \neq \mathrm{const}$, вибрана з точністю до перетворень еквівалентності з групи E, має один із таких виглядів: 1) $A = \ln x$; 2) $A = e^x$; 3) $A = x^k,\ k \neq 0$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо дію групи E_c на просторі змінних $\langle x, A\rangle$, тобто 4-параметричну групу Лі $\tilde{E}_c$, що породжується такими операторами:

$$\tilde{E}_2 = \partial_x;\ \tilde{E}_5 = \partial_A;\ \tilde{E}_6 = A\partial_A;\ \tilde{E}_7 = x\partial_x - 2A\partial_A.$$

Інваріантні многовиди відносно довільної однопараметричної підгрупи групи $\tilde{E}_c$ дають функції $A(x)$, за яких відбувається розширення основної групи класу рівнянь (2). Складемо лінійну комбінацію з операторів групи $\tilde{E}_c$:

$$\tilde{E} = \lambda_2\tilde{E}_2 + \lambda_5\tilde{E}_5 + \lambda_6\tilde{E}_6 + \lambda_7\tilde{E}_7 =$$

Таблиця. Результат попередньої групової класифікації класу УЛРК (2)

№	$A(x)$	Додаткові припущення	Базис скінченновимірної частини максимальної алгебри інваріантності
1	$\ln x$	–	$A_0^{\text{pr}},\ 2t\partial_t + x\partial_x + (t+2y)\partial_y$
2	e^x	–	$A_0^{\text{pr}},\ \partial_x + y\partial_y,\ 2y\partial_x + y^2\partial_y - (y+e^x)u\partial_u$
3	x^k	$k \ne -2, 0, 1$	$A_0^{\text{pr}},\ 2t\partial_t + x\partial_x + (k+2)y\partial_y$
4	x^{-2}	–	$A_0^{\text{pr}},\ 2t\partial_t + x\partial_x,\ 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - (2t+x^2)u\partial_u$
5	x	–	$A_0^{\text{pr}},\ \partial_x + t\partial_y,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - 2u\partial_u,\ t^2\partial_t + (tx+3y)\partial_x + 3ty\partial_y - (2t+x^2)u\partial_u,$ $3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3(y-tx)u\partial_u,\ 2t\partial_x + t^2\partial_y - xu\partial_u$

$$= (\lambda_2 + \lambda_7 x)\partial_x + (\lambda_5 + (\lambda_6 - 2\lambda_7)A)\partial_A .$$

Розв’язавши відповідну систему характеристичних рівнянь

$$\frac{dx}{\lambda_2 + \lambda_7 x} = \frac{dA}{\lambda_5 + (\lambda_6 - 2\lambda_7)A}$$

та врахувавши перетворення змінних з групи E, отримуємо такі три нееквівалентні функції $A(x)$, за яких відбувається розширення основної групи інваріантності:

$$A = \ln x;\ A = e^x;\ A = x^k,\ k \ne 0.$$

Теорему доведено.

Підставивши знайдені функції $A(x)$ в систему (8) та провівши відповідні обчислення, отримуємо таке твердження.

Теорема 4. Максимальними алгебрами інваріантності УЛРК (2) з функціями $A(x)$, що визначені в теоремі 3, є нескінченновимірні алгебри Лі вигляду $A^{\max} = A^{\text{basic}} \oplus_s \langle \beta(t, x, y)\partial_u \rangle$, де A^{basic} – скінченновимірні підалгебри алгебри $A^{\max}$, які наведені в таблиці, $\beta(t,x,y)$ – довільний гладкий розв’язок відповідного УЛРК (2).

***Зауваження* 2.** У таблиці було використано таке позначення: $A_0^{\text{pr}} = \langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u \rangle$; символом $\oplus_s$ тут і надалі позначається напівпряма сума двох алгебр Лі.

Інваріантні фундаментальні розв’язки рівняння (1)

Одним із застосувань симетрійних властивостей лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є побудова нетривіальних параметричних сімей фундаментальних розв’язків.

Відомо, що фундаментальні розв’язки класичних лінійних рівнянь математичної фізики зазвичай є інваріантними розв’язками [11, 12]. У праці [13] було запропоновано метод побудови інваріантних фундаментальних розв’язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, який ми застосуємо до ЛРК (1).

Фундаментальний розв’язок рівняння (1) у точці $M(0,0,0)$ задовольняє рівняння

$$u_t - u_{xx} + x u_y = \delta(t,x,y), \qquad (11)$$

де δ – функція Дірака.

Знайдемо підалгебру максимальної алгебри інваріантності рівняння (1), яка буде також алгеброю інваріантності рівняння (11). Нагадаємо, що ЛРК (1) допускає нескінченновимірну алгебру Лі $\langle X_1, \dots, X_8 \rangle \oplus_s \langle X_\infty \rangle$ інфінітезимальних симетрій з такими базисними операторами скінченновимірної частини (див. випадок 5 у таблиці):

$$X_1 = \partial_x + t\partial_y;\ X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - 2u\partial_u;$$

$$X_3 = t^2\partial_t + (tx+3y)\partial_x + 3ty\partial_y - (2t+x^2)u\partial_u;$$

$$X_4 = 3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3(y-tx)u\partial_u;$$

$$X_5 = 2t\partial_x + t^2\partial_y - xu\partial_u;$$

$$X_6 = \partial_t;\ X_7 = \partial_y;\ X_8 = u\partial_u.$$

Очевидно, що оператори $X_\infty = \beta(t,x,y)\partial_u$, де $\beta(t,x,y)$ – довільний розв’язок рівняння (1), також є операторами симетрії рівняння (11), тому в подальшому ці оператори нами не розглядаються. Випишемо загальний вигляд оператора нетривіальної симетрії рівняння (1):

$$X = \sum_{i=1}^{8} a_i X_i ,$$

або в розгорнутому вигляді

$$X = (2a_2 t + a_3 t^2 + a_6)\partial_t + (a_1 + a_2 x + a_3(tx+3y) + 3a_4 t^2 + 2a_5 t)\partial_x + (a_1 t + 3a_2 y + 3a_3 t y + a_4 t^3 + a_5 t^2 + a_7)\partial_y + (-2a_2 - a_3(2t+x^2) + 3a_4(y-tx) - a_5 x + a_8) u\partial_u, \quad (12)$$

де $a_i\,(i=1,\dots,8)$ — довільні дійсні сталі.

Оскільки інфінітезимальний оператор (12) є оператором симетрії рівняння (1), то існує така дійсна функція $\lambda(t,x,y)$, яка задовольняє таку тотожність [7]:

$$X^{(2)}(Lu) = \lambda(t,x,y) Lu, \quad (13)$$

де $X^{(2)}$ — друге продовження оператора (12), а $Lu \equiv u_t - u_{xx} + xu_y$.

З умови (13) знаходимо, що оператору симетрії (12) відповідає функція

$$\lambda(t,x,y) = -4a_2 - a_3(4t+x^2) + 3a_4(y-tx) - a_5 x + a_8.$$

Згідно з методом, запропонованим у [13], алгебра Лі операторів симетрії рівняння (11) є підалгеброю алгебри Лі операторів симетрії рівняння (1), оператори якої задовольняють такі умови:

$$\begin{gathered} \tau(M) = \xi(M) = \theta(M) = 0, \\ \lambda(M) + \tau_t(M) + \xi_x(M) + \theta_y(M) = 0. \end{gathered} \quad (14)$$

З (14) легко знаходимо

$$a_1 = a_6 = a_7 = 0, \; a_8 = -2a_2.$$

У результаті отримуємо таке твердження.

Теорема 5. Рівняння (11) допускає алгебру Лі операторів симетрії з таким базисом скінченновимірної частини:

$$Y_1 = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - 4u\partial_u;$$

$$Y_2 = 2t\partial_x + t^2\partial_y - xu\partial_u;$$

$$Y_3 = 3t^2\partial_x + t^3\partial_y + 3(y-tx)u\partial_u;$$

$$Y_4 = t^2\partial_t + (tx+3y)\partial_x + 3ty\partial_y - (2t+x^2)u\partial_u.$$

Операторам симетрії $Y_i\,(i=1,\dots,4)$ відповідають такі однопараметричні групи точкових перетворень:

G_1: $t' = e^{2a}t$, $x' = e^a x$, $y' = e^{3a}y$, $u' = e^{-4a}u$;

G_2: $t' = t$, $x' = x + 2at$, $y' = y + at^2$, $u' = ue^{-a(at+x)}$;

G_3: $t' = t$, $x' = x + 3at^2$, $y' = y + at^3$, $u' = ue^{3a(y - tx - at^3)}$;

G_4: $t' = \dfrac{t}{1-at}$, $x' = \dfrac{x + a(3y - tx)}{(1-at)^2}$, $y' = \dfrac{y}{(1-at)^3}$,

$$u' = u(1-at)^2 \exp\left[-\frac{\Omega}{(1-at)^3}\right],$$

де $\Omega = a(x^2 + (3xy - 2tx^2)a + (3y^2 - 3txy + t^2x^2)\times a^2)$; a — груповий параметр.

Покажемо, як результати теореми 5 можуть бути використані для побудови інваріантних фундаментальних розв'язків рівняння (1). Використаємо для цього, наприклад, трійку операторів Y_2, Y_3, Y_4. Інваріант, що відповідає цим операторам, знаходиться із системи рівнянь

$$Y_2 I = 0, \; Y_3 I = 0, \; Y_4 I = 0,$$

де $I = I(t,x,y,u)$. Після відповідних обчислень отримуємо

$$I = ut^2 \exp\left[\frac{x^2}{4t} + \frac{3}{t^3}\left(y - \frac{1}{2}tx\right)^2\right].$$

Інваріантний розв'язок визначається з рівності $I = K = \mathrm{const}$, а отже, має такий вигляд:

$$u = Kt^{-2} \exp\left[-\frac{x^2}{4t} - \frac{3}{t^3}\left(y - \frac{1}{2}tx\right)^2\right]. \quad (15)$$

Підставивши (15) у рівняння (11), знаходимо сталу $K = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$. Звідси отримуємо шуканий інваріантний фундаментальний розв'язок ЛРК (1):

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2\pi t^2} \exp\left[-\frac{x^2}{4t} - \frac{3}{t^3}\left(y - \frac{1}{2}tx\right)^2\right]. \quad (16)$$

Легко переконатися, що цей розв'язок є інваріантним відносно групи G_1. Це означає, зокрема, що його також можна було знайти за двома іншими можливими тривимірними підалгебрами алгебри $\langle Y_1, \dots, Y_4 \rangle$. Відзначимо також, що фундаментальні розв'язки рівняння (1) можна шукати і за двовимірними та одновимірними підалгебрами цієї алгебри, але при цьому доведеться розв'язувати нелінійні диференціальні рівняння.

***Зауваження* 3.** Фундаментальний розв'язок (16) був знайдений А.М. Колмогоровим [1] без застосування симетрійних методів. Проведені нами міркування дають теоретико-групове підґрунтя цього розв'язку, а також ще раз підтверджують емпіричне спостереження, що фундаментальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними слід шукати серед інваріантних розв'язків.

Висновки

У цій статті нами за алгоритмом Ахатова–Газізова–Ібрагімова проведена попередня групова класифікація одного класу (2+1)-вимірних УЛРК (2).

Встановлено, що основною алгеброю інваріантності рівнянь з класу (2) є нескінченновимірна алгебра Лі (4), що має структуру напівпрямої суми тривимірної розкладної розв'язної алгебри Лі $A_{3.1} = \langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u \rangle$ та нескінченновимірного тривіального ідеалу $\beta(t, x)\partial_u$, де функція $\beta(t, x)$ є довільним гладким розв'язком лінійного рівняння теплопровідності $\beta_t - \beta_{xx} = 0$. Виділено три підкласи рівнянь з класу (2), які допускають ширші максимальні алгебри інваріантності, ніж основна алгебра інваріантності (4). Для отриманих рівнянь за класичним алгоритмом Лі знайдені повні набори операторів симетрії, які подані в таблиці.

За методом Аксьонова знайдено алгебру інваріантності фундаментальних розв'язків ЛРК (1), оператори якої були використані для побудови інваріантних фундаментальних розв'язків цього рівняння. Показано, що фундаментальний розв'язок рівняння (1), знайдений А.М. Колмогоровим [1], є інваріантним фундаментальним розв'язком.

У перспективі можна зробити повну групову класифікацію класу рівнянь (2) і побудувати фундаментальні розв'язки для інших рівнянь з цього класу.

1. *A.N. Kolmogoroff,* "Zufallige Bewegungen (Zur Theorie der Brownischen Bewegung)", Ann. Math., vol. 35, no. 2, pp. 116–117, 1934.
2. *Спічак С.В., Стогній В.І., Копась І.М.* Симетрійний аналіз і точні розв'язки лінійного рівняння Колмогорова // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2011. – № 4. – С. 93–97.
3. *F. Finkel,* "Symmetries of the Fokker–Planck equations with a constant diffusion matrix in 2+1 dimensions", J. Phys. A: Math. Gen, vol. 32, pp. 2671–2684, 1999.
4. *E.A. Saied,* "On the silimarity solutions for the free Kramers equation", Appl. Math. Comp., vol. 74, pp. 59–63, 1996.
5. *W.M. Shtelen and V.I. Stogny,* "Symmetry properties of one- and two-dimensional Fokker–Planck equations", J. Rhys. A: Math. Gen., vol. 22, pp. 539–543, 1989.
6. *Лагно В.І., Стогній В.І.* Симетрія і точні розв'язки двовимірного рівняння Фоккера–Планка із змінною матрицею дифузії // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2006. – № 1. – С. 132–138.
7. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. *Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.
9. *Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.". – М.: ВИНИТИ, 1989. – **34**. – С. 3–83.
10. *N.H. Ibragimov et al.,* "Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$", J. Math. Phys., vol. 32, no. 11, pp. 2988–2995, 1991.
11. *Ибрагимов Н.Х.* Азбука группового анализа // Новое в жизни, науке, технике. Сер. Математика, кибернетика. – М.: Знание, 1989. – № 8. – 44 с.
12. *Ибрагимов Н.Х.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике // Успехи мат. наук. – 1992. – **47**, вып. 4. – С. 83–144.
13. *Аксенов А.В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. – 1995. – **342**, № 2. – С. 151–153.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
3 червня 2013 року