ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.9

Н.І. Блащак, О.А. Сивак

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

The paper studies asymptotic properties of continuous solutions of linear functional difference equations of $x(t+1) = ax(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x(q_j t)$ type depending on assumptions concerning real constants a and $q_j, j = \overline{1,n}$. Using the methods of the theory of differential and difference equations, new conditions for existence of continuous solutions of linear functional difference equations are established, we propose the method of constructing these solutions, study structure and behaviour of their set with $t \to +\infty$ and investigate their properties depending on conditions imposed to a, $q_j, j = \overline{1,n}$. Specifically, under conditions $0 < a < 1$, $q > 1$ and $b = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$, $\Delta = \frac{b}{a - a^q} < \frac{1}{2}$, we prove the existence of the family of continuous narrow solutions at $t \ge 0$ in the therem 1 depending on any continuous 1-periodic function. Its solutions are represented as series (2), where $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, – some continuous functions, which are solutions of sequence equations (4_i), $i = 0, 1, 2, \ldots$ and satisfy the mark (5). Moreover, under the same conditions regarding real constants a and $q_j, j = \overline{1,n}$, we prove the theorem 2 for a nonlinear equation and the theorem 3 in case when $b_j, j = \overline{1,k}$ are functions of a real variable t.

Вступ

У роботі розглядається лінійне функціонально-різницеве рівняння вигляду

$$x(t+1) = ax(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x(q_j t), \tag{1}$$

де $t \in R^+ = [0, +\infty)$, $a, b_j, q_j, j = 1, 2, \ldots,$ – дійсні сталі. Окремі класи таких рівнянь вивчалися багатьма математиками (див. праці [1–3] і цитовану в них літературу) і на сьогодні низка питань їх теорії досить детально вивчена. Особливо це стосується питань існування неперервних розв'язків, вивчення структури їх множини, поведінки при $t \to +\infty$ (див. [4–7]). На продовження цих досліджень у роботі вивчаються аналогічні питання для рівняння (1) за певних припущень відносно a та $q_j, j = \overline{1,n}$.

Постановка задачі

Метою роботи є дослідження структури множини неперервних розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь вигляду (1) та вивчення їх асимптотичних властивостей.

Основні результати

Дослідимо рівняння (1) при $t \ge 0$ у випадку, коли виконуються такі умови:

1) $0 < a < 1$, $q_j \ge q > 1$, $j = 1, 2, \ldots$;

2) $b = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$, $\Delta = \frac{b}{a - a^q} < 1$.

Має місце така лема.

Лема 1. Якщо виконуються умови 1, 2, то рівняння (1) має сім'ю неперервних обмежених при $t \ge 0$ розв'язків $x(t) = x(t, \omega(t))$, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$.

Доведення. Покажемо, що рівняння (1) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t), \tag{2}$$

де $x_i(t), i = 0, 1 \ldots,$ – деякі неперервні функції. Дійсно, підставляючи (2) в (1), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i(t+1) = a \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=0}^{\infty} x_i(q_j t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $x_i(t)$, $i = 0,1,\dots,$ задовольняють послідовність рівнянь

$$x_0(t+1) = ax_0(t), \qquad (3_0)$$

$$x_i(t+1) = ax_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{i-1}(q_j t),\ i = 1,2,\dots, \qquad (3_i)$$

то ряд (2) буде формальним розв'язком рівняння (1).

Рівняння (3_0) має сім'ю неперервних розв'язків вигляду

$$x_0(t) = a^t \omega(t), \qquad (4_0)$$

де $\omega(t)$ – довільна неперервна 1-періодична функція. Розглядаючи послідовно рівняння (3_i), $i = 1,2,\dots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$x_i(t) =$$

$$= -\sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_{i-1}(q_j(t+p)) \right),\ i = 1,2,\dots \qquad (4_i)$$

Покажемо, що ряди (4_i), $i = 1,2,\dots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки

$$|x_i(t)| \le M\Delta^i a^{qt},\ i = 1,2,\dots \qquad (5)$$

Дійсно, оскільки $|x_0(t)| \le Ma^t$, де $M = \max_t |\omega(t)|$, то в силу (4_1) отримуємо

$$|x_1(t)| \le \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| |x_0(q_j(t+p))| \right) \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| M a^{q_j(t+p)} \le$$

$$\le Ma^{qt-1} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p} \le M \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|}{a - a^q} a^{qt} = M\Delta a^{qt},$$

тобто оцінка (5) має місце при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (5) доведена уже для деякого $i \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від i до $i+1$. Дійсно, враховуючи (4_{i+1}) і (5), отримуємо

$$|x_{i+1}(t)| \le \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| |x_i(q_j(t+p))| \right) \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| M\Delta^i a^{q(q_j(t+p))} \le$$

$$\le M\Delta^i a^{q^2 t-1} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q^2-1)p} \le$$

$$\le M\Delta^i a^{qt-1} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p} \le$$

$$\le M\Delta^i \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|}{a - a^q} a^{qt} = M\Delta^{i+1} a^{qt}.$$

Цим самим ми довели, що ряди (4_i), $i = 1,2,\dots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \ge 0$ до деяких неперервних функцій $x_i(t)$, $i = 1,2,\dots$, для яких виконуються оцінки (5). Звідси безпосередньо випливає, що ряд (2) рівномірно збігається при всіх $t \ge 0$ до деякої неперервної функції $x(t)$, яка є розв'язком рівняння (1) і задовольняє умову $|x(t)| \le \dfrac{M}{1-\Delta}$.

Лему 1 доведено.

Лема 2. Якщо $\gamma(t)$ довільний неперервний обмежений при $t \ge 0$ розв'язок рівняння (1) і виконуються умови 1, 2 леми 1, то при всіх $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|\gamma(t)| \le \tilde{M} a^t, \qquad (6)$$

де $\tilde{M}$ – деяка додатна стала.

Д о в е д е н н я. Дійсно, оскільки

$$\gamma(t+1) = a\gamma(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \gamma(q_j t), \qquad (7)$$

то, виконуючи в (7) взаємно-однозначну заміну змінних

$$\gamma(t) = a^t v(t),$$

отримуємо

$$v(t+1) = v(t) + a^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} b_j a^{(q_j-1)t} v(q_j t). \qquad (8)$$

Оскільки довільний неперервний обмежений при $t \ge 0$ розв'язок рівняння (8) задовольняє рівняння

$$v(t) = \tilde{\omega}(t) - a^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} v(q_j(t+p)), \qquad (9)$$

де $\tilde{\omega}(t)$ – деяка неперервна 1-періодична функція, то для доведення леми достатньо довести, що рівняння (9) має єдиний неперервний обмежений при $t \geq 0$ розв'язок $v(t)$. Для цього використаємо метод послідовних наближень, які побудуємо за допомогою співвідношень

$$v_0(t) = \tilde{\omega}(t),$$

$$v_m(t) =$$

$$= \tilde{\omega}(t) - a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} v_{m-1}(q_j(t+p)), \quad (10)$$

$$m = 1, 2, \ldots$$

Покажемо, що так визначені функції $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, є неперервними обмеженими при всіх $t \geq 0$. Справді, $|v_0(t)| \leq |\tilde{\omega}(t)| \leq \tilde{M}'$, де $\tilde{M}'$ – деяка додатна стала. Тоді в силу (10) і умов леми 2 отримуємо

$$|v_1(t)| \leq |\tilde{\omega}(t)| +$$

$$+ a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} |\tilde{\omega}(q_j(t+p))| \leq$$

$$\leq \tilde{M}' + a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \tilde{M}' \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p} \leq$$

$$\leq \tilde{M}' \left(1 + \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|}{a - a^q} \right) = \frac{\tilde{M}'}{1 - \Delta} = \tilde{\tilde{M}}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка

$$|v_m(t)| \leq \tilde{\tilde{M}} \quad (11)$$

доведена уже для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, в силу (10), умов леми 2 і (11) знаходимо

$$|v_{m+1}(t)| \leq |\tilde{\omega}(t)| +$$

$$+ a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} |v_m(q_j(t+p))| \leq$$

$$\leq \tilde{M}' + a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \tilde{\tilde{M}} \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p} \leq$$

$$\leq \tilde{\tilde{M}} \left(\frac{\tilde{M}'}{\tilde{\tilde{M}}} + \frac{a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|}{1 - a^{q-1}} \right) = \tilde{\tilde{M}}(1 - \Delta + \Delta) = \tilde{\tilde{M}}.$$

Отже, всі функції $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, є неперервними обмеженими при всіх $t \geq 0$.

Доведемо тепер, що послідовність функцій $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної обмеженої при $t \geq 0$ функції $v(t)$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $t \geq 0$ і $m \geq 1$ виконується оцінка

$$|v_m(t) - v_{m-1}(t)| \leq \tilde{M}'\Delta^m. \quad (12)$$

Справді, в силу (10) при $m = 1$ маємо

$$|v_1(t) - v_0(t) \leq a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} |\tilde{\omega}(q_j(t+p))| \leq$$

$$\leq a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \tilde{M}' a^{(q-1)t} \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p} \leq$$

$$\leq \tilde{M}' \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|}{a(1 - a^{q-1})} = \tilde{M}'\Delta,$$

тобто в цьому випадку оцінка (12) має місце. Припустимо, що вона доведена уже для деякого $m \geq 1$, і покажемо її справедливість для $m+1$. Дійсно, беручи до уваги (10), (12) і умови леми, знаходимо

$$|v_{m+1}(t) - v_m(t)| \leq a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} |v_m(q_j(t+p)) - v_{m-1}(q_j(t+p))| \leq$$

$$\leq a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \tilde{M}'\Delta^m a^{(q-1)t} \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p} \leq$$

$$\leq \tilde{M}'\Delta^m \frac{\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|}{a(1 - a^{q-1})} = \tilde{M}'\Delta^{m+1}.$$

Таким чином, оцінка (12) має місце при всіх $t \geq 0$, $m \geq 1$.

Безпосередньо із (12) випливає, що послідовність $v_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної при $t \geq 0$ функції $v(t) = \lim_{m \to +\infty} v_m(t)$, яка (в силу (11)) задовольняє умову

$$|v(t)| \leq \tilde{\tilde{M}}.$$

Переходячи в (10) до границі при $m \to +\infty$, можна переконатися, що функція $v(t) = \lim_{m \to +\infty} v_m(t)$ є розв'язком рівняння (9).

Припустимо тепер, що існує ще один неперервний обмежений при $t \ge 0$ розв'язок $\tilde v(t)$ рівняння (9), такий, що $\tilde v(t) \ne v(t)$. Тоді в силу співвідношень

$$v(t) = \tilde\omega(t) - a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} v(q_j(t+p)),$$

$$\tilde v(t) = \tilde\omega(t) - a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} \tilde v(q_j(t+p))$$

і умов 1, 2 отримуємо

$$|v(t)-\tilde v(t)| \le a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}|b_j| \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q_j-1)(t+p)} |v(q_j(t+p)) - \tilde v(q_j(t+p))| \le$$

$$\le a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|\left(\sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p}\right)\|v(t)-\tilde v(t)\| \le \Delta\|v(t)-\tilde v(t)\|,$$

де $\|v(t)-\tilde v(t)\| = \sup_t |v(t)-\tilde v(t)|$. Звідси випливає співвідношення

$$\|v(t)-\tilde v(t)\| \le \Delta\|v(t)-\tilde v(t)\|,$$

яке може мати місце лише у випадку, коли $v(t) \equiv \tilde v(t)$. Отримане протиріччя завершує доведення леми 2.

Теорема 1. Нехай виконуються умови

1) $0 < a < 1$, $q > 1$;

2) $b = \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| < \infty$, $\Delta = \dfrac{b}{a-a^q} < \dfrac{1}{2}$.

Тоді довільний неперервний обмежений при $t \ge 0$ розв'язок $\gamma(t)$ рівняння (1) можна зобразити у вигляді ряду (2), в якому функції $x_i(t) = x_i(t,\omega(t))$, $i = 0,1,\ldots$, визначаються співвідношеннями (4_i), $i = 0,1,\ldots$, а $\omega(t)$ – деяка неперервна 1-періодична функція.

Для доведення теореми достатньо, очевидно, показати, що для довільного неперервного обмеженого при всіх $t \ge 0$ розв'язку $\gamma(t)$ рівняння (1) існує неперервна 1-періодична функція $\omega(t)$, така, що виконується рівність

$$\gamma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t,\omega(t)),$$

яку, беручи до уваги (4_0), можна записати у вигляді

$$\omega(t) = a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t,\omega(t)). \qquad (13)$$

Розглядаючи (13) як рівняння відносно функції $\omega(t)$, покажемо, що воно має неперервний 1-періодичний розв'язок. Для цього застосуємо метод послідовних наближень, які визначимо за допомогою формул

$$\omega_0(t) = a^{-t}\gamma(t), \qquad (14)$$

$$\omega_m(t) = a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t,\omega_{m-1}(t)),\ m = 1,2,\ldots \qquad (15)$$

Покажемо, що таким чином побудовані функції $\omega_m(t)$, $m = 0,1,\ldots$, є обмеженими при всіх $t \ge 0$. Справді, в силу леми 2 маємо

$$|\omega_0(t)| \le \tilde M.$$

Тоді, беручи до уваги (15) і умови теореми, знаходимо

$$|\omega_1(t)| \le |a^{-t}\gamma(t)| + a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i(t,\omega_0(t))| \le$$

$$\le \tilde M + \tilde M a^{(q-1)t}\sum_{i=1}^{\infty}\Delta^i \le \tilde M + \frac{\tilde M\Delta}{1-\Delta} \le \frac{\tilde M}{1-\theta},$$

де $\theta = \dfrac{\Delta}{1-\Delta} < 1$.

За індукцією можна показати, що оцінка

$$|\omega_m(t)| \le \frac{\tilde M}{1-\theta} \qquad (16)$$

має місце при всіх $m \ge 1$ і $t \ge 0$. Справді, нехай (16) доведена уже для деякого $m \ge 1$. Тоді в силу (15), (16) і умов теореми 1 маємо

$$|\omega_{m+1}(t)| \le |a^{-t}\gamma(t)| + a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i(t,\omega_m(t))| \le$$

$$\le \tilde M + \frac{\tilde M}{1-\theta}a^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\Delta^i\right)a^{qt} \le$$

$$\le \tilde M + \frac{\tilde M}{1-\theta}\frac{\Delta}{1-\Delta} \le \frac{\tilde M}{1-\theta}(1-\theta+\theta) = \frac{\tilde M}{1-\theta}.$$

Отже, оцінка (16) має місце при всіх $t \ge 0$ і $m \ge 1$.

Доведемо тепер, що послідовність функцій $\omega_m(t)$, $m = 0,1,\ldots$, рівномірно збігається до деякої неперервної при $t \ge 0$ функції $\omega(t)$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $m \ge 1$ і $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|\omega_m(t)-\omega_{m-1}(t)| \le \tilde{M}\,\theta^m a^{(q-1)t}. \qquad (17)$$

Покажемо спочатку, що якщо $\tilde{v}(t)$, $v(t)$ – неперервні обмежені при $t \ge 0$ функції, то при всіх $i \ge 1$, $t \ge 0$ виконується оцінка

$$|x_i(t,\tilde{v}(t)) - x_i(t,v(t))| \le \Delta^i a^{qt} \| \tilde{v}(t)-v(t)\|, \quad (18)$$

де $\|\tilde{v}(t)-v(t)\| = \sup\limits_t |\tilde{v}(t)-v(t)|$. Дійсно, використовуючи (4_0), (4_1), маємо

$$|x_1(t,\tilde{v}(t)) - x_1(t,v(t))| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|\,|x_0(q_j(t+p),\tilde{v}(q_j(t+p))) -$$

$$- x_0(q_j(t+p), v(q_j(t+p)))| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} |a^{q_j(t+p)}\tilde{v}(q_j(t+p)) -$$

$$- a^{q_j(t+p)} v(q_j(t+p))| \le \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)+q_j p} a^{q_j t} |\tilde{v}(q_j(t+p)) - v(q_j(t+p))| \le$$

$$\le \frac{\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|}{a(1-a^{q-1})} a^{qt}\|\tilde{v}(t)) - v(t)\| = \Delta a^{qt}\|\tilde{v}(t)-v(t)\|.$$

Припустимо, що оцінка (18) доведена уже для деякого $i=m$, і покажемо, що вона не зміниться при перході від m до $m+1$. Дійсно, в силу (4_{m+1}), (18) маємо

$$|x_{m+1}(t,\tilde{v}(t)) - x_{m+1}(t,v(t))| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)} |x_m(q_j(t+p),\tilde{v}(q_j(t+p)) -$$

$$- x_m(q_j(t+p), v(q_j(t+p))| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty}|b_j| \sum_{p=0}^{\infty} a^{-(p+1)}\Delta^m a^{q(q_j(t+p))} \|\tilde{v}(t)-v(t)\| \le$$

$$\le \frac{\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|}{a} \Delta^m \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q^2-1)p} a^{q^2 t} \|\tilde{v}(t)-v(t)\| \le$$

$$\le \frac{\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|}{a} \Delta^m \sum_{p=0}^{\infty} a^{(q-1)p} a^{qt} \|\tilde{v}(t)-v(t)\| \le$$

$$\le \frac{\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|}{a} \Delta^m \frac{1}{1-a^{q-1}} a^{qt} \|\tilde{v}(t)-v(t)\| =$$

$$= \Delta^{m+1} a^{qt} \|\tilde{v}(t)-v(t)\|.$$

Отже, оцінка (18) виконується при всіх $i \ge 1$, $t \ge 0$.

Покажемо тепер, що має місце оцінка (17). Дійсно, оскільки безпосередньо із (4_i) випливає, що при всіх $t \ge 0$ виконується співвідношення

$$x_i(t,0) \equiv 0,$$

то, беручи до уваги (5), (14)–(16), при $m=1$ отримуємо

$$|\omega_1(t)-\omega_0(t)| \le a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i(t,\omega_0(t))| \le$$

$$\le a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{M}\Delta^i a^{qt} \le \tilde{M}\,\frac{\Delta}{1-\Delta} a^{(q-1)t} \le \tilde{M}\theta a^{(q-1)t}.$$

Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінка (17) доведена уже для деякого $k \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від k до $k+1$. Враховуючи (15), (18) і $\|\omega_k - \omega_{k-1}\| \le \tilde{M}\theta^k$, маємо

$$|\omega_{k+1}(t)-\omega_k(t)| \le a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i(t,\omega_k(t)) - x_i(t,\omega_{k-1}(t))| \le$$

$$\le a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty}\Delta^i a^{qt}\|\omega_k(t)-\omega_{k-1}(t)\| \le$$

$$\le a^{(q-1)t}\frac{\Delta}{1-\Delta}\tilde{M}\theta^k \le \tilde{M}\theta^{k+1}a^{(q-1)t}.$$

Цим самим ми довели, що оцінка (17) виконується при всіх $m \ge 1$. Звідси безпосередньо випливає, що послідовність функцій $\omega_m(t)$, $m = 0,1,\ldots$, які визначаються формулами (14), (15), рівномірно збігається при $t \ge 0$ до деякої неперервної функції $\omega(t) = \lim\limits_{m\to+\infty}\omega_m(t)$. Переходячи в (17) до границі при $m \to +\infty$, можна переконатися, що функція $\omega(t)$ є розв’язком рівняння (15).

Доведемо тепер, що функція $\omega(t)$ є 1-періодичною. В силу (13) маємо

$$\omega(t+1) = a^{-(t+1)}\gamma(t+1) - a^{-(t+1)}\sum_{i=1}^{\infty}x_i(t+1,\omega(t+1)).$$

Оскільки $\gamma(t+1) \equiv a\gamma(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\gamma(q_j t)$, то

$$\omega(t+1) = a^{-t}\gamma(t) + a^{-(t+1)}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \gamma(q_j t) -$$

$$- a^{-(t+1)}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t+1, \omega(t+1)) = a^{-t}\gamma(t) -$$

$$- a^{-t}\left(a^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t+1,\, \omega(t+1)) - a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \gamma(q_j t) \right) =$$

$$= a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t,\, \omega(t)) + \right.$$

$$\left. + a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=0}^{\infty} x_i(q_j t, \omega(q_j t)) - a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \gamma(q_j t) \right) =$$

$$= a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t,\, \omega(t)) + a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \gamma(q_j t) - \right.$$

$$\left. - a^{-1}\sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \gamma(q_j t) \right) = a^{-t}\gamma(t) - a^{-t}\sum_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega(t)) = \omega(t).$$

Цим самим теорема 1 повністю доведена.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду

$$y(t+1) = a y(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j y(q_j t) + f(t), \qquad (19)$$

де сталі $a, b_j, q_j, = \overline{1,k}$ і функція $f(t)$ задовольняють умови:

1′) $0 < a < 1$, $q_j \ge q > 1$, $j = \overline{1,k}$;

2′) $b = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty$, $\frac{b}{1-a} = \tilde{\theta} < 1$;

3′) функція $f(t)$ є неперервною обмеженою при всіх $t \in R$ і такою, що $\sup_t |f(t)| = \bar{M} < \infty$.

Має місце така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1′–3′, то рівняння (19) має неперервний обмежений при $t \in R$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \qquad (20)$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0,1,\ldots$, — деякі неперервні обмежені при $t \in R$ функції.

Доведення. Підставляючи (20) в (19), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) = a\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(q_j t) + f(t).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0,1,\ldots$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$\bar{y}_0(t+1) = a\bar{y}_0(t) + f(t), \qquad (21_0)$$

$$\bar{y}_i(t+1) = a\bar{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \bar{y}_{i-1}(q_j t),\; i = 1,2,\ldots, \qquad (21_i)$$

то ряд (20) є формальним розв'язком рівняння (19).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що ряд

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a^{j-1} f(t-j) \qquad (22_0)$$

рівномірно збігається при всіх $t \in R$ і задовольняє рівняння (21_0) та виконується оцінка

$$|\bar{y}_0(t)| \le \frac{\bar{M}}{1-a} = \bar{M}'. \qquad (23_0)$$

Беручи до уваги (22_0), (23_0), можна послідовно показати, що ряди

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{p=1}^{\infty} a^{p-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\, \bar{y}_{i-1}(q_j(t-p)) \right),\; i = 1,2,\ldots, \qquad (21_i)$$

рівномірно збігаються при всіх $t \in R$, задовольняють відповідні рівняння (21_i), $i = 1,2,\ldots$, і виконуються співвідношення

$$|\bar{y}_i(t)| \le \bar{M}'\tilde{\theta}^i,\; i = 1,2,\ldots. \qquad (23_i)$$

Таким чином, оскільки функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0,1,\ldots$, що визначаються за допомогою співвідношень (22_i), $i = 0,1,\ldots$, задовольняють умови (23_i), $i = 0,1,\ldots$, то ряд (20) рівномірно збігається до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка є розв'язком рівняння (19) і задовольняє при всіх $t \in R$ умову

$$|\bar{y}(t)| \le \frac{\bar{M}'}{1-\tilde{\theta}}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження. Виконуючи в (19) заміну змінних

$$y(t) = x(t) + \bar{y}(t),$$

отримаємо рівняння (1) для функції $x(t)$, для якого має місце теорема 1.

У зв'язку із доведеними вище теоремами 1, 2 природно виникає питання про описання структури множини неперервних розв'язків рівняння (19) у випадку, коли b_j, $j=\overline{1,k}$ є деякими дійсними функціями дійсної змінної t. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$y(t+1)=ay(t)+\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{b}_j(t)y(q_jt)+\tilde{f}(t), \qquad (24)$$

де a, q_j, $j=1,2,\ldots,$ – деякі сталі, $\tilde{b}_j(t)$, $j=1,2,\ldots: R\to R$, $\bar{f}(t): R\to R$.

Має місце така теорема.

Теорема 3. Нехай виконуються умови

1′′) $0<a<1$, $q_j\ge q>1$, $j=1,2,\ldots;$

2′′) функції $\tilde{b}_j(t)$, $j=1,2,\ldots$, $\tilde{f}(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t\in R$ і такими, що $\sup\limits_t|\tilde{b}_j(t)|=b_j^*$, $j=1,2,\ldots$, $\sup\limits_t|\tilde{f}(t)|=f^*$;

3′′) $\dfrac{\sum_{j=1}^{\infty}b_j^*}{1-a}=\tilde{\Delta}<1.$

Тоді рівняння (24) має неперервний обмежений при $t\in R$ розв'язок у вигляді ряду

$$\tilde{y}(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{y}_i(t), \qquad (25)$$

де $\tilde{y}_i(t)$, $i=0,1,\ldots,$ – деякі неперервні обмежені при $t\in R$ функції.

Д о в е д е н н я теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 2.

Висновки

У статті встановлено нові умови існування неперервних розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків, вивчено структуру та поведінку їх множини при $t\to+\infty$, досліджено їх властивості залежно від умов, накладених на a, q_j, $j=\overline{1,n}$. Основним результатом є теорема 1, в якій доведено існування сім'ї неперервних обмежених при $t\ge 0$ розв'язків, що залежить від довільної неперервної 1-періодичної функції $\omega(t)$ при виконанні умов

$$0<a<1,\quad q>1 \quad \text{і} \quad b=\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|<\infty, \Delta=\frac{b}{a-a^q}<\frac{1}{2},$$

розв'язки якої зображаються у вигляді ряду (2), де $x_i(t)$, $i=1,2,\ldots$, – деякі неперервні функції, які є розв'язками послідовності рівнянь (4_i), $i=0,1,2,\ldots$, та задовольняють оцінки (5).

Отримані результати є продовженням уже існуючих, які стосуються вивчення питань існування та структури множини неперервних розв'язків. Вони сприятимуть подальшому вивченню властивостей розв'язків лінійних функціонально-різницевих рівнянь для більш широких класів. До того ж цей матеріал у майбутньому буде використано при дослідженні лінійних функціонально-різницевих рівнянь вказаного вигляду, коли $a=a(t), b=b(t)$.

1. *G.D. Birkhoff,* "General theory of linear difference equations", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 12, pp. 243–284, 1911.
2. *M. Kuczma et al.,* Interative Functional Equations. Cambridge University Press, 1990, p. 552.
3. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – К.: Наук. думка, 1985. – 216 с.
4. *Пелюх Г.П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // ДАН. – 2006. – **73**, № 2. – С. 269–272.
5. *Пелюх Г.П., Сівак О.А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 307–335.
6. *Пелюх Г.П., Сивак О.А.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Там же. – 2010. – **13**, № 1. – С. 75–95.
7. *Сивак О.А.* Структура множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2011. – № 4. – С. 81–87.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
16 січня 2013 року